Dr. Fiz. Anatolie Hristev

PROBLEME REZOLVATE DE FIZICĂ

ELECTRICITATE

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II-20.213

PLUS

BIBLIOTECA CENTR. UNIV.
"M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ
II-20.213

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4-D213

Dr. Fiz. Anatolie Hristev

PROBLEME REZOLVATE DE FIZICĂ

ELECTRICITATE

0 000008 33856 BCU IAȘI

A P H
PLUS

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lucrarea se adresează atât elevilor din liceu, cât şi celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat şi pentru examenul de admitere în învăţământul superior.

La începutul cărţii se găseşte un *Breviar* cu formule uzuale în electricitate, iar la sfârşitul cărţii se dau anexe cu diferite constante fizice. Lucrarea conţine 530 de probleme rezolvate, complet şi amănunţit.

Autorul

Comenzile se pot face telefonic sau pe adresa de web:
http://www.editura-aph.ro

Copyright © de Anatolie Hristev
Tehnoredactare computerizată şi copertă: Vlad Hristev

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
HRISTEV, ANATOLIE
Probleme rezolvate de fizică : electricitate /
Hristev Anatolie. - Bucureşti : APH - Plus, 2012
ISBN 978-973-86990-6-9

537(075.35)(076)

EDITURA APH PLUS
str. Caporal Preda nr. 12, sector 5, 051967 Bucureşti 69
telefon 021.425.84.77

TIPOGRAFIA *SHIK & STEFAN* SRL
str. N. Drăgan nr. 10, sector 5, Bucureşti

BCU IASI - BIBLIOTECA UNIVERSITARA LIBRARY

BREVIAR

Câmpul electrostatic este ***conservativ*** : Lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pentru deplasarea unei sarcini **nu** depinde de drum şi , raportat la sarcină, este prin definiţie ***diferenţa de potenţial*** :

$$\frac{L}{q} = \frac{1}{q}\int_1^2 q\vec{E}\,d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E}\,d\vec{r} = V_1 - V_2 = U\,, \quad dV = -\vec{E}\,d\vec{r}\,. \qquad (1)$$

Intensitatea câmpului electrostatic într-o anumită *direcţie* (*Ox*) este egală cu *diferenţa* (căderea) de potenţial pe unitatea de lungime în direcţia respectivă :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,. \qquad (2)$$

Pentru un ***nod*** la care sunt legate armăturile unor condensatoare, sarcina electrică totală se *conservă* .

Pentru un ***ochi de reţea*** format din condensatoare şi surse electrice suma tensiunilor pe condensatoare este

$$\sum \frac{Q_i}{C_i} = \sum E_k\,. \qquad (3)$$

Pe un rezistor în **serie** cu un condensator nu avem cădere de potenţial în curent *continuu*, căci în acest caz , condensatorul reprezintă o *întrerupere* de circuit electric.

Energia potenţială de interacţiune electrostatică a două sarcini punctiforme : $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r}\,,$ (4)

pentru un sistem de sarcini punctiforme : $E_p = \sum \frac{1}{2} q_i V_i\,,$ (5)

unde V_i este potenţialul în punctul unde se află q_i , produs de toate ***celelalte*** sarcini.

Forţa de atracţie dintre armăturile unui condensator plan :

$$F = Q\,E/2 = w_e\,S\,, \quad w_e = (1/2)\,\varepsilon\,E^2\,. \qquad (6)$$

Principiul suprapunerii : câmpul electric rezultant şi potenţialul rezultant se obţin prin însumarea câmpurilor şi potenţialelor produse ***separat şi independent*** de fiecare sarcină .

Teorema lui Gauss : *Fluxul inducţiei (deplasării) electrice* $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu sarcina electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q_{int} = \int_V \rho\, dV \qquad (7)$$

(cerculeţul la semnul integralei înseamnă sumarea pe o suprafaţă *închisă*) .

*

Intensitatea curentului electric :

$$I = \frac{dQ}{dt}\ , \quad dQ = I\, dt\ , \quad Q = \int I\, dt\ . \qquad (8)$$

Diferenţa de potenţial (căderea de potenţial) sau tensiunea între două puncte A , B ale unei reţele (curent electric *staţionar*) :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \sum R_i I_i - \sum E_k\ . \qquad (9)$$

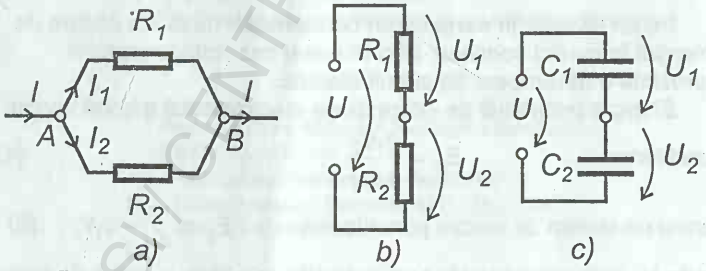
Transformarea unui montaj din ***triunghi*** $\{R_i\}$ în ***stea*** $\{r_k\}$:

$$r_1 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}\ , \ r_2 = \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}\ , \ r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}\ . \qquad (10)$$

Pentru ***bifurcaţia*** *curentului* (v. figura) :

$$I_{1,2} = I\frac{R_{2,1}}{R_1+R_2}\ , \quad I_1 = I\frac{1}{1+R_1G_2}\ , \quad I_2 = I\frac{1}{1+R_2G_1}\ , \qquad (11)$$

unde $G = 1/R$ sau $g = 1/r$ este ***conductanţa***, în unităţi *siemens*: $1\ S = 1\ \Omega^{-1}$.



Pentru ***divizorul*** *de tensiune* (v. figura) :

$$U_{1,2} = U\frac{R_{1,2}}{R_1+R_2}\ , \quad U_1 = U\frac{1}{1+R_2G_1}\ , \ U_2 = U\frac{1}{1+R_1G_2}\ , \qquad (12)$$

respectiv ,

$$U_{1,2} = U\frac{C_{2,1}}{C_1+C_2}\ . \qquad (13)$$

BCU ARGEŞ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Curentul debitat de baterii oarecare legate în ***serie***, respectiv în ***paralel*** : $I_s = \dfrac{\Sigma E_i}{R + \Sigma r_k}$, $I_p = \dfrac{\Sigma(E_i / r_i)}{1 + R\Sigma(1/r_k)}$. (14)

Teorema adaptării (*optimizării*) : *Puterea* ***utilă*** *este* ***maximă*** *atunci când rezistenţa consumatorului este egală cu rezistenţa* ***internă*** *a generatorului :* $R = r$.

În cazul bateriilor diferite legate în *serie*, respectiv în *paralel*, puterea *utilă* este ***maximă*** atunci când

$R = \Sigma r_k$, respectiv $G = 1/R = \Sigma g_k = \Sigma (1 / r_k)$. (15)

Forma "locală" ("diferenţială") a *legii lui* ***Ohm*** :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \,, \tag{16}$$

densitatea de curent $j = \dfrac{dI}{dS_\perp}$, [A/m^2] ,

conductivitatea $\gamma = 1/\rho$, [S/m] . (17)

În *metale* $\vec{j} = n e \vec{v}$, (18)

unde n (în m^{-3}) este *concentraţia* electronilor *liberi* de conducţie şi $\vec{v}$ - viteza lor de *drift* .

În *electroliţi , gaze şi semiconductoare* :

$$j = (z_- e n_- \mu_- + z_+ e n_+ \mu_+) E = \gamma E \,,$$

(19)

$$\gamma = z_- e n_- \mu_- + z_+ e n_+ \mu_+ \,,$$

unde $z_\pm$ sunt *valenţele* purtătorilor (ioni) , $\mu_\pm$ ***mobilităţile*** lor în m^2/(V·s) şi $n_\pm$ *concentraţiile* lor în m^{-3} . În cazul disociaţiei în ioni de *aceeaşi* valenţă : $e n_\pm = \alpha C F$,

(20) unde α este gradul de *disociere* , C *concentraţia* ***molară*** (mol/m^3) şi $F = e N_A$ - *constanta lui* ***Faraday*** 96,5·10^3 C/Eq .

*

Câmpul magnetic produs de un *segment* de curent (*legea* ***Biot-Savart-Laplace***) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu I \, d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \,, \quad \vec{B} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\mu I \, d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \,. \tag{21}$$

Forţa electromagnetică asupra unui ***element*** de conductor străbătut de curent şi aflat în câmp *magnetic* :

$$d\vec{F} = I \, d\vec{r} \times \vec{B} \,, \quad \vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \,. \tag{22}$$

Forţa de interacţie între doi curenţi paraleli lungi (infiniţi):

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} \ell \,. \tag{23}$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Forţa ***Lorentz*** asupra unei sarcini în câmp electric şi magnetic:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \,. \qquad (24)$$

Fluxul magnetic printr-un *element* de suprafaţă :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}\,, \qquad \Phi = \int \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}\,. \qquad (25)$$

Intensitatea câmpului magnetic :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad \text{în A/m} \,. \qquad (26)$$

Teorema lui ***Ampère*** : *Circulaţia ("lucrul mecanic") câmpului magnetic* $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ *de-a lungul unui contur închis este egală cu intensitatea curentului electric care traversează o suprafaţă sprijinită pe acel contur* :

$$\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = I_{\mathrm{Int}} = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S}\,, \quad j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}} \,, \qquad (27)$$

(cerculeţul la integrală înseamnă sumarea pe un contur *închis*) .

Reluctanţa unui conductor magnetic :

$$R_{\mathrm{m}} = \frac{\ell}{\mu S} \quad \text{în } \mathrm{H}^{-1} \,. \qquad (28)$$

Reluctanţele se compun ca şi rezistenţele electrice.

Tensiunea *magnetică* :

$$U_{\mathrm{m}} = R_{\mathrm{m}}\,\Phi = H\ell \quad \text{în A} \,. \qquad (29)$$

Tensiunea magnetomotoare (*t.m.m.*) (numărul de amperspire As): $E_{\mathrm{m}} = NI$ în A (sau în As) . (30)

Legile lui Hopkinson pentru circuite magnetice în regim staţonar :

$$\Phi = U_{\mathrm{m}} / R_{\mathrm{m}} \quad \text{sau} \quad \Phi = NI / R_{\mathrm{m}} \,. \qquad (31)$$

Într-un ***nod*** al reţelei de conductoare *magnetice* :

$$\sum \Phi_k = 0 \qquad (32)$$

şi pentru un *ochi de reţea* : $\sum N_k I_k = \sum H_l \ell_l$. (33)

Principiul suprapunerii : *câmpul magnetic rezultant se obţine prin însumarea câmpurilor magnetice produse* ***separat şi independent*** *de fiecare curent* .

*

Legea inducţiei electromagnetice (***Maxwell-Faraday***) :

$$\overline{\mathrm{E}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \,, \quad \mathrm{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\,\Phi'(t) = -\dot{\Phi} \qquad (34)$$

sau pentru un conductor mişcat în câmp magnetic :

$$dE = (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{r}\,, \qquad E = (\vec{v} \times \vec{B})\, \vec{\ell}\,. \tag{35}$$

Tensiunea electromotoare de ***autoinducţie*** :

$$E = - L \frac{dI}{dt}\,, \qquad \Phi = LI\,. \tag{36}$$

Sarcina care trece printr-un circuit datorită inducţiei electromagnetice :

$$q = - \frac{\Delta \Phi}{R}\,, \quad R \text{ - rezistenţa circuitului}\,. \tag{37}$$

Energia magnetică a unei bobine :

$$W_m = (1/2)\, LI^2 = (1/2)\, \Phi I = (1/2)\, \Phi^2 / L \tag{38}$$

este *repartizată în câmp* cu ***densitatea de energie*** :

$$w_m = (1/2)\, B^2 / \mu = (1/2)\, HB = (1/2)\, \mu H^2 \quad \text{în J/m}^3\,. \tag{39}$$

Pentru un circuit RLC *serie* , căruia i se aplică o tensiune u avem în fiecare moment :

$$u - L\, di/dt = q/C + Ri\,, \quad i = dq/dt\,. \tag{40}$$

* * *

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1. ELECTROSTATICA

1.1. CÂMPUL ELECTROSTATIC

1.1.1. ***Calculaţi forţa de atracţie electrostatică şi cea gravitaţională dintre un electron şi un proton situaţi la distanţa*** r_o = = 0,53 Å ***(raza primei orbite a electronului în atomul de hidrogen), precum şi energiile potenţiale de interacţie electrostatică şi gravitaţională .***

Rezolvare. Conform *legii lui* ***Coulomb*** şi a lui ***Newton*** :

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r_o^2} = 8{,}2\cdot 10^{-9}\ \text{N}\ , \quad F_g = \gamma\,\frac{m_e m_p}{r_o^2} = 3{,}6\cdot 10^{-47}\ \text{N}\ . \qquad (1)$$

$$E_{pe} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r_o} = -\,4{,}1\cdot 10^{-19}\ \text{J}\ , \quad E_{pg} = -\,\gamma\,\frac{m_e m_p}{r_o} = -\,1{,}9\cdot 10^{-57}\text{J}. \qquad (2)$$

Se vede că interacţia gravitaţională este total ***neglijabilă*** faţă de cea electrică :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{E_{pe}}{E_{pg}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o \gamma m_e m_p} = 2{,}3\cdot 10^{38}\ ! \qquad (3)$$

1.1.2. ***Două picături sferice identice de apă captează câte un ion monovalent . Ce masă trebuie să aibă fiecare picătură pentru ca forţa de atracţie gravitaţională să echilibreze forţa de respingere coulombiană ?***

Rezolvare. Egalăm forţa de atracţie gravitaţională (*legea lui Newton*) cu forţa de respingere electrostatică ***coulombiană*** :

$$\gamma\,\frac{m^2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\ , \quad \text{de unde} \quad m = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_o \gamma}} = 1{,}8\ \text{ng}\ . \qquad (1)$$

1.1.3. ***Trei bile identice, legate între ele prin fire elastice identice de constantă*** k = 10,0 N/m ***, formează un triunghi echilateral de latură*** ℓ = 9,0 cm ***, aşezat pe o masă orizontală***

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

fără frecări. Ce sarcini electrice identice trebuie comunicate bilelor pentru ca aria triunghiului să crească de n = 4,0 ***ori ?***

Rezolvare. Aria triunghiului echilateral este proporţională cu ℓ^2 , de aceea pentru a mări aria de *n* ori latura trebuie să crească de $\sqrt{n}$ ori : $\ell' = \ell\sqrt{n}$. Atunci alungirea fiecărui fir şi forţa elastică vor fi $\Delta\ell = \ell' - \ell = \ell(\sqrt{n} - 1)$,

$$F = k\,\Delta\ell = k\ell(\sqrt{n} - 1) . \qquad (1)$$

Această forţă trebuie să echilibreze forţa de respingere electrostatică :

$$k\,\ell(\sqrt{n} - 1) = q^2 : (4\pi\varepsilon\,\ell'^2) = q^2 : (4\pi\varepsilon\,\ell^2 n) ,$$

$$q = \sqrt{4\pi\varepsilon n k \ell^3}(\sqrt{n} - 1) = 1{,}8\ \mu C . \qquad (2)$$

1.1.4. ***Trei sarcini de acelaşi semn*** q_1 = 4,0 μC, q_2 = 2,0 μC, q_3 = 8,0 μC ***sunt legate între ele prin două fire de lungime*** ℓ = = 10,0 cm ***fiecare şi aşezate pe o dreaptă orizontală (fără frecări). Care sunt tensiunile din fire ?***

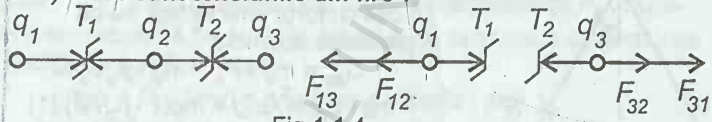


Fig.1.1.4

Rezolvare. Deoarece nu avem forţe în planul orizontal, iar greutăţile sunt echilibrate de reacţiunile normale, sistemul este în *echilibru*. Scriem condiţia de *echilibru* pentru sarcina q_1, respectiv pentru sarcina q_2 (v. figura) :

$$T_1 = F_{12} + F_{13} = q_1q_2 : (4\pi\varepsilon\,\ell^2) + q_1q_3 : (4\pi\varepsilon\,4\ell^2) =$$

$$= q_1(q_2 + q_3/4) : (4\pi\varepsilon\,\ell^2) = 14{,}4\ \text{N} , \qquad (1)$$

$$T_2 = F_{32} + F_{31} = q_3q_2 : (4\pi\varepsilon\,\ell^2) + q_3q_1 : (4\pi\varepsilon\,4\ell^2) =$$

$$= q_3(q_2 + q_1/4) : (4\pi\varepsilon\,\ell^2) = 21{,}6\ \text{N} . \qquad (2)$$

Drept verificare scriem condiţia de echilibru pentru q_2 :

$$T_1 + F_{23} = T_2 + F_{21} , \qquad (3)$$

ceeace rezultă prin scăderea , membru cu membru, a ecuaţiilor (1) şi (2), ştiind că $F_{ik} = F_{ki}$ (acţiunea şi reacţiunea) .

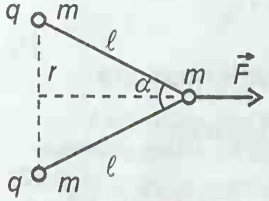
1.1.5. ***Sistemul din figură se mişcă pe un plan orizontal fără frecări. Se dau :*** q = 100 nC , ℓ = 30 mm , $\alpha = 60^o$, ***bilele sunt identice . Aflaţi forţa*** F .

Rezolvare. *Principiul II* al mecanicii scris pentru întregul sistem şi separat pentru una din sarcini dă ecuaţiile :

$$F = 3ma\ , \quad F_e : \mathrm{tg}(\alpha/2) = ma = F/3\ , \tag{1}$$

$$F_e = q^2 : (4\pi\varepsilon r^2) = q^2 : \{4\pi\varepsilon[2\ell\sin(\alpha/2)]^2\}\ ,$$

$$F = 3\,q^2 : [4\pi\varepsilon 4\ell^2\sin^2(\alpha/2)\,\mathrm{tg}(\alpha/2)] = 0{,}52\ \mathrm{N}\ . \tag{2}$$



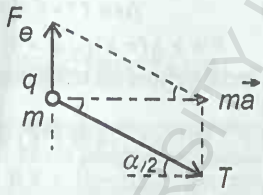


Fig.1.1.5

1.1.6. ***Două bile identice, încărcate identic, sunt suspendate de două fire egale. Unghiul de deviere în aer şi în petrol*** (ρ_o = 800 kg/m^3, ε_r = 4,7) ***este acelaşi. Aflaţi densitatea bilelor.***

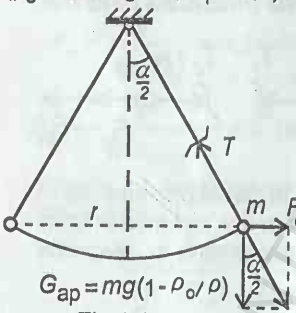


Fig.1.1.6

Rezolvare. Greutatea , compusă cu forţa arhimedică, ne dă greutatea aparentă :

$$G_{ap} = mg - F_A = mg - \rho_o Vg =$$

$$= mg - \rho_o(m/\rho)g = mg(1 - \rho_o/\rho).\tag{1}$$

În afară de această forţă de greutate aparentă, asupra bilei mai acţionează forţa de respingere *electrostatică* de la cealaltă bilă şi tensiunea din fir . Compunem greutatea aparentă cu forţa electrică , rezultanta lor trebuie să fie egală în modul şi de sens opus cu tensiunea (condiţia de ***echilibru*** : rezultanta forţelor = 0). Atunci

$$\mathrm{tg}(\alpha/2) = F_e : G_{ap} = [q^2/(4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2)] : [mg(1 - \rho_o/\rho)]\ . \tag{1}$$

Conform problemei, unghiul de deviere α este acelaşi în aer şi în petrol, deci egalăm (1) cu aceeaşi expresie scrisă pentru aer ($\varepsilon_r \cong 1$, $\rho_o \to 0$) :

$$q^2 : [4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2 mg(1 - \rho_o/\rho)] = q^2 : [4\pi\varepsilon_o r^2 mg]\ , \tag{2}$$

de unde rezultă densitatea cerută :

$$\varepsilon_r(1 - \rho_o/\rho) = 1\ , \quad \rho = \rho_o\varepsilon_r : (\varepsilon_r - 1) = 1016\ \mathrm{kg/m^3}\ . \tag{3}$$

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

1.1.7. ***Două bile identice de masă*** m = 0,50 g ***fiecare, încărcate cu sarcini identice, sunt suspendate de fire neconductoare egale, care formează un unghi*** $2\alpha = 60^o$ ***între ele. Sistemul se cufundă în ulei de densitate egală cu densitatea bilelor şi de permitivitate*** $\varepsilon_r = 2{,}0$ ***. Aflaţi tensiunea din fire după această cufundare .***

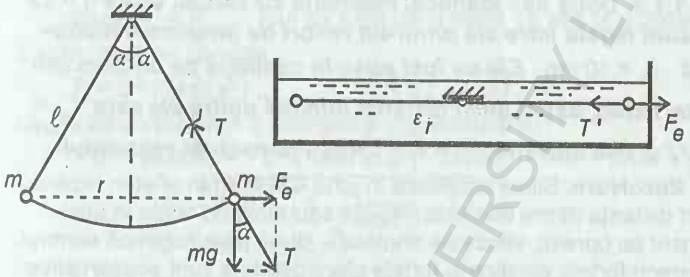


Fig.1.1.7

Rezolvare. În aer, asupra unei bile acţionează cele 3 forţe din figură. Compunem greutatea *mg* cu forţa electrostatică F_e , rezultanta lor trebule să fie egală în modul şi de sens opus cu tensiunea (condiţia de echilibru), deci

$$\operatorname{tg}\alpha = F_e : (mg) = q^2 : (4\pi\varepsilon_0 4\ell^2 \sin^2\alpha \cdot mg) . \qquad (1)$$

În ulei, deoarece densitatea bilelor este egală cu densitatea uleiului, greutatea aparentă se *anulează* şi datorită respingerii electrostatice, bilele se vor depărta la distanţa maximă, firele devenind orizontale şi condiţia de echilibru devine :

$$F_e' - T = 0 , \quad T = F_e' = q^2 : (4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r 4\ell^2) .$$

(2) Ţinând seama de (1): $T = (1/\varepsilon_r)\, mg \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = 0{,}35$ mN . (3)

1.1.8. ***Două bile având sarcini identice*** q = 3,3 μC ***sunt suspendate de fire paralele ideale la distanţa*** d = 30 cm ***între ele. Apropiind simetric o sarcină*** Q ***până la înălţimea*** h = 20 cm ***sub bile, s-a constatat că bilele rămân în echilibru cu fire de suspensie verticale. Aflaţi sarcina*** Q.

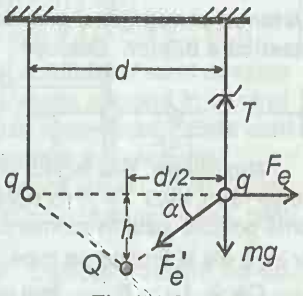


Fig.1.1.8

Rezolvare. Este evident că sarcina Q trebuie să fie de semn opus cu *q* , altfel bilele se vor depărta, deci $Q < 0$. Condiţia de *echilibru*

pe direcţia orizontală dă :

$$F_e - F_e' \cos\alpha = 0\ ,\ F_e = q^2 : (4\pi\varepsilon d^2)\ ,$$

$$F_e' = - qQ : [4\pi\varepsilon\,(h^2 + d^2/4)]\ ,\ \cos\alpha = (d/2) : \sqrt{h^2 + d^2/4}\ , \quad (1)$$

$$Q = - q\,(d^2 + 4h^2)^{3/2} : (4d^3) = - 3{,}8\ \mu C\ . \quad (2)$$

1.1.9. ***Două bile identice, încărcate cu sarcini egale*** q = 10 μC, ***sunt legate între ele printr-un resort de lungime nedeformată*** ℓ_o = 10 cm . ***Ele au fost puse în*** oscilaţie ***pe un plan orizontal neted, astfel încât distanţa minimă dintre ele este*** $\ell_m = \ell_o/2$ ***şi cea maximă*** $\ell_M = 2\,\ell_o$. ***Aflaţi constanta resortului .***

Rezolvare. Bilele oscilează în jurul CM comun aflat în repaus. Când distanţa dintre bile este *minimă* sau *maximă* bilele în acel moment se opresc, viteza se anulează, după care schimbă semnul. Deoarece forţele elastice şi forţele electrostatice sunt *conservative* (frecări neglijabile), energia cinetică plus energia potenţială (elastică şi electrostatică) se *conservă*. Scriem legea *conservării* pentru poziţiile extreme când energia cinetică este zero :

$$(1/2)k(\ell_o - \ell_m)^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon\ell_m) = (1/2)k(\ell_M - \ell_o)^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon\ell_M)\ , \quad (1)$$

de unde rezultă :

$$k = q^2 : [2\pi\varepsilon\ell_m\ell_M(\ell_m + \ell_M - 2\ell_o)] = q^2 : (2\pi\varepsilon\ell_o^3) = 36\ \text{N/m}\ . \quad (2)$$

Am folosit mai sus expresia energiei *potenţiale* de *interacţie* electrostatică a două sarcini punctiforme : $E_p = q_1q_2 : (4\pi\varepsilon r)$. (3)

1.1.10. ***Două bile de mase egale*** m ***şi raze egale*** r ***sunt încărcate cu sarcina*** q , ***respectiv*** - q . ***Una din bile este legată printr-un fir lung de un perete. Firul rezistă până la o tensiune*** T_r . ***Iniţial bilele se află la distanţa*** R ***între ele . Lăsând liber sistemul şi neglijând gravitaţia, aflaţi viteza după ciocnirea*** plastică ***a bilelor.*** *Discuţie .*

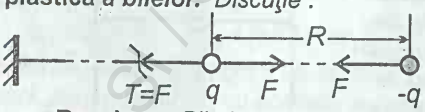


Fig.1.1.10

Rezolvare. Bila legată prin fir rămâne în repaus, cât timp firul nu se rupe, deci $T = F$ (condiţia de *echilibru*). Forţa de atracţie maximă posibilă este în momentul când bilele sunt la distanţa minimă 2*r* între ele şi firul nu se rupe: $F_{max} = q^2 : (4\pi\varepsilon \cdot 4r^2)$. (1)

Dacă $T_r > F_{max}$, firul nu se rupe şi legile de *conservare* a *energiei* şi *impulsului* dau :

$$-q^2 : (4\pi\varepsilon R) = -q^2 : (4\pi\varepsilon 2r) + (1/2)mv^2 , \qquad (2)$$

$$mv = 2mv' , \text{ (după ciocnire } T = 0) , \qquad (3)$$

de unde, eliminând v, rezultă :

$$v' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{m}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{R}\right)} . \qquad (4)$$

Dacă $T_r < F_{max}$, firul se rupe când bilele se află la o distanţă $x > 2r$, dată de condiţia :

$$T_r = q^2 : (4\pi\varepsilon x^2) , \qquad x = q : \sqrt{4\pi\varepsilon T_r} . \qquad (5)$$

Legile de *conservare a energiei şi impulsului* dau :

$$-q^2 : (4\pi\varepsilon R) = -q^2 : (4\pi\varepsilon x) + (1/2)mv^2 , \quad mv = 2mv' , \qquad (6)$$

$$v' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{m}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon T_r} - \frac{1}{R}\right)} . \qquad (7)$$

1.1.11. ***În sistemul din figură se cunosc*** $m = 10$ g , $q = 0{,}50\ \mu C$, $\ell = 10$ cm , $\alpha = 60^o$. ***Cu ajutorul unui cârlig sistemul este tras cu acceleraţia*** g . ***Aflaţi tensiunea*** T ***din fir.***

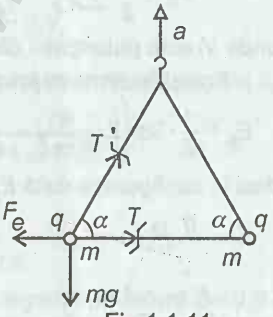


Fig.1.1.11

Rezolvare. Asupra fiecărei sarcini acţionează 4 forţe, reprezentate în figură. Scriem ecuaţia *fundamentală* a mecanicii pe care o proiectăm pe direcţiile orizontală şi verticală :

$$m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{T} + \vec{T}' = m\vec{a} \quad \rightarrow T - F_e + +$$

$$T'\cos\alpha = 0 , \quad F_e = q^2 : (4\pi\varepsilon \ell^2) , (1)$$

$$T'\sin\alpha - mg = ma , \quad T' = m(g + a) : \sin\alpha , \qquad (2)$$

$$T = F_e - T'\cos\alpha = q^2 : (4\pi\varepsilon \ell^2) - m(g + a) : \mathrm{tg}\alpha = 0{,}10 \text{ N} . \qquad (3)$$

1.1.12. ***În vârfurile unui triunghi echilateral sunt aşezate trei sarcini identice*** q . ***Ce sarcină trebuie aşezată în centrul triunghiului pentru a obţine echilibrul sistemului ? Este echilibrul stabil ? Calculaţi*** **energia potenţială** ***a sistemului .***

Rezolvare. O particulă *încărcată* aflată într-un câmp *electric* poate rămâne în *repaus* numai dacă în locul în care se află, câmpul electric este *nul* .

Aplicăm ***principiul suprapunerii*** : *Câmpul rezultant într-un punct este egal cu suma vectorială a câmpurilor produse* **separat şi independent** *de fiecare sarcină .*

ECU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În punctul unde se află sarcina Q câmpul rezultant produs de cele 3 sarcini q este nul în virtutea *simetriei*. Rămâne să calculăm câmpul din vârfurile triunghiului şi să punem condiţia de anulare .

Conform figurii avem 3 contribuţii $E_1 = E_2$ şi E_3 şi sarcina Q trebuie să fie neapărat de sens *opus* cu q (dacă toate sarcinile ar fi de acelaşi semn, sistemul s-ar dezagrega imediat):

$$2E_1\cos 30^\circ - E_3 = 0,\ E_1 = q : (4\pi\varepsilon\,\ell^2),\ E_3 = |Q| : [4\pi\varepsilon\,(\ell/\sqrt{3})^2]\ , \quad (1)$$

$$2\,[q : (4\pi\varepsilon\,\ell^2)]\,\sqrt{3}/2 = |Q| : [4\pi\varepsilon\,(\ell/\sqrt{3})^2\ ,\ \ |Q| = q/\sqrt{3}\ . \quad (2)$$

Condiţia (2) nu depinde de ℓ , sistemul rămâne în echilibru pentru orice ℓ dacă configuraţia de triunghi echilateral se păstrează, altfel echilibrul este instabil.

Energia *potenţială* a sistemului este dată de formula :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{(i\neq k)} \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon r_{ik}} = \sum \frac{1}{2} q_i V_i\ , \quad (3)$$

unde V_i este potenţialul câmpului în punctul unde se află q_i.

Folosim ultima expresie :

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot 3q\left(2\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon\ell} - \frac{q/\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon\,\ell/\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-q}{\sqrt{3}}\cdot 3\ \frac{q}{4\pi\varepsilon\,\ell/\sqrt{3}} = 0\ , \quad (4)$$

deci în configuraţia dată E_p rămâne nulă .

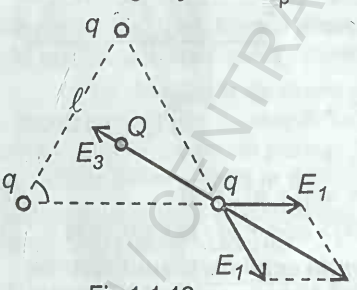


Fig.1.1.12

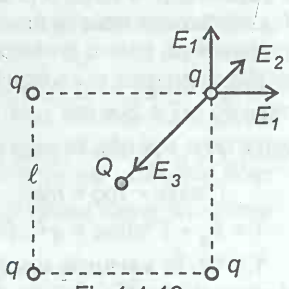


Fig.1.1.13

1.1.13. ***În vârfurile unui pătrat se găsesc sarcini identice*** q = 4,0 nC ***. Ce sarcină*** Q ***trebuie plasată în centrul pătratului pentru ca sistemul să fie în*** **echilibru** ***? Este echilibrul stabil ? Calculaţi energia potenţială a sistemului .***

Rezolvare. Sarcina Q trebuie să fie de semn *opus* lui q , altfel sarcinile de acelaşi semn s-ar respinge .

Câmpul în centrul pătratului şi în vârfurile sale trebuie să fie

nul altfel sarcinile plasate acolo ar fi supuse la forţa $q\bar{E}$ şi n-ar putea rămâne în repaus. Câmpul în centrul pătratului este evident nul în virtutea *simetriei* (dealtfel sunt 4 contribuţii de la cele 4 sarcini din vârfuri, câmpurile sarcinilor diametral opuse se anulează reciproc) .

Pentru vârful pătratului avem câmpurile individuale reprezentate în figură. Compunem cele două câmpuri E_1 care vor da $E_1\sqrt{2}$, care împreună cu E_2 trebuie să egaleze câmpul E_3 produs de Q : $E_1\sqrt{2} + E_2 = E_3$,

$E_1 = q:(4\pi\varepsilon\,\ell^2)$, $E_2 = q:[4\pi\varepsilon\,(\ell\sqrt{2})^2]$, $E_3 = |Q|:[4\pi\varepsilon\,(\ell/\sqrt{2})^2]$,(1)

$$Q = -(1/4)\,q\,(1+2\sqrt{2}\,) = -3{,}82\ \text{nC}\,, \qquad (2)$$

independent de latura pătratului .

Energia potenţială se poate calcula cu formula :

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{(i\neq k)} \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon r_{ik}} = \sum \frac{1}{2} q_i V_i \ , \qquad (3)$$

unde V_i este potenţialul câmpului în punctul unde se află sarcina q_i:

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot q\left(2\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon\ell}+\frac{q}{4\pi\varepsilon\ell\sqrt{2}}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon\,\ell/\sqrt{2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\,Q\cdot 4\,\frac{q}{4\pi\varepsilon\,\ell/\sqrt{2}} = 0\,, \qquad (4)$$

independent de ℓ . Echilibrul este instabil.

1.1.14. ***În vârfurile unui exagon regulat de latură*** ℓ = 3,0 cm ***sunt aşezate în aer, în diferite moduri posibile 3 sarcini identice pozitive*** q = 4,0 pC ***şi 3 negative*** - q . ***Aflaţi intensitatea câmpului electric în centrul exagonului .***

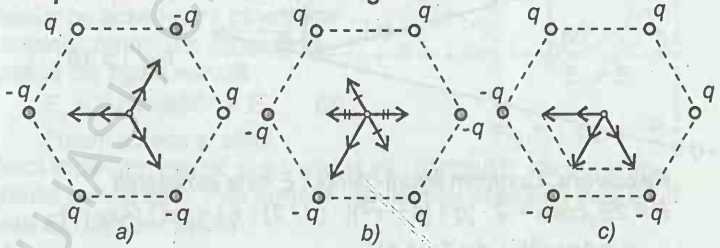


Fig.1.1.14

Rezolvare. Cazurile posibile de aşezare a sarcinilor sunt reprezentate în figură . În primul caz (a) câmpul este evident *nul.*

În al doilea caz (b) :

$$E = 2 \cdot E_1 = 2 \cdot q : (4\pi\varepsilon \ell^2) = 80 \text{ V/m} . \quad (1)$$

În al treilea caz (c) :

$$E = 2\,E_1 + 2 \cdot (2\,E_1) \cos 60^o = 4\,E_1 = 160 \text{ V/m} . \quad (2)$$

1.1.15. ***În vârfurile unui cub de latură*** ℓ = 20 cm ***se află (în aer) sarcini egale în modul*** q = 9,0 pC ***: la o bază pozitive , la cealaltă negative . Aflaţi câmpul*** E ***în centrul cubului .***

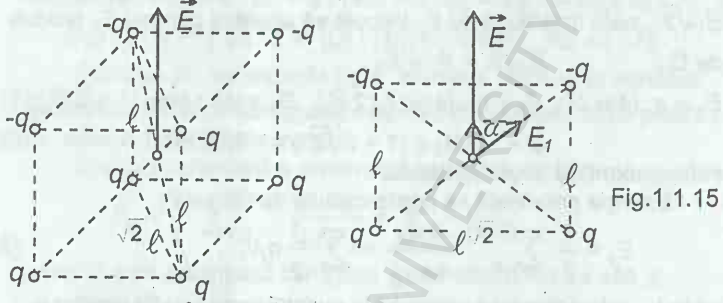


Fig.1.1.15

Rezolvare. În virtutea simetriei câmpul va fi "vertical" , ca în figură , componentele "orizontale" se distrug două câte două . Câmpul rezultant va fi deci de 8 ori contribuţia unei sarcini :

$$E = 8\,E_1 \cos\alpha = 8 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon \cdot (\ell\sqrt{3}/2)^2} \frac{\ell}{\ell\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \frac{q}{4\pi\varepsilon\ell^2} = 12 \text{ V/m}. \quad (1)$$

1.1.16. ***Distanţa dintre sarcinile uni dipol este*** d = 2,0 mm, ***iar intensitatea câmpului într-un punct situat la distanţa*** r = 10 mm ***de sarcini este*** E = 2,0 V/m . ***Aflaţi mărimea sarcinilor dipolului.***

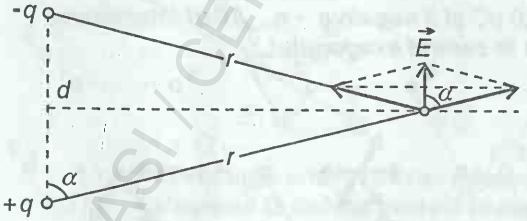


Fig.1.1.16

Rezolvare. Conform figurii câmpul E este rezultanta :

$$E = 2E_1 \cos\alpha = 2 \cdot [q : (4\pi\varepsilon r^2)] \cdot (d/2) : r) = qd : (4\pi\varepsilon r^3) ,$$

$$q = 4\pi\varepsilon r^3 E : d = 0{,}11 \text{ nC} . \quad (1)$$

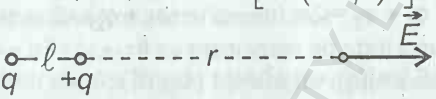
1.1.17. ***Calculaţi intensitatea câmpului electric produs de un dipol*** $\vec{p} = q\,\vec{\ell}$ ***la distanţă*** mare ***pe direcţia dipolului.***

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. Conform ***principiului suprapunerii***, *câmpul rezultant într-un punct este suma vectorială a câmpurilor produse* ***separat şi independent*** *de fiecare sarcină*, deci :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon(r+\ell)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\ell/r)^2}\right]. \qquad (1)$$

Fig.1.1.17



Deoarece $\ell/r \ll 1$, putem aplica cunoscuta formulă de aproximaţie : $(1+x)^r \cong 1 + rx$, (2)

dacă $|x| \ll 1$, $r \in \mathbf{R}$ de ordinul unităţilor.

În cazul nostru,

$$1 : (1+\ell/r)^2 = (1+\ell/r)^{-2} \approx 1 - 2\ell/r, \qquad (3)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{2\ell}{r} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon r^3}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon r^3}. \qquad (4)$$

1.1.18. ***Două laturi ale unui triunghi echilateral sunt încărcate uniform şi identic, creând în centrul triunghiului un potenţial*** V_o ***şi un câmp*** E_o. ***Aflaţi potenţialul şi câmpul creat în centrul triunghiului de o singură latură.***

Rezolvare. Ţinând seama de principiul *suprapunerii* şi de simetria sistemului, rezultă evident :

$V_o = V_1 + V_1$, $V_1 = V_o/2$. (1)

Câmpul E_1 produs de o singură latură trebuie să fie perpendicular pe acea latură în virtutea *simetriei*. Atunci din construcţia grafică din figură rezultă :

$E_o = 2E_1\cos 60^o = E_1$. (2)

Putem judeca şi altfel.

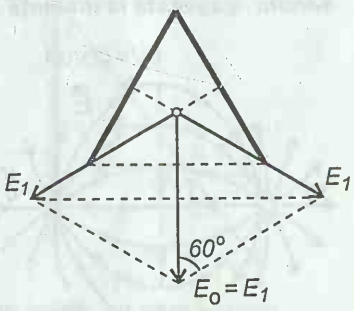


Fig.1.1.18

Dacă încărcăm identic şi a treia latură, câmpul în centrul triunghiului devine zero. Prin urmare, contribuţia acestei a treia laturi este E_o (de sens opus).

1.1.19. ***Două bile identice, situate la o anumită distanţă între ele, se atrag cu o anumită forţă. Aducându-le în contact şi apoi depărtându-le la*** aceeaşi ***distanţă, se constată că bilele se***

resping cu o forţă egală cu cea precedentă de atracţie. Aflaţi raportul sarcinilor bilelor.

Rezolvare. Sarcinile trebuie sa fie de semn *opus*.În primul caz:

$$F = q_1 q_2 : (4\pi\varepsilon r^2) < 0 . \qquad (1)$$

Prin punerea bilelor în contact sarcinile lor vor deveni egale şi din conservarea *sarcinii* rezultă :

$$q_1 + q_2 = 2\,q' , \quad q' = (q_1 + q_2)/2 . \qquad (2)$$

Atunci forţa de respingere va fi :

$$F' = [(q_1 + q_2)^2/4] : (4\pi\varepsilon r^2) . \qquad (3)$$

Punând condiţia $F = F'$ găsim ecuaţia de gradul 2 :

$$q_1^2 + 6q_1q_2 + q_2^2 = 0 \qquad (4)$$

care este *simetrică* în $q_{1,2}$:

$$(q_1/q_2)^2 + 6(q_1/q_2) + 1 = 0 \text{ sau } (q_2/q_1)^2 + 6(q_2/q_1) + 1 = 0 \qquad (5)$$

cu soluţiile : $$q_1/q_2 = -3 \pm \sqrt{8} . \qquad (6)$$

Cele două rădăcini sunt de fapt *reciproce* (produsul lor este 1), este indiferent care sferă este *1* şi care este *2* .

1.1.20. ***Două sarcini*** + q , - q ***sunt situate la distanţa*** d ***între ele. a) Calculaţi potenţialul punctelor de pe planul mediator al celor două sarcini. b) Calculaţi forţa ce se exercită asupra unei sarcini*** q ***aşezată la distanţa*** r ***de un plan*** **conductor infinit.**

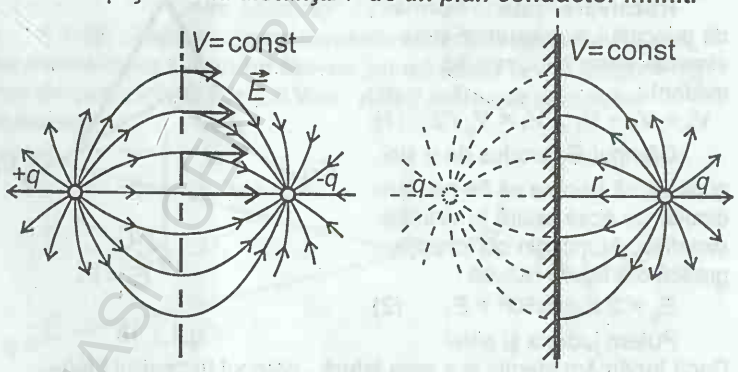


Fig.1.1.20

Rezolvare. a) Din *simetria* problemei se vede imediat că planul *mediator* este un plan *echipotenţial* fiindcă liniile de câmp sunt *perpendiculare* pe plan. Dealtfel, în baza principiului *suprapunerii*, potenţialul punctelor planului este *zero* .

b) Deoarece *toate punctele unui* ***conductor, în electrostatică, au acelaşi potenţial, deci suprafaţa sa este o suprafaţă echipotenţială*** , liniile de câmp trebuie să fie *perpendiculare* pe această suprafaţă, ca în figură. Dar acest lucru se poate obţine, în mod echivalent (pentru semispaţiul drept), cu ajutorul unei sarcini "*imagine*" $-q$ ("*metoda* ***imaginilor***") şi atunci asupra sarcinii q se va exercita o *forţă de atracţie către planul* ***conductor*** :

$$F = -q^2 : (4\pi\varepsilon r^2) .$$

1.1.21. ***În unghiul diedru drept , format de două semiplane conductoare, se află o sarcină*** q ***la egală distanţă*** r ***de semiplane . Ce forţă se exercită asupra sarcinii ?***

Rezolvare. Vom folosi *principiul* ***suprapunerii*** şi "*metoda* ***imaginilor***" de la problema precedentă 1.1.20.

Putem realiza potenţial *constant* (= 0) pe semiplanele *conductoare* cu ajutorul sarcinilor "*imagine*" din figură .

Atunci asupra sarcinii date vor acţiona 3 forţe a căror rezultantă va fi orientată spre linia de intersecţie a semiplanelor :

$$F = \sqrt{2}\cdot\{q^2 : [4\pi\varepsilon (2r)^2]\} - q^2 : [4\pi\varepsilon (2r\sqrt{2})^2] =$$
$$= (2\sqrt{2} - 1)\cdot q^2 : (32\pi\varepsilon r^2) .$$

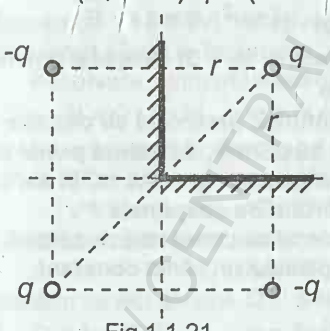


Fig.1.1.21

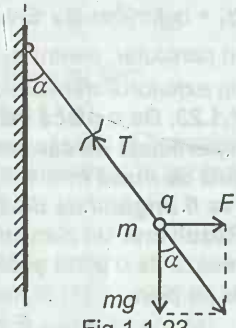


Fig.1.1.23

1.1.22. ***Două sfere conductoare goale, cu pereţi foarte subţiri, de raze*** $R_{1,2}$ ***, sunt aşezate*** **concentric** $(R_1 < R_2)$ ***şi au potenţialele*** $V_{1,2}$ ***. Aflaţi : a) Sarcinile de pe sfere*** $q_{1,2}$ ***. b) Potenţialul şi câmpul la distanţa*** r ***de centrul sferelor.***

Caz particular : ***Sfera exterioară*** R_2 ***pusă la pământ .***

Rezolvare. *În* ***interiorul*** *unei sfere* ***conductoare*** *câmpul este* ***nul,*** *iar potenţialul este* ***constant*** *; în* ***exterior*** *câmpul şi potenţialul sunt la fel ,* ***ca şi cum*** *sarcina sferei ar fi concentrată în centrul ei.*

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Principiul suprapunerii *: Câmpul (şi potenţialul) într-un punct este egal cu suma vectorială (respectiv algebrică) a câmpurilor (potenţialelor) produse* ***separat şi independent*** *de fiecare sarcină .*

a) Vom aplica aceste două teoreme. Potenţialul pe suprafaţa (şi în interiorul) sferei R_1 se compune din potenţialul produs de propria sarcină q_1 şi din potenţialul produs de sarcina q_2 în interiorul sferei R_1 :

$$V_1 = q_1 : (4\pi\varepsilon R_1) + q_2 : (4\pi\varepsilon R_2). \qquad (1)$$

Potenţialul sferei R_2 se compune din potenţialul produs de q_1 în *exteriorul* sferei R_1 şi din potenţialul produs de propria sarcină q_2 :

$$V_2 = q_1 : (4\pi\varepsilon R_2) + q_2 : (4\pi\varepsilon R_2). \qquad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă : $q_1 = 4\pi\varepsilon (V_1 - V_2) R_1 R_2 : (R_2 - R_1)$,

$$q_2 = 4\pi\varepsilon (V_2 R_2 - V_1 R_1) R_2 : (R_2 - R_1) . \qquad (3)$$

b) În virtutea *simetriei sferice* câmpul este *radial*. Aplicând cele două teoreme, avem analog :

$V = V_1$, $E = 0$ dacă $r < R_1$,

$V = q_1 : (4\pi\varepsilon r) + q_2 : (4\pi\varepsilon R_2)$, $E = q_1 : (4\pi\varepsilon r^2)$ dacă $r \in (R_1, R_2)$,

$V = (q_1 + q_2) : (4\pi\varepsilon r)$, $E = (q_1 + q_2) : (4\pi\varepsilon r^2)$ dacă $r > R_2$. (3)

In particular, pentru $q_1 = - q_2$ (atunci $V_2 = 0$) câmpul şi potenţialul în *exteriorul* sferelor vor fi *nule* .

1.1.23. ***De o placă verticală*** **infinită,** ***încărcată cu densitatea superficială de sarcină*** $\sigma = 8{,}85\ \mu C/m^2$ ***, se atârnă printr-un fir o bilă de masă*** $m = 1{,}00$ g ***şi de sarcină*** $q = 19{,}6$ nC ***în aer . Care va fi unghiul de deviere al firului de suspensie ?***

Rezolvare. Un plan *infinit*, încărcat cu densitatea de sarcină σ , creează de o parte şi de alta a planului un câmp ***constant***, normal pe plan :

$$E = \sigma : (2\varepsilon) . \qquad (1)$$

Rezultatul se poate obţine elegant cu ajutorul *teoremei* lui ***Gauss*** sau ştiind că în *exteriorul* unui condensator plan-paralel ideal câmpul este nul, iar în *interior* este rezultatul suprapunerii câmpurilor produse ***separat şi independent*** de fiecare armătură :

$$E = U / d = Q / (\varepsilon S) = \sigma / \varepsilon = 2 \cdot \sigma / (2\varepsilon) . \qquad (2)$$

Asupra bilei acţionează cele 3 forţe reprezentate în figură . Rezultanta forţelor F şi mg trebuie să fie egală în modul şi de sens opus cu tensiunea T , prin urmare :

$$\operatorname{tg}\alpha = F : (mg) = qE : (mg) = q\sigma : (mg \cdot 2\varepsilon) = 1{,}00 \ ; \ \alpha = 45^o. \qquad (1)$$

Se putea scrie condiţia de *echilibru* pentru *momente*, luate faţă de punctul de suspensie (atunci T nu dă moment) :

$$F \cdot \ell \cos\alpha - mg\,\ell \sin\alpha = 0 \,. \qquad (2)$$

1.1.24. ***Cu ce forţă pe unitatea de arie se resping două plăci paralele,*** **infinite,** ***în aer, încărcate cu densităţile de sarcină*** $\sigma_1 = 2{,}00\ \mu C/m^2$, $\sigma_2 = 8{,}85\ \mu C/m^2$ ***?***

Rezolvare. O sarcină *punctiformă* q situată într-un punct unde câmpul electric este $\vec{E}$ va fi supusă la forţa electrică $\vec{F} = q\,\vec{E}$. O sarcină *oarecare* Q situată într-o regiune unde câmpul este **constant** $\vec{E}$ va fi supusă, la fel, la o forţă electrică $\vec{F} = Q\,\vec{E}$.

Vom considera întâi că prima placă este finită, are sarcina Q_1 pe suprafaţa S_1 , şi deci se află în câmpul **constant** produs de cealaltă placă infinită . Forţa exercitată asupra plăcii *1* va fi atunci: $F_1 = Q_1 \cdot \sigma_2 / (2\varepsilon)$, $f_1 = F_1 / S_1 = (Q_1 / S_1) \cdot \sigma_2 / (2\varepsilon) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 / (2\varepsilon)$.(1)

Acum n-avem decât să mărim dimensiunile plăcii *1* păstrând densitatea de sarcină σ_1 neschimbată şi obţinem răspunsul cerut :

$$f^* = \sigma_1\, \sigma_2 / (2\varepsilon) = 1{,}00\ N/m^2 \,. \qquad (2)$$

1.1.25. ***O sferă de rază*** R = 20 mm ***este încărcată până la un potenţial*** V = - 2,0 kV ***. Aflaţi masa tuturor electronilor transferaţi sferei la încărcare.***

Rezolvare. Numărul electronilor şi masa lor sunt :

$$N = Q : (-e) \,, \quad m = N\, m_e = Q m_e : (-e) \,. \qquad (1)$$

Reamintim că în ***exteriorul*** unei sfere câmpul şi potenţialul sunt ***la fel ca şi cum*** sarcina sferei ar fi concentrată în *centrul* ei :

$$V = Q : (4\pi\varepsilon\, r) \,, \quad E = Q : (4\pi\varepsilon\, r^2) \,, \qquad r \geq R \,, \qquad (2)$$

în particular potenţialul ***sferei*** înseşi:

$$V = Q : (4\pi\varepsilon\, R) \,, \quad r = R \,. \qquad (3)$$

Scoatem de aici sarcina Q şi o introducem în (1) :

$$Q = 4\pi\varepsilon\, R\, V \,, \qquad m = 4\pi\varepsilon\, R\, V\, m_e : (-e) = 25\ ag \,. \ (4)$$

1.1.26. ***Un număr*** N = 27 ***picături de apă de rază*** r = 1,00 mm ***şi sarcină*** q = 100 pC **fiecare ,** ***se contopesc într-o singură picătură. Aflaţi potenţialul picăturii rezultate.***

Rezolvare. Fie Q - sarcina şi R - raza picăturii rezultate. Atunci potenţialul ei va fi $V = Q : (4\pi\varepsilon R)$ (1) (şi ***nu*** $N V_1$, unde V_1 este potenţialul *iniţial* al unei picături individuale !). Sarcina $Q = Nq$, iar raza R se obţine din formula volumului unei sfere :

$(4\pi/3)R^3 = N \cdot (4\pi/3)r^3 \;\rightarrow\; R = r\sqrt[3]{N}$. (2) Prin urmare, $V = Nq : (4\pi\varepsilon r\sqrt[3]{N}) = 8{,}1$ kV . (3)

1.1.27. ***O sferă de rază*** R = 10,0 cm ***are potenţialul*** V = 10,0 kV ***în aer. Aflaţi densitatea superficială de sarcină de pe sferă .***

Rezolvare. Potenţialul unei sfere este

$V = Q : (4\pi\varepsilon R)$, deci $Q = 4\pi\varepsilon R V$, (1)

$\sigma = Q : S = Q : (4\pi R^2) = \varepsilon V : R = 0{,}88\ \mu C/m^2$. (2)

1.1.28. ***Aflaţi potenţialul*** **maxim** ***până la care poate fi încărcată în aer o sferă de rază*** R = 0,10 m , ***ştiind că la presiunea atmosferică normală descărcarea în aer se produce la un câmp electric minim*** E_o = 3,0 MV/m .

Rezolvare. *În* ***exteriorul*** *unei sfere potenţialul şi câmpul sunt* ***la fel ca şi cum*** *sarcina sferei ar fi concentrată în* ***centrul*** *sferei* :

$V = Q : (4\pi\varepsilon r)$, $E = Q : (4\pi\varepsilon r^2)$, $r \geq R$. (1)

Câmpul este maxim la suprafaţa sferei unde apare deci pericolul descărcării :

$E_{max} = Q : (4\pi\varepsilon R^2) = E_o$, $Q = 4\pi\varepsilon R^2 E_o$,

$V_{max} = Q : (4\pi\varepsilon R) = R E_o = 300$ kV . (2)

1.1.29. ***Până la ce potenţial*** **maxim** ***(în modul) se poate încărca un conductor izolat, îndreptând spre el un fascicul de electroni cu viteza*** v = 8,0 Mm/s ***?***

Rezolvare. Pe măsură ce electronii se apropie de conductorul încărcat (cu electroni), ei întâmpină o forţă de respingere din ce în ce mai mare (din partea electronilor de pe conductor) şi sunt deci *frânaţi*. Energia lor cinetică scade pentru a efectua lucru mecanic împotriva forţei de respingere. La *limită*, energia lor cinetică dispare, efectuându-se lucrul mecanic L' împotriva forţei electrice de respingere. Reamintim că lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului la deplasarea unei sarcini q este

$L = q(V_A - V_B) = -L'$, (1)

unde L' este lucrul mecanic efectuat din *exterior* împotriva forţelor câmpului : $(1/2)mv^2 = L' = -L = -(-e)(0 - V) = -eV$,

$V = -mv^2 : (2e) = -182$ V . (2)

1.1.30. ***Un mic corp de masă*** m = 1,0 g ***şi sarcină*** q =1,0 μC ***lunecă din repaus , fără frecare, de la înălţimea*** h = 3,0 m ***pe un plan înclinat de unghi*** $\alpha = 60^o$ ***. În unghiul drept al planului înclinat se află o sarcină fixă*** Q = - 2,0 μC. ***Care va fi viteza corpului la baza planului înclinat ?***

Rezolvare. Deoarece nu avem forţe de frecare (disipative), **energia** cinetică şi potenţială se *conservă*. Amintim că energia *potenţială* de interacţie *electrostatică* a două sarcini este :

$$E_p = q_1 q_2 : (4\pi\varepsilon r) . \qquad (1)$$

Scriem deci legea de *conservare a energiei* :

$$mgh + qQ : (4\pi\varepsilon h) = (1/2)\, mv^2 + qQ : (4\pi\varepsilon h / \mathrm{tg}\alpha) , \quad (2)$$

$$v^2 = 2gh + 2qQ(1 - \mathrm{tg}\alpha) : (4\pi\varepsilon hm) = 82{,}8\ \mathrm{m^2/s^2} , \quad v = 9{,}1\ \mathrm{m/s} . \qquad (3)$$

1.1.31. ***Două sarcini*** $q_1 = 1{,}00$ nC , $q_2 = -10{,}0$ nC ***sunt situate la distanţa*** $d = 55$ cm ***între ele. Aflaţi : a) Intensitatea câmpului electric în punctele unde potenţialul este*** nul, ***pe linia care uneşte sarcinile. b) Potenţialul în punctul unde*** câmpul ***este nul .***

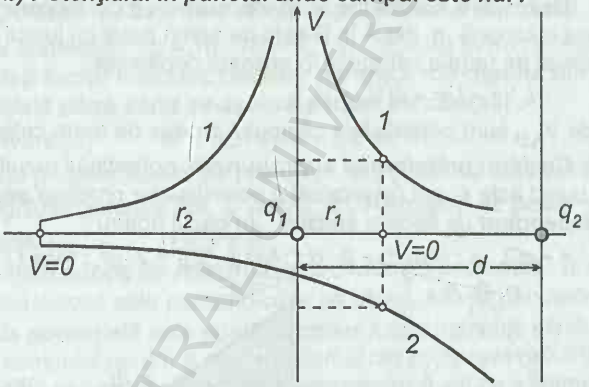


Fig.1.1.31

Rezolvare. Notăm cu r distanţa de la q_1 până la punctul unde se *anulează potenţialul* . Atunci ţinând seama că $|q_2| > q_1$ şi că punctul căutat este între sarcini sau în afara lor, avem condiţia :

$$q_1 : (4\pi\varepsilon r) + q_2 : [4\pi\varepsilon (d \mp r)] = 0 \ \rightarrow$$

$$r_{1,2} = d \cdot q_1 : (|q_2| \pm q_1) = 5{,}5 \text{ cm , respectiv } 6{,}11 \text{ cm} . \qquad (1)$$

Câmpul în aceste puncte este respectiv :

$$E_1 = q_1 : (4\pi\varepsilon r_1^2) + |q_2| : [4\pi\varepsilon (d - r_1)^2] =$$

$$= (q_1 - q_2)^3 : [4\pi\varepsilon d^2 q_1 (-q_2)] = 3{,}96\ \mathrm{kV/m} ,$$

$$E_2 = -q_1 : (4\pi\varepsilon r_2^2) + |q_2| : [4\pi\varepsilon (d + r_2)^2] =$$

$$= (q_1 + q_2)^3 : [4\pi\varepsilon d^2 q_1 (-q_2)] = -2{,}17\ \mathrm{kV/m} .$$

Câmpurile între sarcini sunt în acelaşi sens, deci nu pot da zero. Câmpul se poate anula în afara sarcinilor, de partea sarcinii mai slabe :

$$-q_1 : (4\pi\varepsilon r^2) + |q_2| : [4\pi\varepsilon (d + r)^2] = 0 \rightarrow$$

$$r = d\sqrt{q_1} : \left(\sqrt{-q_2} - \sqrt{q_1}\right) = 25{,}4 \text{ cm}. \qquad (3)$$

Potenţialul în acest punct va fi :

$$V = q_1 : (4\pi\varepsilon r) + q_2 : [4\pi\varepsilon (d + r)] =$$

$$= \left(\sqrt{-q_2} - \sqrt{q_1}\right)^2 : (4\pi\varepsilon d) = 76 \text{ V}. \qquad (4)$$

1.1.32. ***Trei sarcini identice*** q = 1,00 μC ***sunt aşezate în aer în vârfurile unui triunghi*** **echilateral** ***de latură*** ℓ = 20 cm ***. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a deplasa una din sarcini până în mijlocul dreptei care uneşte celelalte două sarcini ?***

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat din *exterior* pentru a deplasa o sarcină q din A în B este de semn *opus* cu lucrul mecanic efectuat de forţele *câmpului* în această deplasare :

$$L' = -L = -q(V_A - V_B), \qquad (1)$$

unde $V_{A,B}$ sunt potenţialele câmpului produs de toate *celelalte* sarcini. Conform ***principiului suprapunerii***, *potenţialul rezultant într-un punct este suma (algebrică) a potenţialelor produse* ***separat şi independent*** *de fiecare sarcină* . În cazul nostru :

$$L' = -q[2 \cdot q : (4\pi\varepsilon \ell) - 2 \cdot q : (4\pi\varepsilon \ell / 2)] = 2 \cdot q^2 : (4\pi\varepsilon \ell) = 90 \text{ mJ}.$$

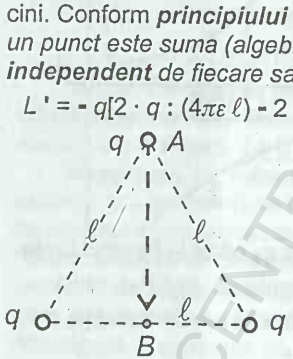


Fig.1.1.32

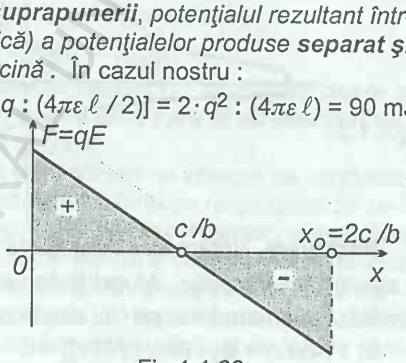


Fig.1.1.33

1.1.33. ***O particulă cu sarcina specifică*** q / m > 0 ***porneşte din repaus din originea axei*** Ox ***sub acţiunea câmpului electric*** E = c - bx , ***unde*** c , b ***sunt*** **constante** ***pozitive date. Aflaţi punctul unde particula se opreşte şi acceleraţia ei acolo .***

Rezolvare. După cum se ştie, lucrul mecanic efectuat de o forţă orientată pe *direcţia* mişcării este egal cu ***aria*** mărginită de *graficul* forţei F (*x*) . (Când forţa este de sens *opus* deplasării, deci negativă, lucrul mecanic este *negativ* , aria va fi ***sub*** axa *Ox* şi trebuie considerată *negativă*).

Conform figurii în punctul c / b , câmpul şi forţa se anulează, după care schimbă semnul ; pe segmentul (0 , $2c / b$) lucrul mecanic total efectuat este zero (se compensează ariile triunghiulare haşurate) şi deci , conform *teoremei energiei cinetice*, variaţia energiei cinetice este zero, şi cum iniţial viteza era zero, rezultă că în punctul $x_0 = 2c / b$ viteza se *anulează* (particula este accelerată pe porţiunea (0, c / b) , apoi frânată). Acceleraţia în acest punct este $a = F / m = q(c - bx_0) / m = - (q / m)\, c < 0$.

1.1.34. ***Un dipol electric de moment*** $\vec{p} = q\vec{\ell}$ ***este aşezat într-un câmp electric*** $\vec{E}$ ***sub unghiul*** α ***faţă de câmp. Stabiliţi : a) Expresia momentului cuplului de forţe care acţionează asupra dipolului, b) Expresia energiei*** potenţiale ***a dipolului.*** *c) Aplicaţie numerică :* $p = 16 \cdot 10^{-30}$ C · m , $E = 20$ kV/m , $\alpha = 60^o$. ***d) Calculaţi lucrul mecanic necesar pentru a roti dipolul din poziţia iniţială până când se aşează*** paralel ***cu câmpul .***

Rezolvare. a) $M = qE\ell \sin\alpha = pE \sin\alpha$. (1)

Direcţia este *perpendiculară* pe planul ($\vec{p}$, $\vec{E}$) şi sensul este dat de regula burghiului pentru a roti $\vec{p}$ către $\vec{E}$. Rezultatul se poate scrie vectorial : $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. (2)

b) Alegem *poziţia de referinţă* pentru energia *potenţială* $\alpha = \pi / 2$, când dipolul este *perpendicular* pe câmp. Atunci *prin definiţie, energia potenţială este egală cu minus lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pentru a aduce sistemul din poziţia de referinţă în poziţia dată sau cu plus lucrul mecanic pentru a aduce sistemul în poziţia de referinţă* :

$$E_p = - L_{\pi/2 \to \alpha} = + L_{\alpha \to \pi/2} \cdot \quad (3)$$

Conform figurii , deplasarea sarcinilor pe *direcţia* forţei la rotirea dipolului până în poziţia de referinţă este $\ell \cos\alpha$ (în sens opus forţei), deci $E_p = - qE\ell \cos\alpha = - pE\cos\alpha = - \vec{p}\,\vec{E}$. (4)

c) *Aplicaţia* numerică :

$M = pE\sin\alpha = 27{,}7 \cdot 10^{-26}$ N·m, $E_p = - pE\cos\alpha = - 16 \cdot 10^{-26}$ J. (5)

d) *Lucrul mecanic* efectuat asupra dipolului este egal cu creşterea energiei *potenţiale* a dipolului :

$L' = \Delta E_p = - pE - (- pE\cos\alpha) = pE(\cos\alpha - 1) = - 16 \cdot 10^{-26}$ J . (6)

Altfel spus, câmpul efectuează lucru mecanic pozitiv $L = - L' = - \Delta E_p$, dipolul rotindu-se în poziţia de echilibru (cu E_p *minimă*).

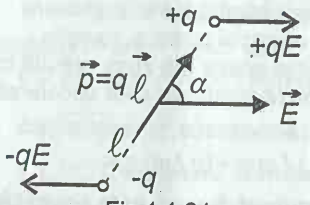


Fig.1.1.34

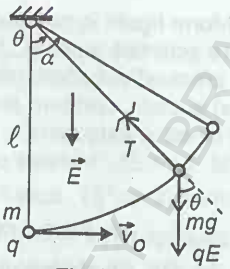


Fig.1.1.35

1.1.35. ***Pentru pendulul simplu gravitaţional din figură se cunosc :*** m = 10,0 g , ℓ = 1,00 m, q = 1,00 μC , E = 10,0 kV/m ***(vertical în jos). I se comunică bilei viteza orizontală*** v_o = 1,00 m/s. ***Aflaţi : a) Amplitudinea oscilaţiilor , b) Tensiunea din fir la un unghi de deviere*** θ .

Rezolvare. a) Pentru poziţia deviată cu unghiul θ scriem *lex secunda* proiectată pe direcţia centripetă :

$$T - (mg + qE)\cos\theta = mv^2 / \ell. \qquad (1)$$

Scriem *conservarea energiei* cinetice şi potenţiale (gravitaţionale şi electrostatice) pentru cele 3 poziţii :

$$(1/2)\,mv_o^2 = (1/2)\,mv^2 + (mg + qE)(\ell - \ell\cos\theta) =$$

$$= (mg + qE)(\ell - \ell\cos\alpha), \qquad (2)$$

unde *variaţia energiei potenţiale electrostatice este egală cu minus lucrul mecanic al forţei electrostatice* .

Din ultima ecuaţie rezultă amplitudinea unghiulară a oscilaţiilor:

$$\cos\alpha = 1 - v_o^2 : [2(g + qE/m)\,\ell\,] \quad \text{sau}$$

$$\sin(\alpha/2) = (1/2)\,v_o : \sqrt{(g + qE/m)\ell}\ , \quad \alpha = 17^o\,30\,'. \qquad (3)$$

b) Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă prin eliminarea lui v^2 :

$$T = mv_o^2 / \ell + (mg + qE)(3\cos\theta - 2) =$$

$$= (mg + qE)(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\,, \qquad (4)$$

rezultat care se putea scrie dintr-o dată dacă ştim tensiunea din fir la pendulul simplu gravitaţional :

$$T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\,, \qquad (5)$$

în care apare câmpul echivalent $g + qE/m$.

1.1.36. ***Până la ce distanţă minimă se poate apropia de un nucleu de radiu*** $^{226}Ra_{88}$ ***o particulă*** $^{4}\alpha_2$ ***având energia cinetică*** E_c = 4,77 MeV ***?***

Rezolvare. Nucleul de radiu are *numărul de masă* 226 faţă de 4 al particulei α, deci fiind mult mai greu rămâne practic în repaus. Particula α se va mişca *încetinit,* fiind respinsă de nucleul pozitiv Ra . Energia cinetică a particulei α dispare transformându-se în energie potenţială de interacţie electrostatică. Reamintim *formula energiei potenţiale de interacţie electrostatică a două sarcini :*

$$E_p = q_1 q_2 : (4\pi\varepsilon r) . \qquad (1)$$

În cazul nostru sarcinile sunt $q_1 = Z_1 e$, $(Z_1 = 4)$, $q_2 = Z_2 e$, $(Z_2 = 88)$. Scriem deci legea *conservării energiei* (la distanţă *mare* energia potenţială de interacţie electrostatică este neglijabilă) : $E_c = (1/2) Z_1 Z_2 e^2 : (4\pi\varepsilon r_{min})$, $r_{min} = (1/2)\, Z_1 Z_2 e^2 : (4\pi\varepsilon E_c) = 53$ fm.

1.1.37. ***Până la ce distanţă*** **minimă** ***se pot apropia unul de altul doi*** **protoni** ***având viteze egale în modul şi de sens opus*** v = 23,5 Mm/s *?*

Rezolvare. Deoarece particulele sunt *identice* şi au viteze iniţiale *egale* în modul, ele se frânează reciproc şi în momentul când distanţa dintre ele este *minimă*, particulele se *opresc*, deci toată energia lor cinetică dispare transformându-se în energia potenţială de interacţie electrostatică :

$$2 \cdot (1/2)\, m v^2 = e^2 : (4\pi\varepsilon r_{min}), \quad r_{min} = e^2 : (4\pi\varepsilon m v^2) = 0{,}25 \text{ fm}$$

(pentru distanţa iniţială mare $E_p \to 0$).

1.1.38. ***Până la ce distanţă*** **minimă** ***se poate apropia o particulă*** $^4\alpha_2$ ***cu energia cinetică*** $E_c = 1{,}53$ MeV ***de un nucleu de azot*** $^{14}N_7$ *?*

Rezolvare. În momentul apropierii *maxime* (distanţei *minime*), viteza *relativă* a unei particule faţă de cealaltă se anulează (altfel ele ar continua să se apropie) şi apoi schimbă semnul. Dar viteza relativă este egală cu ***diferenţa*** *vitezelor*, prin urmare în momentul apropierii *maxime* cele două particule au viteze *egale*, altfel spus, au aceeaşi viteză comună, ca la ciocnirea *plastică* .

Scriem *conservarea impulsului* total :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \qquad (1)$$

şi calculăm *scăderea* energiei cinetice a celor două particule :

$$- \Delta E_c = (1/2) m_1 v_1^2 + (1/2) m_2 v_2^2 - (1/2)(m_1 + m_2) v'^2 =$$

$$= (1/2)\, [m_1 m_2 : (m_1 + m_2)]\, (v_1 - v_2)^2 \ , \qquad (2)$$

rezultat binecunoscut de la ciocnirea *plastică* din mecanică .

Formula (2) reprezintă energia cinetică "relativă" care dispare în momentul apropierii maxime, transformându-se în energie poten-

ţială de interacţie electrostatică :

$(1/2)\,[m_1m_2 : (m_1 + m_2)]\,(v_1 - v_2)^2 = q_1q_2 : (4\pi\varepsilon\, r_{min})$.

În cazul nostru $v_2 = 0$ şi $E_c = (1/2)m_1v_1^2$, astfel încât

$E_c \cdot m_2 : (m_1 + m_2) = q_1q_2 : (4\pi\varepsilon\, r_{min})$,

$$r_{min} = q_1q_2(m_1 + m_2) : (4\pi\varepsilon\, E_c m_2) = 16{,}9 \text{ fm} . \qquad (4)$$

1.1.39. ***Evaluaţi temperatura necesară pentru ca într-un "gaz" format din protoni, aceştia să se poată apropia între ei până la o distanţă*** $r_o = 5{,}0$ fm ***(circa 3 diametre protonice) .***

Rezolvare. La *echilibru termic* într-un gaz energia cinetică **medie** de *translaţie* a particulelor este

$$\frac{1}{2}\,m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\,kT . \qquad (1)$$

Considerând cazul simetric, când protonii vin unul spre celălalt cu viteze egale în modul, în momentul distanţei *minime* ei se *opresc* şi energia lor cinetică trece în energia potenţială de interacţie electrostatică : $2 \cdot (1/2)mv^2 = e^2 : (4\pi\varepsilon_o r_{min}) = 3\,kT$,

$$T = e^2 : (3 \cdot 4\pi\varepsilon_o k r_o) \cong 1{,}1 \cdot 10^9 \text{ K} . \qquad (2)$$

1.1.40. ***Se dau două sarcini fixe :*** $n^2q > 0$, $(n \geq 1)$ ***şi*** $-q$ ***, situate la distanţa*** d ***între ele. Ce viteză minimă trebuie să aibă la distanţă foarte mare o particulă de masă*** m ***şi sarcină*** $+q$ ***, astfel încât venind pe dreapta ce uneşte sarcinile date, în sensul de la*** $-q$ ***spre*** n^2q ***, să poată ajunge la sarcina*** $-q$ ***?***

Reprezentaţi energia potenţială a particulei q ***în funcţie de distanţa ei până la sarcina*** n^2q.

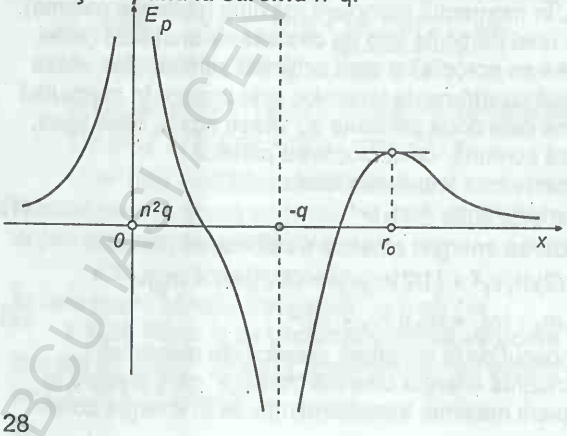


Fig.1.1.40

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Rezolvare. Forţa care se exercită asupra sarcinii q (r - distanţa particulei q până la particula n^2q) :

$$F = n^2q^2 : (4\pi\varepsilon r^2) - q^2 : [4\pi\varepsilon(r - d)^2] . \quad (1)$$

Se vede că la distanţe foarte *mari* , $F > 0$ (*respingere*), iar când particula q se apropie de (- q) predomină *atracţia* .

Forţa se *anulează* pentru :

$$n^2q^2 : (4\pi\varepsilon r^2) - q^2 : [4\pi\varepsilon(r - d)^2] = 0 \rightarrow r_0 = nd : (n - 1) . \quad (2)$$

Dacă particula q ajunge în punctul P (r_0), mai departe va merge singură fiind atrasă de (- q) , prin urmare , la *limită* avem bilanţul *energetic* :

$$(1/2)mv^2 = n^2q^2 : (4\pi\varepsilon r_0) - q^2 : [4\pi\varepsilon(r_0 - d)] = (n - 1)^2q^2 : (4\pi\varepsilon d) ,$$

de unde $v = (n - 1)q : \sqrt{2\pi\varepsilon md}$. (3)

Energia potenţială a particulei q este

$$E_p = qV = n^2q^2 : (4\pi\varepsilon|x|) - q^2 : [4\pi\varepsilon|x - d|] \quad (4)$$

şi $E_p \rightarrow \mp \infty$ în dreptul particulei (- q), respectiv n^2q .

Forţa se *anulează* acolo unde energia *potenţială* are un *extrem.* Acolo unde $F = 0$ avem o poziţie de *echilibru* , care este stabil sau instabil după cum E_p este acolo minimă sau maximă .

1.1.41. ***Două particule identice de masă*** m = 0,90 g ***şi sarcină*** q = 1,00 μC ***se află iniţial în repaus la distanţa*** r = 10,0 cm ***una de alta. Întâi se lasă liberă una din particule şi când aceasta se depărtează până la distanţa*** R = 20 cm ***se lasă liberă şi cealaltă particulă. Aflaţi vitezele finale ale particulelor după un timp foarte lung .***

Rezolvare. Scriem legea de *conservare a energiei* cinetice şi potenţiale (electrostatice). Pentru prima parte a mişcării :

$$q^2 : (4\pi\varepsilon r) = (1/2)mv_0^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon R) \rightarrow$$

$$v_0^2 = [q^2 : (2\pi\varepsilon m)] (1 / r - 1 / R) . \quad (1)$$

Pentru partea a doua a mişcării, sistemul fiind liber, scriem *conservarea impulsului şi a energiei :* $mv_0 = mv_1 + mv_2$, (2)

$$(1/2)mv_0^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon R) = (1/2)mv_1^2 + (1/2)mv_2^2 . \quad (3)$$

Ţinând seama de (1), retranscriem aceste relaţii :

$$v_0 = v_1 + v_2 , \quad v_1^2 + v_2^2 = 2\,q^2 : (4\pi\varepsilon mr) . \quad (4)$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 = 2\,q^2 : (4\pi\varepsilon mr) \rightarrow$$

$$v_1v_2 = (1/2)\,v_0^2 - q^2 : (4\pi\varepsilon mr) . \quad (5)$$

Având suma şi produsul vitezelor, găsim vitezele :

$$v_{1,2} = \frac{S}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - 4P} = \frac{1}{2}\left[v_o \mp \sqrt{v_o^2 - 2v_o^2 + q^2/(\pi\varepsilon mr)}\right] =$$

$$= \frac{q}{2\sqrt{2\pi\varepsilon mr}}\left[\sqrt{1-r/R} \mp \sqrt{1+r/R}\right] = 5\left(1 \mp \sqrt{3}\right) \text{ m/s}. \quad (6)$$

1.1.42. ***a) Avem două sarcini*** $q_1 < 0$, $q_2 > |q_1|$ ***de semne opuse aşezate la distanţa*** d ***una de alta. Aflaţi ecuaţia suprafeţei de potenţial zero. b) În vecinătatea unei sfere conductoare de rază*** R , ***legată la pământ, la distanţa*** $r > R$ ***de centrul ei se aşează o sarcină*** q . ***Ce sarcină se induce pe sferă ?***

Rezolvare. a) Alegem axele Ox,y ca în figură. Pentru un punct (*x, y*) de potenţial zero avem :

$$q_1 : (4\pi\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}\ ) + q_2 : (4\pi\varepsilon\sqrt{(d-x)^2 + y^2}\ ) = 0 . \quad (1)$$

Separând termenii de o parte şi de alta a egalităţii şi ridicând la pătrat, obţinem

$$x^2 + y^2 + 2d\,[q_1^2 : (q_2^2 - q_1^2)]\,x - d^2\,[q_1^2 : (q_2^2 - q_1^2)] = 0 . \quad (2)$$

Aceasta este ecuaţia unui *cerc* în planul *Oxy*, deci a unei ***sfere*** în spaţiu , cu centrul şi raza :

$$C\,(x_o = -\,d\,q_1^2 : (q_2^2 - q_1^2)\,,\ y_o = 0)\,,\ R = d|q_1|q_2 : (q_2^2 - q_1^2). \quad (3)$$

Observăm două relaţii importante . Să notăm cu $r_{1,2}$ distanţele sarcinilor $q_{1,2}$ până la centrul sferei, atunci rezultă din (3) :

$$(r_1 = -\,x_o\,,\ r_2 = d - x_o)\,,\ r_1\,r_2 = R^2\,,\ q_1/q_2 = -\,R/r_2 = -\,r_1/R\,. \quad (4)$$

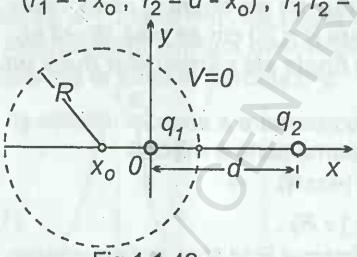


Fig.1.1.42

b) *O sferă conductoare legată la pământ are potenţial zero*, deci suprafaţa ei este o suprafaţă ***echipotenţială*** . Câmpul şi potenţialul în ***exteriorul*** sferei din enunţul problemei *nu* se schimbă cu nimic dacă înlocuim sfera cu o sarcină q' de semn schimbat, situată la distanţa r' de centrul sferei ("*metoda* ***imaginilor***") :

$$r' = R^2/r\,,\quad q' = -\,q\cdot R/r\,. \quad (5)$$

1.1.43. ***O sferă conductoare izolată de rază*** $R_1 = 5{,}0$ cm ***este încărcată până la un potenţial*** $V_1 = 1000$ V. ***Cum se schimbă potenţialul sferei dacă o înconjurăm concentric cu o altă sferă foarte subţire, conductoare, de rază*** $R_2 = 10$ cm, ***a) izolată, b) pusă la pământ ?***

Rezolvare. a) *Dacă de-a lungul unei suprafeţe* ***echipotenţiale*** *se aşează o foiţă* ***conductoare neutră****, infinit de* ***subţire****, atunci nici potenţialul, nici câmpul* ***nu se schimbă*** *(teorema "metalizării" suprafeţei echipotenţiale) .*

Într-adevăr, *un conductor în electrostatică are acelaşi potenţial în toate punctele sale,* deci foiţa este o suprafaţă ***echipotenţială*** şi ia potenţialul suprafeţei pe care este aşezată .

Prin urmare, în cazul nostru potenţialul nu se schimbă .

b) Dacă sfera exterioară este pusă la pământ, potenţialul ei devine zero şi ea va căpăta o sarcină netă Q_2' prin influenţă (sarcina Q_1 a sferei interioare atrage sau respinge spre pământ sarcini libere ale sferei exterioare). Aplicăm două teoreme :

1. ***Principiul suprapunerii.*** *Câmpul (potenţialul) rezultant într-un punct este egal cu suma câmpurilor (potenţialelor) produse* ***separat şi independent*** *de fiecare sarcină .*

2. *În* ***interiorul*** *unei sfere conductoare câmpul este* ***nul,*** *iar potenţialul* ***constant*** *; în* ***exteriorul*** *sferei câmpul şi potenţialul sunt* ***la fel, ca şi cum*** *sarcina sferei ar fi concentrată în* ***centrul*** *sferei .*

În cazul nostru potenţialul sferei exterioare este :

$$V_2' = 0 = Q_1 : (4\pi\varepsilon R_2) + Q_2' : (4\pi\varepsilon R_2) \rightarrow Q_2' = - Q_1 . \qquad (1)$$

Potenţialul sferei interioare va fi atunci :

$$V_1' = Q_1 : (4\pi\varepsilon R_1) + Q_2' : (4\pi\varepsilon R_2) = V_1(1 - R_1 / R_2) = 500 \text{ V}. \quad (2)$$

1.1.44. ***La distanţa*** r = 10 cm ***de centrul unei sfere conductoare neutre de rază*** R = 20 cm ***, respectiv*** 5,0 cm ***, se află o sarcină*** q = 2,0 μC ***. Aflaţi potenţialul sferei .***

Rezolvare. a) Dacă $r < R$, suprafaţa sferei fiind echipotenţială şi având simetrie radială sferică, nu contează poziţia sarcinii din interior : $V = q : (4\pi\varepsilon R) = 900$ V . (1)

b) Dacă $r > R$, aplicăm *principiul suprapunerii.* În centrul sferei potenţialul se compune din potenţialul creat de sferă, care este zero fiindcă sfera este global neutră şi sarcinile induse indiferent de repartiţia lor dau în centrul sferei potenţial total zero, şi din potenţialul produs de sarcina q : $V = q : (4\pi\varepsilon r) = 1800$ V .(2)

1.1.45. ***O sarcină*** q ***se află la distanţa*** r ***de centrul unei sfere conductoare de rază*** R ***pusă la pământ. Aflaţi sarcina indusă pe sferă.***

Rezolvare. a) Fie $r > R$. Sfera fiind pusă la pământ are potenţial zero, peste tot inclusiv interior. Sarcinile q' induse pe suprafaţa sferei , indiferent cum sunt distribuite pe sferă, dau în centrul sferei

potenţialul total $q' : (4\pi\varepsilon R)$, care compus cu potenţialul produs de q trebuie să dea zero :

$$q' : (4\pi\varepsilon R) + q : (4\pi\varepsilon r) = 0 \quad \rightarrow q' = - q \cdot R / r . \qquad (1)$$

b) Fie $r < R$. Potenţialul sferei fiind zero şi având *simetrie sferică* în exterior, rezultă că sarcina indusă q' împreună cu sarcina q, indiferent de poziţia acesteia, trebuie să dea zero : $q' = - q$.

1.1.46. ***Două bile conductoare identice, de rază*** R, ***cu sarcini egale*** q , ***se află la distanţa*** r (» R) ***între ele. Se conectează prima bilă la pământ şi apoi a doua. Ce sarcină rămâne pe bila a doua ?***

Rezolvare. Potenţialul primei bile prin punere la pământ devine zero, iar sarcina devine q' . Conform *principiului suprapunerii* potenţialul acestei bile este :

$$V' = 0 = q' : (4\pi\varepsilon R) + q : (4\pi\varepsilon r) = 0 \quad \rightarrow q' = - q \cdot R / r . \qquad (1)$$

După punerea la pământ a bilei a doua, potenţialul ei devine zero, iar sarcina q'' :

$$V'' = 0 = q'' : (4\pi\varepsilon R) + q' : (4\pi\varepsilon r) , \; q'' = - q' \cdot R / r = q R^2 / r^2 . \qquad (2)$$

1.1.47. ***La baza unui plan înclinat de unghi*** $\alpha = 30^o$ ***se află o sarcină fixă*** Q = 98 μC. ***La distanţa*** r_1 = 9,0 cm ***de aceasta, pe planul înclinat, se ţine în repaus o sarcină*** q = 80 μC , ***apoi i se dă drumul. a) Între ce limite va oscila sarcina*** q ***(frecări neglijabile) ? b) Ce viteză maximă atinge sarcina*** q ***?***

Rezolvare. a) Să aflăm întâi distanţa r_o la care particula poate sta liber în *echilibru* (repaus). În acest punct forţele îşi fac echilibru :

$$mg\sin\alpha - Qq : (4\pi\varepsilon r_o^2) = 0 ,$$

$$r_o^2 = Qq : (4\pi\varepsilon mg\sin\alpha) = 144 \text{ cm}^2 , \quad r_o = 12 \text{ cm} . \qquad (1)$$

Cum $r_1 < r_o$, particula va fi respinsă de Q , se va depărta, va depăşi poziţia de echilibru şi va ajunge la distanţa *maximă* care se obţine din legea *conservării energiei* :

$$mgr_1\sin\alpha + Qq : (4\pi\varepsilon r_1) = mgr_2\sin\alpha + Qq : (4\pi\varepsilon r_2) . \qquad (2)$$

Ţinând seama de (1) ultima ecuaţie devine :

$$(r_2 - r_1)(r_2 - r_o^2 / r_1) = 0 , \quad r_2 = r_o^2 / r_1 = 16 \text{ cm} . \qquad (3)$$

b) Particula oscilează între limitele (r_1 , r_2) şi când trece prin poziţia de *echilibru* r_o ea are viteza *maximă* .

$$mgr_1\sin\alpha + Qq : (4\pi\varepsilon r_1) = mgr_o\sin\alpha + Qq : (4\pi\varepsilon r_o) + (1/2)mv_m^2 , \qquad (4)$$

$$(r_o^2 = r_1 r_2), \; v_m = \left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right)\sqrt{2g\sin\alpha} = 0{,}31 \text{ m/s} . \qquad (5)$$

1.1.48. ***O bilă metalică neutră de rază*** r = 5,0 cm ***este aşezată în centrul unei sfere de rază*** R = 10 cm ***şi potenţial*** V = = 1000 V . ***Cât devine potenţialul sferei dacă legăm bila la Pământ ?***

Rezolvare. Punând bila la pământ, pe ea vor apare sarcini q' de semn opus cu sarcina sferei (prin *influenţă* : sarcinile de acelaşi semn sunt respinse spre pământ, iar cele de semn contrar sunt atrase). Ştiind că potenţialul unei sfere conductoare este *constant* în ***interior*** şi egal cu $q : (4\pi\varepsilon r)$ în ***exterior*** , aplicăm *principiul* ***suprapunerii***, pentru bilă , respectiv pentru sferă :

$$0 = q' : (4\pi\varepsilon r) + q : (4\pi\varepsilon R) , \quad [V = q : (4\pi\varepsilon R)] \rightarrow$$

$$q' = - q \cdot r / R = - 4\pi\varepsilon r V ,$$

$$V' = q' : (4\pi\varepsilon R) + q : (4\pi\varepsilon R) = - V \cdot r / R + V =$$

$$= V(1 - r / R) = 500 \text{ V}. \qquad (2)$$

1.1.49. ***Două sfere concentrice au razele*** $R_{1,2}$. ***Sfera exterioară are sarcina*** q , ***iar cea interioară este*** neutră. ***Ce sarcină va trece prin galvanometru, dacă închidem întrerupătorul din figură?***

Rezolvare. Folosim rezultatul problemei precedente 1.1.48 :

$$q' = - q \cdot R_1 / R_2 . \qquad (1)$$

Deci , dacă $q > 0$, atunci $q' < 0$ şi vin electroni de la pământ , sensul convenţional al curentului fiind *spre* pământ .

Dacă $q < 0$, atunci $q' > 0$ şi pleacă electroni spre pământ, sensul curentului fiind spre sferă (numărul electronilor este $N = q' / e$).

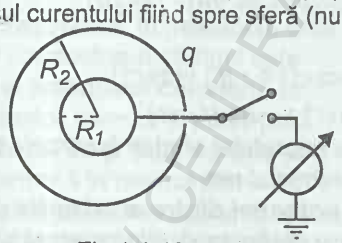


Fig.1.1.49

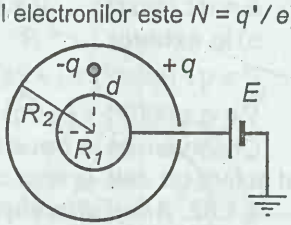


Fig.1.1.50

1.1.50. ***Aflaţi sarcina sferei conductoare interioare din montajul din figură, cunoscând*** E = 90 V , R_1 = 5,0 cm , R_2 = = 15,0 cm , d = 10,0 cm , q = 6 ,0 nC .

Rezolvare. Sfera interioară este pusă la pământ prin intermediul bateriei şi deci are potenţialul E , în toate punctele sale, deci şi în centru. Pe de altă parte, sarcinile induse pe această sferă, din cauza distribuţiei pe suprafaţa sferei, dau în centrul sferei potenţialul $q' / (4\pi\varepsilon R_1)$. Aplicăm *principiul* ***suprapunerii*** :

$$V_1 = E = q' : (4\pi\varepsilon R_1) + q : (4\pi\varepsilon R_2) - q : (4\pi\varepsilon d) . \quad (1)$$

Reamintim că *potenţialul unei sfere conductoare este constant în interior* $q : (4\pi\varepsilon R)$ *şi egal cu* $q : (4\pi\varepsilon r)$ *în exterior.*

Din (1) rezultă

$$q' = 4\pi\varepsilon R_1 E - q\, R_1 / R_2 + q\, R_1 / d = 2{,}0 \text{ nC} . \quad (2)$$

1.1. 51. ***În centrul unei sfere conductoare de rază*** R ***şi sarcină*** $-2q < 0$, ***se aşează o sarcină*** $+q$. ***Aflaţi câmpul şi potenţialul, şi reprezentaţi-le grafic .***

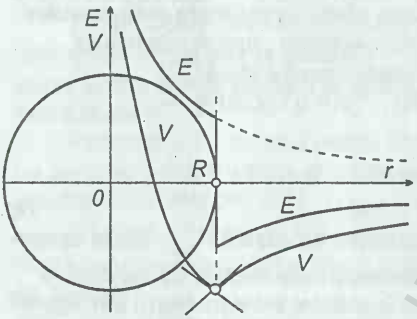


Fig.1.1.51

Rezolvare. Aplicăm ***principiul suprapunerii*** : *Câmpul (potenţialul) rezultant într-un punct este egal cu suma câmpurilor (potenţialelor) produse* ***separat şi independent*** *de fiecare sarcină .*

Aplicăm de asemenea *teorema :*

În ***interiorul*** *unei sfere conductoare câmpul este* ***nul*** *şi potenţialul* ***constant****, iar în* ***exteriorul*** *sferei câmpul şi potenţialul sunt* ***la fel, ca şi cum*** *sarcina sferei ar fi concentrată în* ***centrul*** *ei.*

a) În **interior** , $r < R$:

$$E = q : (4\pi\varepsilon r^2) \quad , \quad V = q : (4\pi\varepsilon r) + (-2q) : (4\pi\varepsilon R) . \quad (1)$$

b) În **exterior** , $r > R$:

$$E = q : (4\pi\varepsilon r^2) + (-2q) : (4\pi\varepsilon r^2) = -q : (4\pi\varepsilon r^2) ; \quad (2)$$

$$V = q : (4\pi\varepsilon r) + (-2q) : (4\pi\varepsilon r) = -q : (4\pi\varepsilon r) . \quad (3)$$

Observăm că la *traversarea* suprafeţei sferice *încărcate* **câmpul** suferă un ***salt***, în timp ce potenţialul ***nu*** .

1.1.52. ***Aflaţi diferenţa de potenţial dintre armăturile unui condensator : a) plan-paralel cu distanţa*** d ***dintre armături, b) sferic cu razele*** $R_{1,2}$, ***dacă aceste armături sunt încărcate uniform cu densităţile de sarcină*** $\sigma_{1,2}$.

Rezolvare. a) Câmpul de o parte şi de alta a unui plan infinit, încărcat uniform, este **constant** şi perpendicular pe plan : $\sigma / (2\varepsilon)$. Aplicând *principiul suprapunerii*, câmpul între armături va fi :

$$E = \sigma_1 / (2\varepsilon) - \sigma_2 / (2\varepsilon) = (\sigma_1 - \sigma_2) / (2\varepsilon) . \quad (1)$$

Câmpul fiind omogen şi uniform, diferenţa de potenţial este :

$$U = \vec{E}\,\vec{d} = (\sigma_1 - \sigma_2) d / (2\varepsilon) . \quad (2)$$

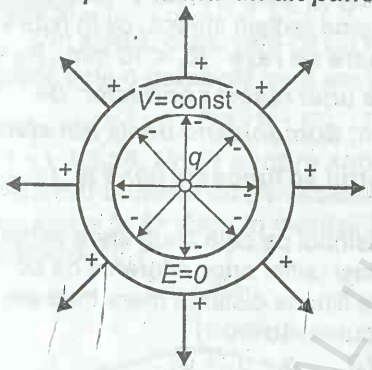
b) Ştiind că în **interiorul** unei sfere conductoare câmpul este ***zero***, iar în **exterior** $q : (4\pi\varepsilon r^2)$ şi aplicând principiul *suprapunerii*, găsim câmpul dintre armături :

$$E = q_1 : (4\pi\varepsilon r^2) , \quad r \in (R_1 , R_2) . \qquad (3)$$

Câmpul fiind identic cu cel *coulombian* al unei sarcini q , diferenţa de potenţial se calculează la fel ca pentru acest câmp :

$$U = q_1 : (4\pi\varepsilon R_1) - q_1 : (4\pi\varepsilon R_2) = [q / (4\pi\varepsilon)] (1/ R_1 - 1 / R_2) . \quad (4)$$

1.1.53. ***O sarcină punctiformă*** q (> 0) ***este aşezată în centrul unei*** pături sferice ***conductoare neutre de raze*** $R_{1,2}$. ***Aflaţi câmpul şi potenţialul. Cum arată liniile de câmp dacă sarcina*** q ***este deplasată într-un alt punct în interiorul sferei?***



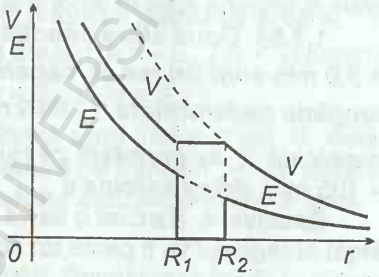


Fig.1.1.53 a

Rezolvare. În **interiorul** unei sfere conductoare câmpul este ***zero*** şi potenţialul ***constant***, iar în **exterior** câmpul şi potenţialul sunt ***la fel ca şi cum*** sarcina ar fi concentrată în centrul sferei.

Aplicăm *principiul suprapunerii* .

În *grosimea* păturii sferice câmpul este *zero*, dar conform principiului *suprapunerii* :

$$E = 0 = q : (4\pi\varepsilon r^2) + q' : (4\pi\varepsilon r^2)$$

$$\rightarrow \quad q' = - q , \qquad (1)$$

adică pe faţa internă a păturii se induce o sarcină egală în modul dar de sens opus . Atunci pe faţa externă va fi o sarcină egală cu q, ca în figură .

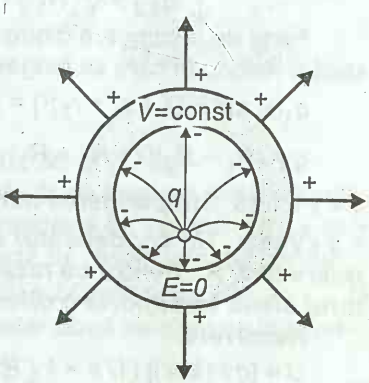


Fig.1.1.53 b

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În *cavitatea* sferică interioară : $E = q : (4\pi\varepsilon r^2)$,

$V = q : (4\pi\varepsilon r) + (-q) : (4\pi\varepsilon R_1) + q : (4\pi\varepsilon R_2)$, $r < R_1$. (2)

În *interiorul păturii* sferice :

$E = 0$, $V = q : (4\pi\varepsilon R_2)$, $r \in (R_1 , R_2)$. (3)

În ***exteriorul*** păturii sferice :

$E = q : (4\pi\varepsilon r^2)$, $V = q : (4\pi\varepsilon r)$, $r > R_2$. (4)

Pătura sferică ***ne***fiind pusă la *pământ*, ***nu*** există o *ecranare* din interior spre exterior .

Dacă sarcina punctiformă q se deplasează în altă parte, câmpul în interior se schimbă ca în figură, dar în exterior rămâne neschimbat, deoarece pătura este o suprafaţă *echipotenţială* şi fiind *sferică*, impune spre exterior o simetrie radială sferică, ca în figură .

1.1.54. ***Două sfere conductoare de raze*** $R_1 = 10$ mm , $R_2 =$ $= 5{,}0$ mm ***sunt prinse de capetele unui resort conductor de lungime nedeformată*** $\ell_o = 99$ mm. ***Comunicând uneia din sfere o sarcină*** q ***se constată că resortul se lungeşte până la*** $\ell =$ $= 105$ mm. ***Aflaţi sarcina*** q .

Rezolvare. Sarcina q se va distribui pe cele două sfere astfel încât *potenţialul* va fi peste tot acelaşi (altfel orice diferenţă de potenţial ar genera un curent). Sferele fiind la distanţă mare între ele şi neglijând capacitatea resortului putem scrie :

$V' = q_1 : (4\pi\varepsilon R_1) = q_2 : (4\pi\varepsilon R_2)$, $q = q_1 + q_2$,

$q_{1,2} = q \cdot R_{1,2} : (R_1 + R_2)$. (1)

Forţa de respingere dintre sfere este echilibrată de forţa elastică a resortului care se lungeşte :

$q_1 q_2 : [4\pi\varepsilon(\ell + r_1 + r_2)^2] = k(\ell - \ell_o)$,

$q = (R_1 + R_2)(\ell + R_1 + R_2)\sqrt{4\pi\varepsilon k(\ell - \ell_o)/(R_1 R_2)} = 2{,}1$ μC . (2)

(*) 1.1.55. ***Străpungerea aerului se produce la un câmp*** $E_{str} =$ $= 3$ kV/mm . ***Un condensator sferic cu aer are raza sferei exterioare fixă:*** R . ***Pentru ce rază*** r ***a sferei interioare, condensatorul sferic va suporta o diferenţă de potenţial*** maximă ***?***

Rezolvare.

$U = [q / (4\pi\varepsilon)]\,(1/r - 1/R)$, $E = q : (4\pi\varepsilon r'^2)$, $r < r' < R$, (1)

$E_{max} = q : (4\pi\varepsilon r^2) = E_{str}$, (2)

atunci $U = E_{str}(r - r^2/R) = f(r)$. (3)

O funcţie are ***extreme*** *acolo unde se anulează* ***derivata*** *:*

$$f'(r) = E_{str}(1 - 2r/R) = 0 \quad \rightarrow \quad r = R/2\,, \tag{4}$$

derivata a doua : $f''(r) = -E_{str} \cdot 2/R < 0\,,$ (5)

deci avem un *maxim* : $U_{max} = E_{str} \cdot R/4\,.$ (6)

Se poate afla maximul , în cazul nostru, şi fără derivate. Pentru aceasta să prelucrăm expresia (3) astfel

$$U = E_{str}\, R \cdot \frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)\,. \tag{7}$$

Am pus în evidenţă un produs de doi factori a căror *sumă* este *constantă* , atunci *produsul* este *maxim* când factorii sunt *egali* între ei : $r/R = 1 - r/R \quad \rightarrow \quad r = R/2\,.$ (8)

În sfârşit, observăm că (3) este o funcţie ***pătratică*** al cărei grafic este o ***parabolă*** care are un *maxim* ($a = -E_{str}/R < 0$) pentru

$$r = [-b/(2a)] = -E_{str} : [2(-E_{str}/R)] = R/2\,.$$

(*) 1.1.56. ***Un fir subţire sub forma unui inel de rază*** R ***este încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină*** λ ***. Ce tensiune apare în fir dacă în centrul inelului aşezăm o sarcină punctiformă*** Q ***?***

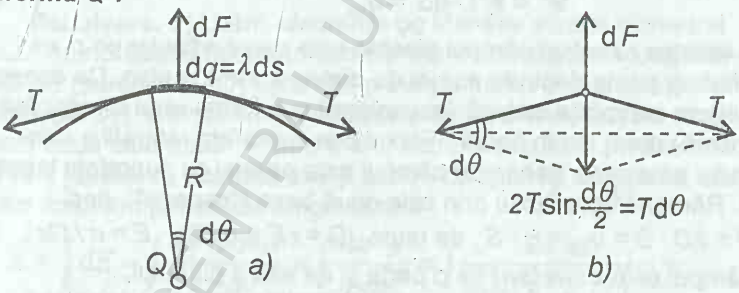


Fig.1.1.56

Rezolvare. Luăm un ***element*** de fir de lungime *infinitezimală* $ds = R\,d\theta$ încărcat cu cantitatea *elementară* de sarcină $dq = \lambda\, ds = \lambda R\, ds$. Asupra sa acţionează o forţă de respingere din partea sacinii Q : $dF = dq \cdot Q : (4\pi\varepsilon R^2) = \lambda Q R d\theta : (4\pi\varepsilon R^2)\,,$ (1)

care este echilibrată de rezultanta celor două tensiuni de la capetele elementului de fir considerat :

$$dF = 2T\sin(d\theta/2) = T\, d\theta\,, \tag{2}$$

$$\lambda Q R d\theta : (4\pi\varepsilon R^2) = T\, d\theta\,, \quad T = \lambda Q : (4\pi\varepsilon R)\,. \tag{3}$$

Problema se poate rezolva şi fără folosirea diferenţialelor, judecând cu variaţii foarte ***mici*** care descresc (tind) către ***zero***, Δs ,

BCU "ŞTEFAN CEL MARE" SUCEAVA LIBRARY

Δq , $\Delta\theta$, ΔF şi ţinând seama de aproximaţia cunoscută: $\sin x \cong x$ (x în *radiani*) pentru $x < 6^o$, adică la *limită* $\sin x$ se poate înlocui cu x (când $x \to 0$) .

(* *) 1.1.57. ***Calculaţi câmpul electric produs de un plan infinit, încărcat uniform cu densitatea superficială de sarcină*** σ ***. Calculaţi de asemenea, câmpul produs de două asemenea plane paralele cu distanţa*** d ***între ele.***

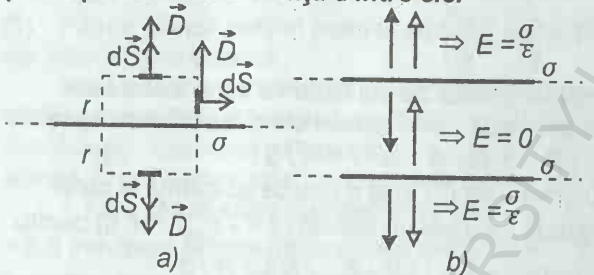


Fig.1.1.57

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* **Gauss** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei electrice* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu* ***sarcina*** *electrică din* ***interiorul*** *suprafeţei :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q_{int} \ . \qquad (1)$$

În virtutea *simetriei* câmpul electric este *perpendicular* pe planul infinit şi poate depinde numai de *distanţa* până la plan. De aceea alegem suprafaţa închisă (*gaussiana*) sub forma unui cilindru (sau prismă) drept, ca în figură . Fluxul prin suprafaţa *laterală* a cilindrului este zero, deoarece câmpul este *paralel* cu suprafaţa laterală. Rămâne doar fluxul prin cele două baze ("capace"), deci $\Psi = 2D \cdot S = q_{int} = \sigma \cdot S$, de unde $D = \varepsilon E = \sigma / 2$, $E = \sigma / (2\varepsilon)$. (2)

Câmpul este ***constant*** de o parte şi de alta a planului.

Pentru două asemenea plane *paralele*, aplicând *principiul* ***suprapunerii***, avem conform figurii : ***între*** cele două plane câmpul este *zero*, iar în ***exteriorul*** lor câmpul este σ / ε .

(* *) 1.1.58. ***Un cilindru conductor , gol , foarte lung, de rază*** R, ***este încărcat uniform cu densitatea superficială de sarcină electrică*** σ ***. Calculaţi câmpul electric produs de cilindru .***

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* **Gauss** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei electrice* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu* ***sarcina*** *electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q_{int} \ . \qquad (1)$$

Bazându-ne pe *simetria cilindrică* a problemei, alegem suprafaţa închisă ("*gaussiana*") sub forma unui cilindru coaxial cu cilindrul dat . În virtutea *simetriei cilindrice*, câmpul este ***radial*** şi dependent numai de *distanţa* până la axa cilindrului. Atunci fluxul prin cele două baze ("capace") este *nul* (câmpul fiind paralel cu suprafaţa), iar prin suprafaţa laterală a cilindrului gaussian se calculează imediat : $\Psi = D \cdot S_{lat} = D \cdot 2\pi r\ell$. (2)

Dacă cilindrul gaussian este ***interior*** celui dat, adică $r < R$, atunci nu avem sarcină în interior :

$\Psi = D \cdot 2\pi r\ell = q_{int} = 0$, $D = \varepsilon E = 0$ pentru $r < R$. (3)

În ***exteriorul*** cilindrului dat, pentru $r > R$ avem

$\Psi = D \cdot 2\pi r\ell = q_{int} = \sigma \cdot 2\pi R\ell$,

$D = \varepsilon E = \sigma R / r$, $E = \sigma R / (\varepsilon r)$, $r > R$. (4)

Câmpul în ***interior*** este ***nul***, iar în ***exterior*** scade ***invers*** proporţional cu ***distanţa*** până la axa cilindrului încărcat.

** **1.1.59.** ***Un inel subţire de sârmă de rază*** R ***este încărcat uniform cu sarcina*** q. ***Stabiliţi expresia intensităţii câmpului electric şi a potenţialului pe axa inelului în funcţie de distanţa*** y ***până la centrul inelului.La ce distanţă*** y_0 ***câmpul este*** maxim***?***

Rezolvare. a) Luăm ***elemente*** d*q* identice situate diametral opus. Atunci descompunând câmpul într-o componentă longitudinală d*E* (paralelă cu Oy) şi o componentă transversală (perpendiculară pe Oy), constatăm că componentele transversale se anulează două câte două . Prin urmare, câmpul rezultant pe axa inelului va fi paralel cu această axă şi pentru calculul lui trebuie să însumăm doar componentele *longitudinale* :

$$E = \int dE = \int \frac{dq \cdot \cos\alpha}{4\pi\varepsilon r^2} = \int \frac{dq \cdot y}{4\pi\varepsilon r^3} = \int \frac{dq \cdot y}{4\pi\varepsilon\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{y}{4\pi\varepsilon(R^2 + y^2)^{3/2}} \int dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = f(y) . \quad (1)$$

b) Câmpul este *maxim* acolo unde ***derivata*** se anulează :

$$f'(y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{R^2 - 2y^2}{R^2 + y^2} = 0 , \quad y_m = \pm\frac{R}{\sqrt{2}} , \quad (2)$$

$$E_{max} = \pm \frac{2q}{4\pi\varepsilon R^2 \cdot 3\sqrt{3}} . \quad (3)$$

c) Potenţialul este o mărime *aditivă* : sumăm potenţialele produse ***separat şi independent*** de fiecare element de sarcină dq

(*principiul suprapunerii*) : $$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+y^2}} \int dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+y^2}}. \qquad (4)$$

Potenţialul se poate calcula şi cu ajutorul câmpului. Prin *definiţie* : $$V = -\int_{\infty}^{y} E\,dy = -\int_{\infty}^{y} \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{y\,dy}{\left(R^2+y^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} \Bigg|_{\infty}^{y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{R^2+y^2}}. \qquad (5)$$

Bineînţeles, $$E_y = -\frac{dV}{dy}. \qquad (6)$$

În vecinătatea *centrului* inelului, pentru $|y| \ll R$:

$$E \cong [q : (4\pi\varepsilon R^3)]\, y \sim y, \qquad (7)$$

$$V = [q : (4\pi\varepsilon R)]\,(1 + y^2/R^2)^{-1/2} \cong [q : (4\pi\varepsilon R)]\,[1 - y^2/(2R^2)]. \qquad (8)$$

La distanţe *mari* de inel, pentru $|y| \gg R$, regăsim rezultatele pentru o sarcină *punctiformă* :

$$E = q : (4\pi\varepsilon y^2), \quad V = q : (4\pi\varepsilon |y|). \qquad (9)$$

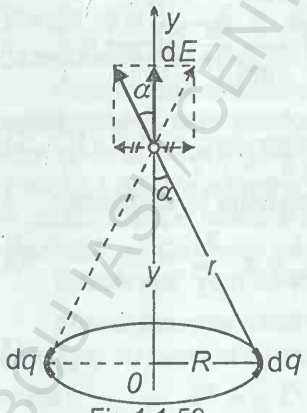


Fig.1.1.59

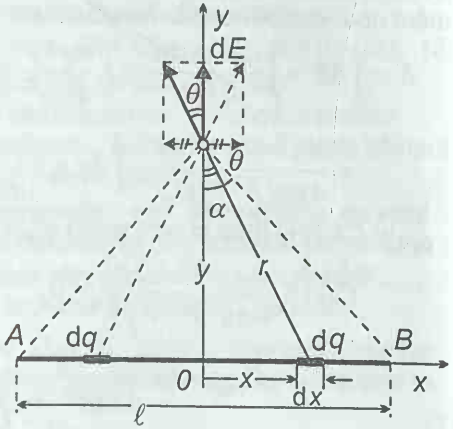


Fig.1.1.60

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

** 1.1.60. ***Calculaţi intensitatea câmpului electric şi poten-ţialul produs de un fir rectiliniu de lungime ℓ , încărcat cu o densitate liniară de sarcină λ , pe mediatoarea firului.***

Rezolvare. a) Luăm două ***elemente*** de fir d*x*, simetric aşezate faţă de centrul segmentului. Componentele transversale (perpendiculare pe mediatoare) se *anulează* reciproc, astfel încât rămân numai componentele *longitudinale* (paralele cu mediatoarea), pe care urmează să le însumăm :

$$E = \int \frac{dq \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} = \int \frac{\lambda\, dx \cdot y}{4\pi\varepsilon\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}, \qquad (1)$$

dar $x = y\,\mathrm{tg}\theta$ care dă prin *diferenţiere* : $dx = y\,d\theta : \cos^2\theta$.
Integrala devine :

$$E = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\lambda\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon y} = \frac{\lambda\sin\alpha}{2\pi\varepsilon y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon y} \frac{\ell/2}{\sqrt{\ell^2/4 + y^2}}. \qquad (2)$$

Se poate integra şi direct în variabila *x* , dacă ştim integrala :

$$\int \frac{dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{y^2 + x^2}} + C.$$

Atunci $$E = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y} \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon y} \frac{\ell/2}{\sqrt{y^2 + \ell^2/4}}. \qquad (4)$$

În particular, pentru un fir infinit ($\ell \to \infty$, $\alpha \to \pi/2$) rezultă :

$$E = \lambda : (2\pi\varepsilon y). \qquad (5)$$

b) Sumăm potenţialele produse de sarcinile *elementare* d*q* (*principiul suprapunerii*) :

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln\left(x + \sqrt{y^2 + x^2}\right)\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell/2 + \sqrt{y^2 + \ell^2/4}}{-\ell/2 + \sqrt{y^2 + \ell^2/4}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell/2 + \sqrt{y^2 + \ell^2/4}}{|y|}. \qquad (6)$$

Potenţialul se poate calcula şi cu ajutorul câmpului electric.

Prin *definiţie* : $V = -\int_{\infty}^{y} E\,\mathrm{d}y = -\int_{\infty}^{y} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{\ell^2/4 + y^2}} =$

$$= -\frac{\lambda\,\ell}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{\ell/2}\right) \ln \frac{\ell/2 + \sqrt{\ell^2/4 + y^2}}{y}\Bigg|_{\infty}^{y} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell/2 + \sqrt{\ell^2/4 + y^2}}{y}, \quad y > 0. \qquad (7)$$

Bineînţeles, $E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}$. (8)

La distanţe *mari* de segment, $|y| \gg \ell$, regăsim expresiile pentru o sarcină *punctiformă* : $E \cong \lambda\ell : (4\pi\varepsilon\, y|y|)$,

$$V \cong \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell/2 + |y|}{|y|} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln\left(1 + \frac{\ell}{2|y|}\right) \cong \frac{\lambda\ell}{4\pi\varepsilon|y|}, \qquad (9)$$

unde am folosit aproximaţia

$$\ln(1 + x) \approx x, \quad \text{dacă } |x| \ll 1. \qquad (10)$$

**** 1.1.61.** ***Două fire paralele sunt situate în aer la distanţa*** r = 4,5 cm ***între ele şi încărcate uniform cu densităţile liniare de sarcină*** λ_1 = 2,00 μC/m , λ_2 = - 1,00 μC/m . ***Aflaţi: a) Forţa pe unitatea de lungime cu care se atrag firele , b) Lucrul mecanic pe unitatea de lungime care trebuie efectuat pentru a depărta firele de la distanţa dată până la*** r ' = 9,0 cm.

Rezolvare. a) Conform problemei precedente 1.1.60, câmpul electric produs de un fir lung este $E = \lambda : (2\pi\varepsilon\, r)$. (1)

Putem considera firul *2* ca fiind supus la o forţă electrică din partea câmpului electric produs de firul *1* sau invers, firul *1* ca fiind supus la o forţă din partea câmpului produs de firul *2* - rezultatul este acelaşi : $F^* = \lambda_1 \lambda_2 : (2\pi\varepsilon r) = -0{,}80$ N/m . (2)

b) Lucrul mecanic care trebuie efectuat din exterior este egal în modul cu cel efectuat de forţele câmpului :

$$L^* = \int_r^{r'} -F^*\,\mathrm{d}r = \int_r^{r'} -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon r}\,\mathrm{d}r = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon} \ln\frac{r'}{r} = 25 \text{ mJ/m} . \qquad (3)$$

**** 1.1.62.** ***Un disc de rază*** R ***este încărcat uniform cu densitatea superficială de sarcină*** σ . ***Stabiliţi expresia intensităţii câmpului electric pe axa discului în funcţie de distanţa*** y ***până***

PUTNA UNIVERSITY LIBRARY

la centrul discului.

Rezolvare. a) Vom folosi rezultatele problemei 1.1.59. Luăm un inel de rază r şi grosime dr, ca în figură. Sarcina acestui inel este $dq = \sigma\, dS$. Aria inelului de grosime *infinitezimală* se poate afla fie direct : lungimea cercului $2\pi r$ ori grosimea inelului dr, fie ca *diferenţiala* (creşterea *infinitezimală*) a ariei unui cerc :

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr \tag{1}$$

sau, în sfârşit, ca diferenţa dintre ariile celor două cercuri :

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi(dr)^2 \to 2\pi r dr.$$

Câmpul produs de inelul infinitezimal considerat este :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon}\frac{y}{\left(r^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\frac{yr\,dr}{\left(r^2+y^2\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Integrarea se face uşor : $E = \dfrac{\sigma y}{4\varepsilon}\displaystyle\int_0^R \frac{d(r^2)}{\left(r^2+y^2\right)^{3/2}} =$

$$= -\frac{\sigma y}{4\varepsilon}\frac{2}{\sqrt{r^2+y^2}}\Bigg|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right]. \tag{3}$$

La traversarea discului câmpul electric suferă un ***salt*** : σ/ε.

De aici rezultă ca un caz *limită* câmpul unui plan *infinit* (facem $R \to \infty$): :

$$E = \sigma/(2\varepsilon) \tag{4}$$

sau câmpul unei sarcini punctiforme ($y \gg R$) :

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+R^2/y^2}} \cong \frac{1}{y}\left(1-\frac{R^2}{2y^2}\right),$$

deci

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\cdot\frac{R^2}{2y^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon y^2}. \tag{5}$$

b) $V = -\displaystyle\int_\infty^y E\,dy = -\int_\infty^y \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(1-\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right)dy =$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(y-\sqrt{R^2+y^2}\right)\Bigg|_\infty^y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(y-\sqrt{R^2+y^2}\right)+$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$+\frac{\sigma}{2\varepsilon}\lim_{y\to\infty}\left(y-\sqrt{R^2+y^2}\right)=-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(y-\sqrt{R^2+y^2}\right),\quad (y>0), \quad (6)$$

limita a doua (inferioară) fiind nulă .

Potenţialul se poate calcula şi direct : $dV=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+y^2}}=$

$$=\frac{\sigma r\,dr}{2\varepsilon\sqrt{r^2+y^2}},\qquad V=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^R\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+y^2}}=$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\sqrt{r^2+y^2}\,\Big|_0^R=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[\sqrt{R^2+y^2}-|y|\right]. \quad (7)$$

c) În cazul unui disc-inel de raze $R_{1,2}$ formulele devin :

$$E=\frac{\sigma y}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+y^2}}\right], \quad (8)$$

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[\sqrt{R_2^2+y^2}-\sqrt{R_1^2+y^2}\right]. \quad (9)$$

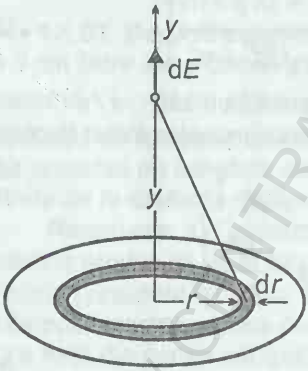


Fig.1.1.62

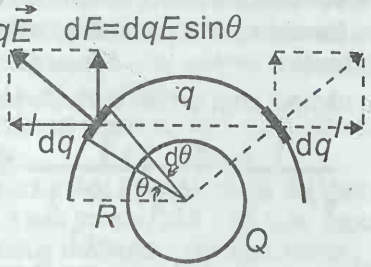


Fig.1.1.63

**** 1.1.63.** ***O semicircumferinţă de rază*** R = 20 cm ***este încărcată uniform cu sarcina totală*** q = 2,0 μC ***. În centrul de curbură al acesteia se află o sferă de rază mai mică încărcată uniform cu sarcina*** Q = 3,14 μC ***. Aflaţi forţa exercitată asupra sferei .***

Rezolvare. Forţa cerută este egală în modul şi de sens opus cu forţa exercitată asupra circumferinţei. Aceasta din urmă se află în câmpul radial simetric al sferei. Oricărui *element* dq îi corespun-

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de un element identic situat diametral opus pe cercul paralel orizontal. Descompunând câmpurile pe direcţiile verticală şi orizontală, ca în figură, componentele orizontale se vor distruge două câte două, astfel încât trebuie să sumăm algebric numai componentele verticale şi forţa va fi *verticală* :

$$dF = dq \cdot E \sin\theta\,, \quad \text{dar} \quad dq : q = d\theta : \pi\,, \tag{1}$$

$$E = Q : (4\pi\varepsilon R^2)\,, \tag{2}$$

atunci

$$dF = \frac{q}{\pi}\frac{Q\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon R^2}\,,$$

$$F = \int dF = \frac{qQ}{4\pi^2\varepsilon R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = \frac{qQ}{2\pi^2\varepsilon R^2} = 0{,}90\ \text{N}\,. \tag{3}$$

Dacă în locul semicircumferinţei avem un arc de cerc care subîntinde un unghi la centru α , atunci integrând între limitele corespunzătoare, obţinem

$$F = \frac{qQ}{2\pi^2\varepsilon R^2}\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{4}$$

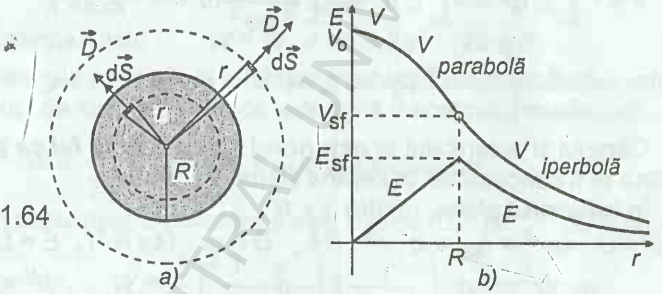
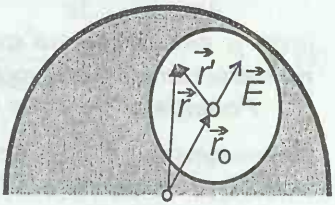


Fig.1.1.64

**** 1.1.64.** ***O sferă de rază*** R ***este încărcată uniform pe tot volumul său cu sarcina totală*** q . ***a) Aflaţi câmpul şi potenţialul, şi reprezentaţi-le grafic. b) Calculaţi energia câmpului electric din exteriorul şi din interiorul sferei. c) În interiorul sferei se face o cavitate sferică fără sarcini, cu centrul în poziţia*** $\vec{r}_o$ ***faţă de centrul sferei.***



c)

Fig.1.1.64

Aflaţi câmpul din cavitate . Se consideră permitivitatea ε ***aceeaşi peste tot .***

Rezolvare. Vom folosi ***teorema lui Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul inducţiei *(deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu* ***sarcina*** *electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = q_{\text{int}} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V\,, \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}\,, \tag{1}$$

unde ρ este *densitatea de sarcină* .

Luăm o suprafaţă sferică gaussiană concentrică cu sfera dată. Atunci în virtutea ***simetriei sferice*** fluxul se calculează foarte uşor, deoarece câmpul este ***radial*** şi depinde numai de *distanţa* r până la centrul sferei :

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D\,\mathrm{d}S = D\oint_S \mathrm{d}S = D\cdot S = D\cdot 4\pi r^2\,. \tag{2}$$

a) În **exteriorul** sferei date , pentru $r > R$:

$$\Psi = D\cdot 4\pi r^2 = q\,,\quad D = q : (4\pi r^2)\,,$$

$$E = D/\varepsilon = q : (4\pi\varepsilon r^2)\,,\quad r \geq R. \tag{3}$$

Potenţialul se poate calcula cu ajutorul câmpului :

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^r E\,\mathrm{d}r = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\,,\quad r \geq R\,. \tag{4}$$

Câmpul şi potenţialul în **exteriorul** sferei sunt ***la fel ca şi cum*** sarcina ar fi concentrată în *centrul* sferei.

În **interiorul** sferei, pentru $r < R$:

$$\Psi = D\cdot 4\pi r^2 = q_{\text{int}} = q\cdot r^3 : R^3\,,\quad D = qr : (4\pi R^3)\,,\quad E = D : \varepsilon\,,$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r}{R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon}r\,,\qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\vec{r}\,,\qquad r \leq R\,, \tag{5}$$

unde ρ este *densitatea spaţială* (*volumică*) de sarcină. În ***interiorul*** sferei câmpul este *proporţional* cu *distanţa* de la centrul sferei.

Potenţialul se poate calcula cu ajutorul câmpului :

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_\infty^r E\,\mathrm{d}r = -\int_\infty^R E\,\mathrm{d}r - \int_R^r E\,\mathrm{d}r =$$

$$= -\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r - \int_R^r \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r}{R^3}\,\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\bigg|_\infty^R - \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\frac{r^2}{2}\bigg|_R^r =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\frac{1}{2}\left(r^2 - R^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) =$$

BCU RSP CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{3}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right), \quad r \le R. \tag{6}$$

În centrul sferei : $E = 0$, $V_o = 3q : (8\pi\varepsilon R)$, $(r = 0)$. (7)

b) ***Densitatea de energie*** *a câmpului electric* este :

$w = \mathrm{d}W / \mathrm{d}V = (1/2)\,\varepsilon E^2 = (1/2)\,DE = (1/2)\,D^2/\varepsilon$. (8)

În **exteriorul** sferei : $W_e = \int w\,\mathrm{d}V = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$

$$= \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R}. \tag{9}$$

În **interiorul** sferei :

$$W_i = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon\left[\frac{qr}{4\pi\varepsilon R^3}\right]^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R^6}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{10}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R}. \tag{10}$$

Energia totală : $W = W_e + W_i = 3q^2 : (20\pi\varepsilon R)$. (11)

Energia potenţială totală de interacţie electrostatică a unei distribuţii de sarcină electrică este dată de formula cunoscută :

$$W = \frac{1}{2}\int V\,\mathrm{d}q, \qquad V \text{ - potenţialul electric}. \tag{12}$$

În cazul nostru potenţialul este dat de (6), iar $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}V =$

$= \rho \cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r$, $W = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{3}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right)\rho \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$

$$= \frac{9}{4}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R^4}\int_o^R\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right)r^2\,\mathrm{d}r = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R}, \tag{13}$$

adică am regăsit rezultatul aşteptat (11).

c) Sfera cu cavitate poate fi privită ca *suprapunerea* sferei pline *minus* sfera corespunzătoare *cavităţii* şi atunci conform *principiului* ***suprapunerii*** *:*

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\vec{r} - \frac{\rho}{3\varepsilon}\vec{r}' =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon}\vec{r}_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\vec{r}_o = \text{const}, \tag{14}$$

independent de punctul din cavitate .

BCU ASE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

*** * 1.1.65.** ***O tijă foarte subţire de lungime*** ℓ ***este încărcată uniform cu sarcina*** q . ***Aflaţi câmpul şi potenţialul electric pe axa tijei în exteriorul ei.***

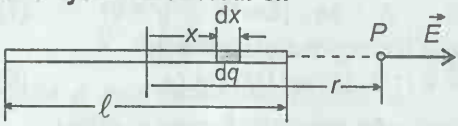


Fig.1.1.65

Rezolvare. Luăm un ***element*** de tijă de lungime infinit mică dx , la distanţa *x* de centrul tijei. Câmpurile electrice produse de astfel de elemente sunt orientate în lungul tijei, astfel încât se adună *algebric* :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon(r-x)^2} = \frac{q\,dx}{4\pi\varepsilon\ell(r-x)^2}, \quad dq = \frac{q}{\ell}dx,$$

$$E = \int dE = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{q\,dx}{4\pi\varepsilon\ell(r-x)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\ell}\frac{1}{r-x}\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2-\ell^2/4} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{(r-\ell/2)(r+\ell/2)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1 r_2}, \qquad (r > \ell/2), \qquad (1)$$

unde $r_{1,2}$ sunt distanţele până la *capetele* tijei.

Potenţialul fiind o mărime ***aditivă*** (principiul *suprapunerii*), sumăm potenţialele produse ***separat şi independent*** de fiecare *element* dq :

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon\,|r-x|} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{q\,dx}{4\pi\varepsilon\ell(r-x)} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{r+\ell/2}{r-\ell/2}, \qquad (r > \ell/2). \qquad (2)$$

Potenţialul se poate calcula şi cu ajutorul expresiei câmpului electric:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2-\ell^2/4}dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{\ell}\ln\frac{r+/2}{r-/2}\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{r+\ell/2}{r-\ell/2}, \qquad (r > \ell/2).$$

Pentru $r \gg \ell$ trebuie să regăsim câmpul şi potenţialul unei sarcini punctiforme :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\left(1+\frac{\ell}{r-\ell/2}\right) \cong$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\cong \frac{q}{4\pi\varepsilon\ell}\frac{\ell}{r-\ell/2} \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon r}, \qquad (r \gg \ell),$$

(3) unde am folosit aproximaţia logaritmului :

$$\ln(1+x) \cong x, \quad \text{dacă } |x| \ll 1. \tag{4}$$

Câmpul electric devine :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2 - \ell^2/4} \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}, \ (r \gg \ell). \tag{5}$$

Să transcriem formulele (1), (2) astfel :

$$E(r_1) = \frac{\lambda\ell}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_1(r_1+\ell)}, \quad (r_1 = r - \ell/2 > 0), \tag{6}$$

$$V(r_1) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\ln\left(1+\ell/r_1\right), \quad (\lambda = q/\ell), \tag{7}$$

unde λ este *densitatea liniară* de sarcină, iar r_1 - distanţa până la capătul proximal al barei.

Dacă tija se întinde la infinit spre stânga, atunci câmpul se obţine prin trecere la limită $\ell \to \infty$:

$$E(r_1) = \lambda : (4\pi\varepsilon r_1), \quad (r_1 > 0). \tag{8}$$

Deoarece câmpul scade *doar* invers proporţional cu distanţa, potenţialul nu poate fi ales zero la infinit ca în (2).

**** 1.1.66.** ***O tijă subţire de lungime ℓ este încărcată uniform cu densitate liniară de sarcină λ. Calculaţi câmpul şi potenţialul electric la distanţa*** y ***pe perpendiculara într-un capăt al tijei, ca în figură.***

Rezolvare. Alegem axele de coordonate şi *elementul* tijei dx cu sarcina $dq = \lambda\, dx$, ca în figură. Atunci

$$dE_x = dE\cdot\cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{-x}{r} = \frac{-\lambda x\, dx}{4\pi\varepsilon\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

$$dE_y = dE\cdot\sin\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{y}{r} = \frac{\lambda y\, dx}{4\pi\varepsilon\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

Prin integrare, găsim

$$E_x = \int_{-}^{0}\frac{-\lambda x\, dx}{4\pi\varepsilon\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \int_{-}^{0}\frac{-\lambda\, d(x^2)}{2\cdot 4\pi\varepsilon\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{-\ell}^{0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{\ell^2+y^2}} \right), \tag{2}$$

$$E_y = \int_{-\ell}^{0} \frac{\lambda y \, dx}{4\pi\varepsilon \left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon} \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{-\ell}^{0} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y} \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+y^2}}. \tag{3}$$

Potenţialul se poate găsi cu ajutorul expresiilor câmpului (2), (3). Considerând potenţialul zero la infinit şi alegând drumul de integrare după axa *Oy* (câmpul *electrostatic* fiind ***conservativ***, integrala ***nu*** depinde de drumul ales !), avem prin definiţie :

$$V(y) = -\int_{\infty}^{y} \vec{E} \, d\vec{r} = -\int_{\infty}^{y} E_y \, dy = -\frac{\lambda\ell}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{y\sqrt{\ell^2+y^2}} =$$

$$= -\frac{\lambda\ell}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{\ell} \ln \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}}{y} \right] \Bigg|_{\infty}^{y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}}{y}. \tag{4}$$

Putem obţine potenţialul şi direct ca sumă a potenţialelor produse ***separat şi independent*** de fiecare sarcină *elementară* d*q* (*principiul* ***suprapunerii***) :

$$V(y) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} = \int_{-\ell}^{0} \frac{\lambda \, dx}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) \right] \Bigg|_{-\ell}^{0} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{y}{-\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{\ell+\sqrt{\ell^2+y^2}}{y}.$$

La distanţe *mari*, $y \gg \ell$, câmpul şi potenţialul se apropie de valorile pentru o sarcină *punctiformă* $q = \lambda \ell$:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2/y^2}} \right) \cong \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y} \frac{\ell^2}{2y^2} \sim \frac{1}{y^3}, \tag{5}$$

ceea ce este neglijabil faţă de

$$E_y \cong \frac{\lambda\ell}{4\pi\varepsilon y^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon y^2} \sim \frac{1}{y^2}. \tag{6}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alt caz particular : tijă *infinită* , $\ell \to \infty$:

$$E_x = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y}, \quad E = \frac{\sqrt{2}\cdot\lambda}{4\pi\varepsilon y}, \tag{7}$$

iar potenţialul nu poate fi normat zero la infinit, deoarece câmpul scade doar invers proporţional cu distanţa !

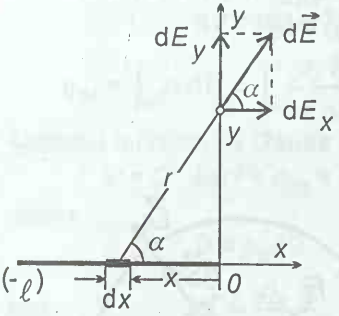


Fig.1.1.66

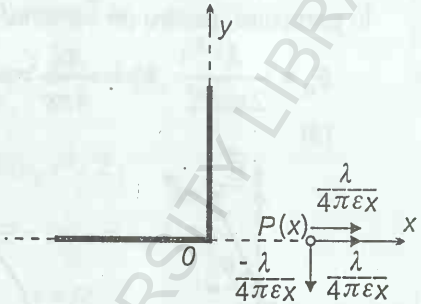


Fig.1.1.67

*** * 1.1.67.** ***Un fir suficient de*** **lung** ***este îndoit în unghi drept şi încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină*** λ ***. Calculaţi câmpul electric în punctul*** P(x) ***ca în figură .***

Rezolvare. Folosim rezultatele de la problemele precedente 1.1.65 şi 1.1.66 şi aplicăm ***principiul suprapunerii*** :

$$E_x = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon x}, \quad E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon x}, \quad E = \frac{\sqrt{5}\cdot\lambda}{4\pi\varepsilon x}.$$

*** * 1.1.68.** ***Un arc de cerc, subţire, de rază*** R ***şi deschidere*** α, ***este încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină*** λ. ***Calculaţi câmpul şi potenţialul electric în centrul de curbură al arcului.***

Rezolvare. Alegem ***elementul*** de arc de cerc $ds = R\,d\theta$ ca în figură . Câmpul produs de *elementul* de sarcină $dq = \lambda\, ds$ se descompune ca în figură . Componentele "orizontale" se vor anula reciproc din cauza simetriei : la fiecare element dq dat există un element identic, aşezat simetric faţă de "verticală" al cărui câmp are o componentă "orizontală" egală în modul şi de sens opus. Prin urmare, trebuie să sumăm *algebric* numai componentele "verticale" :

$$E_y = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon R^2}\sin\theta = \int_{\pi/2-\alpha/2}^{\pi/2+\alpha/2} \frac{\lambda R\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon R^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi/2-\alpha/2}^{\pi/2+\alpha/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Potenţialul în centrul de curbură (normat zero la infinit) este suma potenţialelor produse ***separat şi independent*** de fiecare sarcină *elementară* d*q* (***principiul suprapunerii***) :

$$V_o = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon R} = \int_{\pi/2-\alpha/2}^{\pi/2+\alpha/2} \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\alpha . \qquad (2)$$

În particular, pentru un *semiinel* ($\alpha = \pi$) :

$$E_o = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}, \quad V_o = \frac{\pi\lambda}{4\pi\varepsilon} = \frac{\lambda}{4\varepsilon}. \qquad (3)$$

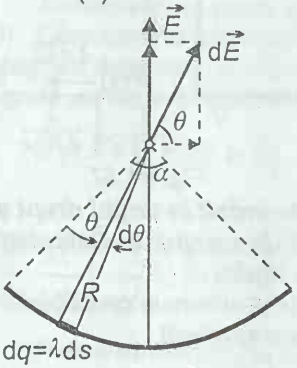


Fig.1.1.68

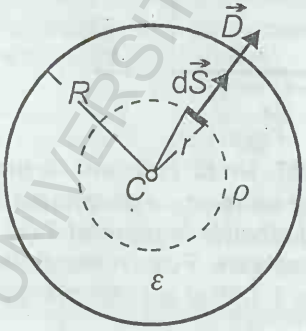


Fig.1.1.69

*** * 1.1.69.** ***O sferă de rază*** R ***şi constantă dielectrică*** ε ***este încărcată cu o sarcină electrică*** distribuită ***cu densitatea*** $\rho = \rho_o / r$ ***, unde*** r ***este distanţa până la centrul sferei. Aflaţi câmpul şi potenţialul electric.***

Rezolvare. Aplicăm *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei : $\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{int} = \int_V \rho\, dV$, (1)

unde ρ este densitatea de sarcină : $\rho = dq : dV$.

Luăm o sferă ("gaussiană") concentrică de rază $r < R$. În virtutea *simetriei sferice* câmpul este *radial* şi depinde numai de distanţa *r* până la centrul sferei, de aceea fluxul prin sfera aleasă, se calculează imediat :

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S D\, dS = D\oint_S dS = D\cdot S = D\cdot 4\pi r^2 . \qquad (2)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Sarcina conţinută în interiorul sferei alese (gaussiene) se calculează uşor. În virtutea *simetriei sferice* alegem elementul de volum dV sub formă de *pătură sferică* de rază r şi grosime infinit mică dr :

$$dV = S \cdot dr = 4\pi r^2 dr . \qquad (3)$$

Aceeaşi expresie se obţine luând *diferenţiala* (variaţia infinitezimală) volumului unei sfere $4\pi r^3/3$ datorită variaţiei razei cu dr :

$$dV = d(4\pi r^3/3) = 4\pi r^2 dr .$$

$$q_{int} = \int_V \rho \, dV = \int_0^r \frac{\rho_o}{r} 4\pi r^2 \, dr = 4\pi\rho_o \frac{r^2}{2} . \qquad (4)$$

Aplicând *teorema lui* **Gauss** :

$$\Psi = D \cdot 4\pi r^2 = q_{int} = 4\pi\rho_o r^2/2 ,$$

găsim

$$D = \rho_o/2 , \quad E = D/\varepsilon = \rho_o/(2\varepsilon)$$

sau

$$\vec{E} = \frac{\rho_o}{2\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad r < R . \qquad (5)$$

Pentru a afla câmpul în **exteriorul** sferei date de rază R , alegem o sferă (gaussiană) de rază $r > R$ şi exact ca înainte calculăm fluxul şi aplicăm *teorema lui Gauss* (q - sarcina totală a sferei) :

$$D \cdot 4\pi r^2 = q = 4\pi\rho_o R^2/2 , \quad D = q : (4\pi r^2) = \rho_o R^2/(2r^2) ,$$

$$E = D/\varepsilon_o = q : (4\pi\varepsilon_o r^2) = \rho_o R^2/(2\varepsilon_o r^2) ,$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \rho_o \frac{R^2}{2\varepsilon_o r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad r > R . \qquad (6)$$

Potenţialul în **exteriorul** sferei :

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_\infty^r E \, dr = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}\Bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}, \; r \geq R , \qquad (7)$$

câmpul şi potenţialul sferei în **exterior** sunt ***la fel ca şi cum*** sarcina sferei ar **fi** concentrată în ***centrul*** sferei .

În **interiorul** sferei *potenţialul* va fi :

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_\infty^R E \, dr - \int_R^r E \, dr =$$

$$= -\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho_o}{2\varepsilon} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R} + \frac{\rho_o}{2\varepsilon}(R - r), \; r \leq R . \qquad (8)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

**** 1.1.70.** ***Spaţiul din jurul unui punct este încărcat cu sarcină distribuită după legea*** $\rho = \rho_0 e^{-ar^3}$ ***. Calculaţi câmpul electric.***

Rezolvare. Aplicăm *teorema lui* **Gauss** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei : $\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{int} = \int_V \rho\, dV$, (1)

unde ρ este densitatea de sarcină : $\rho = dq : dV$.

Alegem o suprafaţă sferică (gaussiană) de rază r cu centrul în punctul central al distribuţiei de sarcină . Datorită *simetriei sferice* câmpul este *radial* şi dependent numai de distanţa r până la centru, de aceea fluxul se calculează uşor :

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S D\, dS = D\oint_S dS = D\cdot S = D\cdot 4\pi r^2 . \quad (2)$$

Pe de altă parte, pentru calculul sarcinii conţinute în interior alegem elementul de volum dV sub forma unei pături sferice de rază r , deci de arie $dS = 4\pi r^2$, şi de grosime *infinit mică* dr :

$$dV = S\cdot dr = 4\pi r^2 dr , \quad (3)$$

expresie ce se obţine şi *diferenţiind* volumul sferei de rază r , ca urmare a creşterii razei cu dr : $dV = d(4\pi r^3/3) = 4\pi r^2 dr$.

$$q_{int} = \int_V \rho\, dV = \int_0^r \rho_0 e^{-ar^3} 4\pi r^2\, dr = \int_0^r \rho_0 e^{-ar^3} \frac{4\pi}{3} d(r^3) =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\rho_0 \frac{1}{a} e^{-ar^3}\Big|_0^r = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho_0}{a}\left(1 - e^{-ar^3}\right). \quad (4)$$

Teorema lui Gauss dă :

$$\Psi = D\cdot 4\pi r^2 = q_{int} = [4\pi\rho_0/(3a)]\,(1 - e^{-ar^3}) ,$$

$$E = D/\varepsilon = [\rho_0/(3\varepsilon a r^2)]\,(1 - e^{-ar^3}) . \quad (5)$$

Pentru distanţe *mici* aproximăm exponenţiala :

$$e^x = 1 + x + \cdots , \quad (|x| \ll 1) , \quad (6)$$

$$E \cong [\rho_0/(3\varepsilon)]\, r \sim r , \text{ pentru } r \ll 1/\sqrt[3]{a} . \quad (7)$$

Pentru distanţe *mari* ($ar^3 \gg 1$) :

$$E \cong \rho_0 : (3\varepsilon a r^2) \sim 1 : r^2 , \text{ pentru } r \gg 1/\sqrt[3]{a} . \quad (8)$$

**** 1.1.71.** ***O placă dielectrică plan-paralelă infinită de grosime*** b ***este încărcată uniform cu densitatea de sarcină*** ρ. ***Aflaţi câmpul şi potenţialul electric.***

Rezolvare. În virtutea *simetriei* câmpul este perpendicular pe feţele plane paralele şi dependent doar de distanţa până la planul median . Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul inducţiei (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei închise : $\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{int} = \int_V \rho\, dV$, (1)

unde ρ este *densitatea de sarcină* : $\rho = dq : dV$.

Alegem suprafaţa închisă gaussiană sub forma unui cilindru de înălţime $2r$ aşezat simetric cu axa perpendiculară pe feţele plane, atunci fluxul se calculează uşor : prin cele două baze fluxul este $D \cdot S$, iar prin suprafaţa laterală este zero (deoarece $\vec{D} \perp d\vec{S}$ deci $\vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$) : $\Psi = 2D\cdot S = q_{int} = \rho S\cdot 2r$,

$D = \rho\, r$, $E = D/\varepsilon = (\rho/\varepsilon)\, r$, $r < b/2$. (2)

Pentru **exteriorul** plăcii procedăm asemănător :

$\Psi = 2D\cdot S = q_{int} = \rho Sb$, $D = \rho b/2$, $E = \rho b/(2\varepsilon_o) = \text{const}$. (3)

Deoarece câmpul *nu* se anulează la infinit , considerăm ***potenţialul*** zero pe planul median . Atunci în **interiorul** plăcii :

$$V = -\int_0^r \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_0^r \frac{\rho}{\varepsilon} r\, dr = -\frac{\rho}{2\varepsilon} r^2 , \quad r \le b/2 . \tag{4}$$

În **exteriorul** plăcii : $V = -\int_0^r \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_0^{b/2} E\, dr - \int_{b/2}^r E\, dr =$

$$= -\int_0^{b/2} \frac{\rho}{\varepsilon} r\, dr - \int_{b/2}^r \frac{\rho}{2\varepsilon_o} b\, dr = -\frac{\rho}{8\varepsilon} b^2 - \frac{\rho b}{2\varepsilon_o}\left(r - \frac{b}{2}\right), r \ge b/2. \tag{5}$$

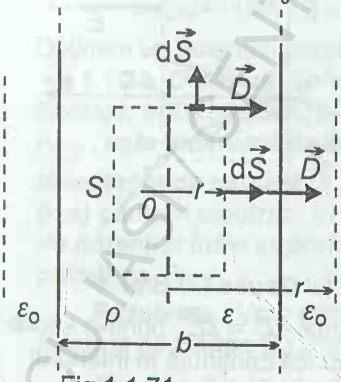


Fig.1.1.71

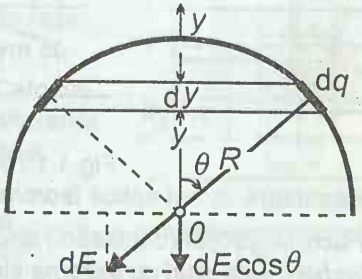


Fig.1.1.72

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

** 1.1.72. ***O emisferă de rază*** R ***este încărcată uniform cu sarcină electrică de densitate superficială*** σ ***. Calculaţi potenţialul şi câmpul electric în centrul emisferei.***

Rezolvare. Potenţialul se calculează imediat, deoarece toate sarcinile sunt situate la aceeaşi distanţă R de centrul emisferei :

$$V = q : (4\pi\varepsilon R) = \sigma R : (2\varepsilon) . \qquad (1)$$

Pentru orice *element* de sarcină dq există unul identic aşezat *simetric* faţă de axa *Oy*, astfel încât componentele lor perpendiculare pe axa *Oy* se distrug reciproc . Câmpul rezultant va fi deci de-a lungul axei *Oy* şi trebuie să sumăm (integrăm) doar componentele dE_y :

$$E = \int dE \cdot \cos\theta = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon R^2} \frac{y}{R} , \qquad (2)$$

dar $dq = \sigma\, dS$, unde alegem aria ***elementară*** sub formă de ***strat*** *sferic* de înălţime infinit mică dy. Aria laterală a acestuia este

$$dS = 2\pi R\, dy , \quad \text{deci} \quad dq = \sigma\, dS = 2\pi\sigma R\, dy , \qquad (3)$$

$$E = \int_0^R \frac{2\pi\sigma R dy}{4\pi\varepsilon R^2} \frac{y}{R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon R^2} \int_0^R y\, dy = \frac{\sigma}{4\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} . \qquad (4)$$

Mai general, dacă avem o ***calotă sferică*** de înălţime h , atunci potenţialul şi câmpul în centrul de curbură (integrăm după y de la $R - h$ până la R) :

$$V = \sigma h : (2\varepsilon) ,$$

$$E = [\sigma h : (4\varepsilon R^2)]\ (2R - h) = [q : (8\pi\varepsilon R^3)]\ (2R - h) . \qquad (5)$$

** 1.1.73. ***O placă dielectrică infinită, de grosime*** d ***, este încărcată uniform cu densitatea de sarcină*** ρ ***. Aflaţi câmpul şi potenţialul electric produs de placa încărcată şi reprezentaţi-le grafic.***

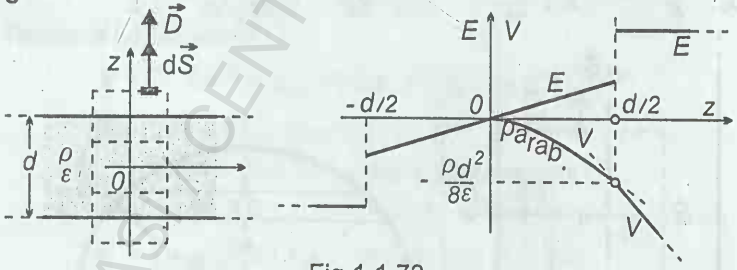


Fig.1.1.73

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei închise :

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}} . \qquad (1)$$

Datorită *simetriei* câmpul trebuie să fie *perpendicular* pe placă şi dependent doar de *distanţa* până la planul median al plăcii. De aceea alegem suprafaţa închisă (gaussiana) simetric , ca în figură . Fluxul prin suprafaţa *laterală* este *nul* deoarece $\vec{D} \perp d\vec{S}$, rămâne fluxul prin cele două baze, de arie S fiecare : $\Psi = 2D \cdot S$. (2)

a) În **interiorul** plăcii, pentru $|z| < d/2$:

$\Psi = 2D \cdot S = q_{int} = \rho S \cdot 2|z|$,

$E = D / \varepsilon = (\rho / \varepsilon)\,|z|$, $\quad |z| < d/2$. (3)

În **exteriorul** plăcii , pentru $|z| > d/2$: $\quad \Psi = 2D \cdot S = \rho S d$,

$E = D / \varepsilon_0 = \rho d : (2\varepsilon_0) = \text{const}$, $\quad |z| > d/2$. (4)

b) Deoarece câmpul **nu** se anulează la infinit, nu putem alege potenţial zero la infinit, de aceea vom alege potenţial zero pe planul median al plăcii, căci în virtutea *simetriei* potenţialul depinde numai de coordonata z . Prin *definiţie* : $V(z) = -\int_0^z E\,dz$. (5)

Câmpul electrostatic fiind ***conservativ***, integrala din (5) **nu** depinde de drumul de integrare (alegem axa Oz) .

Pentru $z < d/2$ avem (3) :

$$V(x) = -\int_0^z \frac{\rho}{\varepsilon} z\,dz = -\frac{\rho}{2\varepsilon} z^2 , \qquad z < d/2 , \tag{6}$$

iar pentru $z > d/2$:

$$V(x) = -\int_0^z E\,dz = -\int_0^{d/2} \frac{\rho}{\varepsilon} z\,dz - \int_{d/2}^z \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\,dz =$$

$$= -\rho d^2 : (8\varepsilon) - [\rho : (2\varepsilon_0)]\,(z - d/2) . \tag{7}$$

Obţinem un potenţial *parabolic* în placă şi *liniar* în exteriorul ei .

**** 1.1.74.** ***O pătură dielectrică cilindrică, infinit de lungă, de raze*** $R_{1,2}$ ***, este încărcată uniform cu densitatea de sarcină*** ρ. ***Calculaţi: a) câmpul electric, b) diferenţa de potenţial între suprafeţele cilindrice*** $R_{1,2}$.

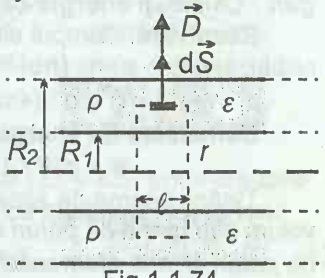


Fig.1.1.74

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* **Gauss** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei închise :

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_{\text{int}} \,. \qquad (1)$$

În virtutea *simetriei cilindrice*, câmpul este *radial* şi dependent numai de distanţa r până la axa cilindrilor. De aceea alegem suprafaţa închisă (gaussiana) sub forma unui cilindru de rază r, concentric cu pătura cilindrică dată. Atunci fluxul printr-o astfel de suprafaţă se calculează imediat : fluxul prin cele două baze ("capace") este zero, deoarece pe ele $\vec{D} \perp \mathrm{d}\vec{S}$, rămâne fluxul prin supra-faţa *laterală* pe care D = const , deci $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D \cdot 2\pi r$. (2)

a) În **interior**, pentru $r < R_1$, avem $q_{\text{int}} = 0$, deci câmpul este *nul* : $\Psi = D \cdot 2\pi r\ell = q_{\text{int}} = 0$, $D = \varepsilon E = 0$, $r < R_1$. (3)

În pătura cilindrică, pentru $R_1 < r < R_2$:

$$\Psi = D \cdot 2\pi r\ell = q_{\text{int}} = \rho\ell\pi(r^2 - R_1^2) \,,$$

$$E = D / \varepsilon = [\rho : (2\varepsilon)]\,(r - R_1^2 / r) \,. \qquad (4)$$

În **exteriorul** păturii, pentru $r > R_2$:

$$\Psi = D \cdot 2\pi r\ell = q_{\text{int}} = \rho\ell\pi(R_2^2 - R_1^2) \,,$$

$$E = D / \varepsilon = [\rho : (2\varepsilon)]\,(R_2^2 - R_1^2) / r \,. \qquad (5)$$

b) Prin *definiţie*, ***diferenţa de potenţial*** este :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\mathrm{d}r =$$

$$= [\rho : (2\varepsilon)]\,[(R_2^2 - R_1^2)/2 - R_1^2 \ln (R_2 / R_1)] \,. \qquad (6)$$

*** * 1.1.75.** ***O sferă conductoare este încărcată până la sarcina*** q ***şi potenţialul*** V ***şi este situată într-un mediu dielectric omogen . Calculaţi*** **energia *câmpului electric al sferei.***

Rezolvare. Câmpul electric al unei sfere conductoare este radial, simetric sferic (**nul** în *interiorul* sferei):

$$E = q : (4\pi\varepsilon r^2) \,, \quad r \geq R \,. \qquad (1)$$

Densitatea de energie a câmpului electric este

$$w = \mathrm{d}W / \mathrm{d}V = (1/2)\,\varepsilon\, E^2 \,. \qquad (2)$$

Ţinând seama de *simetria sferică*, vom alege elemente de volum sub formă de *pături sferice* concentrice. Volumul unei astfel de *pături sferice* ***elementare*** este : $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. (3)

Această expresie se poate obţine în 3 moduri : fie ca volumul unei pături de arie $S = 4\pi r^2$ (suprafaţa sferei) şi de grosime infinit mică $\mathrm{d}r$, fie ca o creştere *infinitezimală* a volumului unei sfere

$V = (4\pi/3)\, r^3$, datorită creşterii *infinitezimale* a razei cu dr , deci ca ***diferenţiala*** : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}[(4\pi/3)\, r^3] = 4\pi r^2\, \mathrm{d}r$,
fie ca diferenţa volumelor a două sfere de rază $r + \mathrm{d}r$ şi rază r :

$$\mathrm{d}V = (4\pi/3)(r + \mathrm{d}r)^3 - (4\pi/3)\, r^3 =$$

$$= 4\pi r^2\, \mathrm{d}r + 4\pi r(\mathrm{d}r)^2 + (4\pi/3)\,(\mathrm{d}r)^3 \;\rightarrow\; 4\pi r^2\, \mathrm{d}r ,$$

deoarece ceilalţi termeni sunt infiniţi mici de ordin *superior* (dispar la limită faţă de primul termen *liniar* în dr) .

Prin urmare, energia câmpului electric într-o pătură sferică *elementară* concentrică cu sfera conductoare este

$$\mathrm{d}W = w \cdot \mathrm{d}V = (1/2)\, \varepsilon\, E^2 \cdot 4\pi r^2\, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\frac{q^2}{\left(4\pi\varepsilon r^2\right)^2}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2} . \qquad (4)$$

Integrăm de la raza sferei R până la infinit :

$$W = \int_R^\infty \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon R} = \frac{1}{2}\,qV , \qquad (5)$$

unde V este *potenţialul* sferei conductoare.

**** 1.1.76.** ***O sferă de rază*** R ***şi constantă dielectrică*** ε ***este încărcată uniform pe volum cu sarcina*** q ***. Aflaţi câmpul şi potenţialul sferei. Calculaţi energia câmpului electric în interiorul şi în exteriorul sferei.***

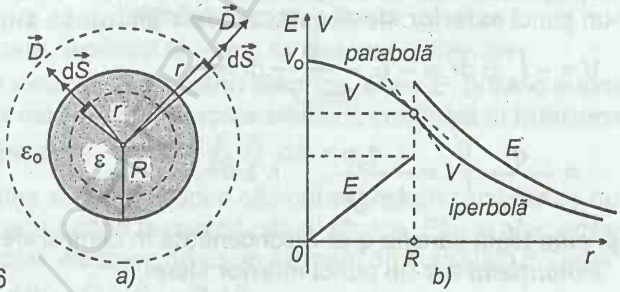


Fig.1.1.76

Rezolvare. Aplicăm *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în interiorul suprafeţei închise : $\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = q_{\mathrm{int}}$. (1)

În virtutea *simetriei sferice* câmpul este ***radial*** şi depinde numai de r . Avem de considerat două cazuri : câmpul şi potenţialul : a) în **interiorul** sferei şi b) în **exteriorul** sferei .

a) Alegem o suprafaţă sferică (gaussiană) concentrică, de rază $r < R$. *Fluxul elementar* $d\Psi$ al inducţiei electrice printr-un *element* de suprafaţă dS este $d\Psi = \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\,dS$ şi deoarece D este *constant* pe toată suprafaţa considerată, fluxul total rezultă imediat:

$$\Psi = \oint_S d\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S D\,dS =$$

$$= D\cdot\oint_S dS = D\cdot S = D\cdot 4\pi r^2 . \qquad (2)$$

Conform *teoremei lui* **Gauss**:

$$\Psi = D\cdot 4\pi r^2 = q_{int} = q\cdot r^3/R^3 , \quad D = qr:(4\pi R^3) = \rho r/3 ,$$

$$E = D/\varepsilon = [q:(4\pi\varepsilon R^3)]\,r = [\rho:(3\varepsilon)]\,r , \quad r \le R , \qquad (3)$$

unde ρ este *densitatea de sarcină*: $\rho = q:[(4\pi/3)R^3]$.

b) Exact ca mai sus, alegem o suprafaţă (gaussiană) sferică concentrică de rază $r > R$. Fluxul *elementar* va fi $d\Psi = \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\,dS$. Sumat pe toată sfera şi egalat cu sarcina din **interior** q (conform *teoremei lui* **Gauss**) dă

$$D\cdot 4\pi r^2 = q , \quad D = q:(4\pi r^2) , \quad E = q:(4\pi\varepsilon_0 r^2) , \quad r \ge R , \qquad (4)$$

ca şi cum toată sarcina q **ar fi** concentrată în centrul sferei. Observăm că la *traversarea* suprafeţei sferei câmpul D este ***continuu***, pe când câmpul electric E suferă un ***salt*** (dacă $\varepsilon \neq \varepsilon_0$).

c) Vom considera potenţialul zero la infinit. Atunci potenţialul într-un punct **exterior** sferei este prin *definiţie*:

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} , \quad r \ge R , \qquad (5)$$

ca şi cum toată sarcina q ***ar fi*** concentrată în centrul sferei.

Potenţialul într-un punct **interior** sferei:

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_\infty^R E\,dr - \int_R^r E\,dr =$$

$$= -\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \int_R^r \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\,r\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Bigg|_\infty^R - \frac{q}{4\pi\varepsilon R^3}\frac{r^2}{2}\Bigg|_R^r =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\varepsilon R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) . \qquad (6)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În centrul sferei : $$V_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_r}\right). \quad (7)$$

d) ***Densitatea de energie*** a câmpului electric este :

$$w = \mathrm{d}W/\mathrm{d}V = (1/2)\,\varepsilon\,E^2 . \quad (8)$$

Energia câmpului electric din **interiorul** sferei :

$$W_i = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon R^3}\right)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{R^6}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\cdot 5R} . \quad (9)$$

Energia câmpului electric din **exteriorul** sferei :

$$W_e = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_o\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\right)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o}\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o R} . \quad (10)$$

**** 1.1.77.** ***O pătură sferică de raze*** $R_{1,2}$ ***şi constantă dielectrică*** ε ***este încărcată uniform cu sarcina*** q . ***a) Aflaţi potenţialele celor două suprafeţe sferice care delimitează pătura . b) Calculaţi energia câmpului electric din pătură .***

Rezolvare. Aplicăm *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în **interiorul** suprafeţei *închise* : $$\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = q_{\mathrm{int}} . \quad (1)$$

În virtutea *simetriei sferice* câmpul este ***radial*** şi depinde numai de distanţa *r* până la centrul păturii sferice. *Fluxul* ***elementar*** $\mathrm{d}\Psi$ al inducţiei electrice printr-un element de suprafaţă d*S* este

$$\mathrm{d}\Psi = \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = D\,\mathrm{d}S . \quad (2)$$

Luăm o suprafaţă (gaussiană) sferică concentrică de rază $r > R_2$. Fluxul prin această suprafaţă se calculează imediat, deoarece *D* = const pe această suprafaţă :

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D\,\mathrm{d}S = D\cdot\oint_S \mathrm{d}S = D\cdot S = D\cdot 4\pi r^2 .$$

Acest flux trebuie să fie egal, conform *teoremei lui* ***Gauss***, cu sarcina din **interiorul** suprafeţei gaussiene alese, deci în cazul ales , *q* ,

$D \cdot 4\pi r^2 = q\,, \qquad D = q : (4\pi r^2)\,,$

$E = D / \varepsilon_0 = q : (4\pi\varepsilon_0 r^2), \qquad r > R_2\,.$ (3)

Asemănător, pentru cealaltă sferă gaussiană de rază $r \in (R_1, R_2)$, avem

$D \cdot 4\pi r^2 = q_{int} = q\,(r^3 - R_1^3) : (R_2^3 - R_1^3)\,,$

$E = [q : (4\pi\varepsilon r^2)]\,(r^3 - R_1^3) : (R_2^3 - R_1^3)\,, \quad r \in (R_1, R_2).$ (4)

În **interiorul** sferei R_1 câmpul este *nul*, deoarece $q_{int} = 0$.

a) Considerând ***potenţialul*** zero la infinit, avem

$$V_2 = -\int_{\infty}^{R_2} \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{\infty}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\,, \quad (5)$$

$$V_1 = -\int_{\infty}^{R_1} \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_2} \ldots - \int_{R_2}^{R_1} \ldots = V_2 -$$

$$-\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\,dr = V_2 - \frac{q}{4\pi\varepsilon\left(R_2^3 - R_1^3\right)}\int_{R_2}^{R_1}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr =$$

$$= V_2 + \frac{q}{4\pi\varepsilon\left(R_2^3 - R_1^3\right)}\,\frac{1}{2R_2}\,(R_2 - R_1)^2(R_2 + 2R_1)\,. \quad (6)$$

Diferenţa de potenţial pe pătura sferică :

$V_1 - V_2 = [\rho / (3\varepsilon)]\,[1 / (2R_2)]\,(R_2 - R_1)^2(R_2 + 2R_1)$, (7) unde ρ este *densitatea de sarcină*.

b) ***Densitatea de energie*** a câmpului electric este

$$w = dW / dV = (1/2)\,\varepsilon\,E^2\,. \quad (8)$$

Atunci energia totală a câmpului electric din pătură este

$$W = \int \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon\left(R_2^3 - R_1^3\right)}\right]^2 \left[r - \frac{R_1^3}{r^2}\right]^2 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon R_2} \cdot \frac{(R_2 - R_1)^3}{5\left(R_2^3 - R_1^3\right)^2}\,(R_2^3 + 3R_2^2R_1 + 6R_2R_1^2 + 5R_1^3)\,. \quad (9)$$

În particular, pentru o sferă *plină* $R_1 = 0$ şi regăsim rezultatul de la problema precedentă 1.1.76. Energia câmpului din **exteriorul** păturii coincide cu energia W_e de la problema precedentă 1.1.76.

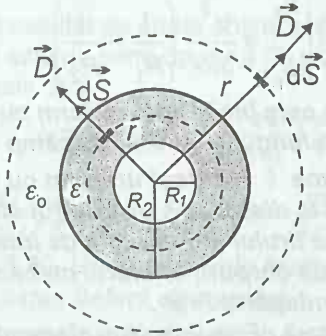


Fig.1.1.77

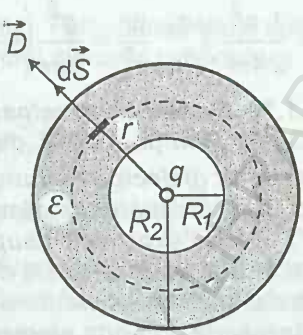


Fig.1.1.78

* * 1.1.78. ***O sarcină punctiformă*** q ***este înconjurată concentric de o pătură sferică dielectrică de permitivitate*** ε ***şi raze*** $R_{1,2}$ ***Calculaţi energia câmpului electric din dielectric.***

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* pentru a afla câmpul electric din dielectric.

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în **interiorul** suprafeţei *închise* :

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{int} . \qquad (1)$$

Vom alege o suprafaţă sferică gaussiană concentrică de rază *r*, trecând prin dielectric. Datorită *simetriei sferice* câmpul este radial şi depinde numai de distanţa *r* până la sarcina *q* , de aceea fluxul se calculează imediat :

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D\, dS = D \cdot \oint_S dS = D \cdot S = D \cdot 4\pi r^2 . \qquad (2)$$

Conform *teoremei lui* ***Gauss*** :

$$\Psi = D \cdot 4\pi r^2 = q, \quad D = q : (4\pi r^2), \quad E = D/\varepsilon = q : (4\pi\varepsilon r^2). \qquad (3)$$

Densitatea de energie a câmpului electric este :

$$w = dW/dV = (1/2)\, \varepsilon\, E^2 = (1/2)\, D\, E = D^2 : (2\varepsilon) . (4)$$

Vom alege ***elementul*** *de volum* sub formă de ***pătură*** *sferică* infinit de *subţire*, de arie $S = 4\pi r^2$ şi de grosime *dr* :

$$dV = S\, dr = 4\pi r^2\, dr , \qquad (5)$$

rezultat care se poate obţine şi prin ***diferenţierea*** (*variaţia*) volumului $V = (4\pi/3) r^3$ al unei sfere, ca urmare a creşterii *infinitezimale* a razei cu *dr* : $dV = d[(4\pi/3) r^3] = 4\pi r^2\, dr$.

Energia *electrică* din dielectric :

$$W = \int w\, dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \quad (6)$$

**** 1.1.79.** ***O sferă conductoare este încărcată uniform cu sarcina*** Q ***. Pe direcţia radială, de-a lungul unei linii de câmp este aşezat un fir dielectric de lungime*** ℓ ***încărcat uniform cu sarcina*** q ***, având capătul proximal la distanţa*** R ***de centrul sferei . Aflaţi : a) forţa exercitată asupra firului , b) energia de interacţie electrostatică dintre cele două corpuri, c) lucrul mecanic care trebuie efectuat pentru a îndepărta firul .***

Rezolvare. a) Forţa ***elementară*** d*F* asupra unui ***element*** de fir cu sarcina d*q* este

$$dF = dq \cdot E = (q/\ell)dr \cdot Q : (4\pi\varepsilon r^2) \quad (1)$$

şi este orientată radial, de aceea se însumează *algebric* :

$$F = \int_R^{R+\ell}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon R(R+\ell)}. \quad (2)$$

b) Pentru elementul d*q* *energia* ***potenţială*** în câmpul sferei este

$$dE_p = V\,dq = [Q : (4\pi\varepsilon r)]\,(q/\ell)\,dr, \quad (3)$$

de unde prin însumare :

$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\int_R^{R+\ell}\frac{dr}{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{R+\ell}{R}. \quad (4)$$

Această energie potenţială de interacţie este normată zero la separarea infinită a corpurilor.

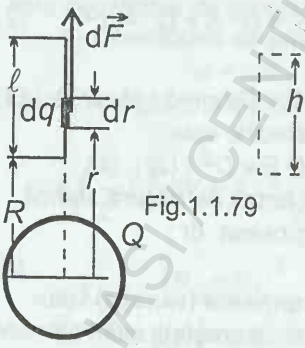


Fig.1.1.79

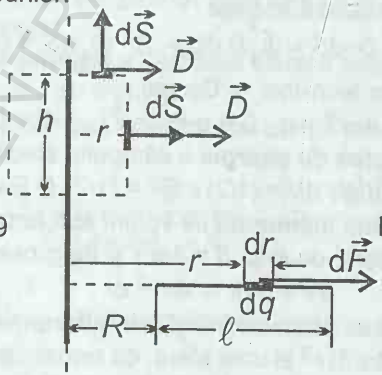


Fig.1.1.80

c) ***Lucrul mecanic*** care trebuie efectuat (din exterior) este egal cu variaţia energiei potenţiale :

$$L = E_p(\infty) - E_p(R) = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{R+\ell}{R}. \quad (5)$$

Acest rezultat se poate obţine şi direct. Forţa care trebuie aplicată firului este de sens opus lui (2) şi lucrul mecanic care trebuie efectuat este deci:

$$L = \int_R^\infty -F\mathrm{d}R = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}R}{R(R+\ell)} =$$

$$= -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\int_R^\infty \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\ell}\right)\mathrm{d}R = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{R}{R+\ell}\Bigg|_R^\infty = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{R}{R+\ell}. \quad (6)$$

*** * 1.1.80.** ***Un fir rectiliniu foarte lung este încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină*** λ ***. De-a lungul unei linii de câmp este aşezat un fir dielectric de lungime*** ℓ***, încărcat uniform cu sarcina*** q***, având capătul proximal la distanţa*** R ***de firul infinit. Aflaţi forţa exercitată asupra firului*** ℓ ***.***

Rezolvare. Să calculăm câmpul produs de firul rectiliniu lung . Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul *inducţiei* (deplasării) electrice $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ printr-o suprafaţă ***închisă*** este egal cu ***sarcina*** electrică conţinută în **interiorul** suprafeţei *închise* : $\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = q_{\text{int}}$. (1)

În virtutea *simetriei* ***cilindrice*** câmpul este *radial* şi dependent numai de distanţa *r* până la fir . De aceea alegem suprafaţa închisă (gaussiană) sub forma unui cilindru de rază *r* concentric cu firul , ca în figură . Atunci fluxul prin cele două baze este nul (deoarece $\vec{D} \perp \mathrm{d}\vec{S}$) şi rămâne fluxul prin suprafaţa *laterală* :

$$\Psi = D\cdot S_{\text{lat}} = D\cdot 2\pi r\ell = q_{\text{int}} = \lambda\,\ell\,,$$

de unde $E = D/\varepsilon = \lambda : (2\pi\varepsilon r)$, (2)

câmpul variază invers proporţional cu distanţa .

Forţa *elementară* d*F* asupra unui ***element*** de sarcină d*q* al firului ℓ este

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\cdot\vec{E}\,, \quad \mathrm{d}F = (q/\ell)\,\mathrm{d}r\cdot\lambda : (2\pi\varepsilon r)\,. \quad (3)$$

Aceste forţe sunt pe aceeaşi direcţie *radială* şi se însumează *algebric* :

$$F = \int_R^{R+\ell}\frac{q\lambda}{\ell\cdot 2\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{R+\ell}{R}\,. \quad (4)$$

* *

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2. CAPACITATEA ELECTRICĂ

1.2.1. ***O sferă metalică se încarcă de la o maşină electrostatică cu ajutorul unei plăci care după fiecare contact cu sfera este din nou încărcată de la maşină până la sarcina*** $Q = 20$ nC. ***Aflaţi sarcina*** maximă ***a sferei, dacă după primul contact sarcina sferei este*** $q_1 = 4{,}0$ nC .

Rezolvare. Notăm C_{pl} - capacitatea plăcii şi cu V potenţialul dat de maşina electrostatică, atunci

$$Q = C_{pl} V , \quad V = Q : C_{pl} . \tag{1}$$

După primul contact placa şi sfera vor ajunge la acelaşi potenţial V' şi *conservarea sarcinii* electrice dă :

$$Q = C_{pl} V' + C_{sf} V' = C_{pl} V' + q_1 ; \quad q_1 = C_{sf} V' . \tag{2}$$

La al doilea contact *conservarea sarcinii* dă :

$$Q + q_1 = C_{pl} V'' + C_{sf} V'' . \tag{3}$$

Comparând cu (2) se vede că potenţialul final creşte mereu şi la *limită* atinge valoarea V , atunci

$$q_{max} = C_{sf} V = q_1 \cdot V / V' = q_1 (Q / C_{pl}) : [(Q - q_1) / C_{pl}] =$$

$$= q_1 \cdot Q : (Q - q_1) = 5{,}0 \text{ nC} . \tag{4}$$

1.2.2. ***Două bile metalice de raze*** $R_1 = 1{,}0$ cm , $R_2 = 5{,}0$ cm ***sunt încărcate cu sarcinile*** $q_1 = 80$ nC , $q_2 = 40$ nC ***şi situate la o distanţă fixă*** ($\gg R_{1,2}$) ***. Cufundate într-un dielectric lichid forţa de interacţie dintre sarcini este*** F ***. Scoţând bilele din dielectric şi conectându-le pentru scurt timp printr-un conductor, se măsoară după aceea, din nou, forţa de interacţie şi se găseşte o forţă de*** n = 1,5 ori ***mai mare . Aflaţi*** ε_r .

Rezolvare. Prin punerea în contact a bilelor sarcina se redistribuie, astfel încât *potenţialele* bilelor se *egalează* (altfel, la orice diferenţă de potenţial ar curge curent electric).

Capacitatea *unei sfere izolate este* $4\pi\varepsilon R$. Bilele din problemă sunt la distanţă *mare* între ele, deci se pot aproxima cu sfere izolate. Atunci *conservarea sarcinii* electrice dă :

$$q_1 + q_2 = C_1 V' + C_2 V' = 4\pi\varepsilon (R_1 + R_2) V' . \quad (1)$$

Sarcinile finale de pe bile vor fi atunci

$$q_1'_{,2} = C_{1,2} V' = (q_1 + q_2) \cdot R_{1,2} : (R_1 + R_2) . \quad (2)$$

Forţele de interacţie, iniţială şi finală, sunt

$$F = q_1 q_2 : (4\pi\varepsilon_o \varepsilon_r r^2) , \quad F' = q_1' q_2' : (4\pi\varepsilon_o r^2) =$$

$$= (q_1 + q_2)^2 R_1 R_2 : [4\pi\varepsilon_o r^2 (R_1 + R_2)^2] = n \cdot F ,$$

$$\varepsilon_r = n\,[q_1 q_2 : (q_1 + q_2)^2]\,[(R_1 + R_2)^2 : R_1 R_2] = 2{,}4 . \quad (3)$$

1.2.3. ***Ştiind formula câmpului electric dintr-un condensator plan-paralel ideal*** $E = U / d$ ***, deduceţi de aici intensitatea câmpului electric de o parte şi de alta a unei plăci infinite încărcată uniform cu densitatea de sarcină*** σ ***, precum şi forţa cu care se atrag armăturile unui condensator plan-paralel .***

Rezolvare. Aplicăm ***principiul suprapunerii*** : *Fiecare armătură a condensatorului produce* ***separat şi independent*** *propriul său câmp.* Armăturile fiind identice, doar sarcinile lor sunt de semn opus, şi câmpurile vor fi identice, dar de sens opus (de la sarcinile **pozitive** liniile de câmp **pornesc**, pe când la cele *negative - sosesc*).În virtutea *simetriei* câmpul trebuie să fie *perpendicular* pe armături. Dealtfel, la orice ***conductor*** în ***electrostatică***, câmpul este ***perpendicular*** *pe suprafaţa conductorului* .

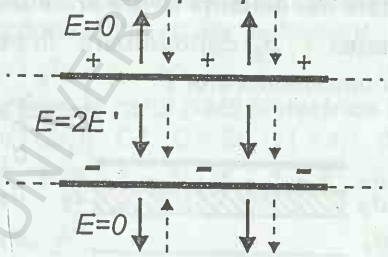


Fig.1.2.3

Am reprezentat în figură, cu linii pline câmpul produs de sarcinile pozitive, şi cu linii întrerupte, câmpul produs de sarcinile negative . Câmpul produs de o armătură de o parte şi de alta a acesteia este acelaşi în modul. Între armături câmpurile se adună, iar în afară se scad. Fiind egale :

$$E' = (1/2)\, U / d = (1/2)\, Q / (dC) = (1/2)\, Q / (\varepsilon S) = \sigma / (2\varepsilon) . \quad (1)$$

Formula se obţine elegant cu ajutorul *teoremei lui* ***Gauss*** .

Prin urmare, câmpul de o parte şi de alta a unui plan infinit, încărcat, este omogen şi uniform (constant).

În **exteriorul** unui condensator plan-paralel ideal câmpul este *zero* .

Pentru a afla ***forţa de atracţie*** dintre armături **nu** putem aplica *legea lui* ***Coulomb***, deoarece sarcinile armăturilor **nu** sunt *punctiforme*, ci dimpotrivă au dimensiuni *mari* faţă de distanţa

dintre armături. Dar putem aplica formula de *definiţie* a câmpului :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \tag{2}$$

unde $\vec{E}$ este câmpul produs de toate **celelalte** sarcini, **afară de** q .

În cazul nostru o armătură cu sarcina Q se află în câmpul *uniform şi omogen* produs de *cealaltă* armătură, deci forţa exercitată de câmp asupra acestei armături este :

$$F = Q\,E' = Q \cdot E/2 = Q \cdot \sigma/(2\varepsilon) = (1/2)\,Q \cdot U/d\,. \tag{3}$$

1.2.4. ***a) Arătaţi că capacitatea unui condensator plan-paralel nu depinde de poziţia plăcii dielectrice sau conductoare introduse paralel cu armături . b) Între armăturile unui condensator cu aer se introduce o placă de grosime cât jumătate din distanţa dintre armături : b_1) dielectrică cu permitivitatea ε , b_2) conductoare. În ce raport se schimbă capacitatea condensatorului ?***

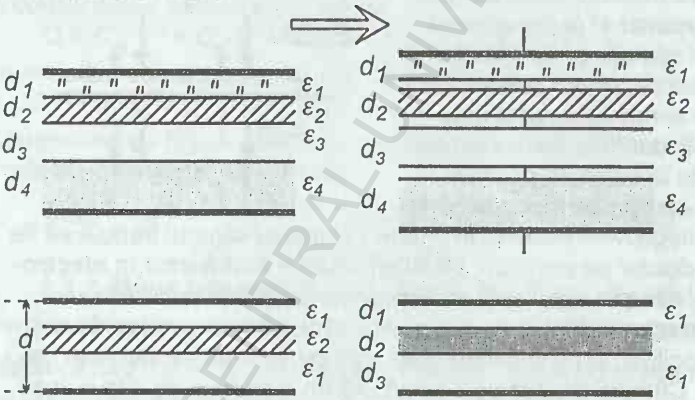


Fig.1.2.4

Rezolvare. Un condensator plan-paralel cu mai multe straturi plan-paralele de dielectrici diferiţi este echivalent cu mai multe condensatoare legate în *serie*, ca în figură. În adevăr, armăturile condensatoarelor pot fi oricât de subţiri şi le putem apropia de la condensatoarele vecine până la alipire şi apoi le putem scoate, deoarece reprezintă o *foiţă conductoare neutră* aşezată pe o suprafaţă *echipotenţială* (teorema "*metalizării*" suprafeţei echipotenţiale).

a) Ţinând seama de echivalenţa de mai sus, avem în cazul plăcii **dielectrice** : $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 =$

$$= d_1/(\varepsilon_1 S) + d_2/(\varepsilon_2 S) + d_3/(\varepsilon_1 S) = (d - d_2)/(\varepsilon_1 S) + d_2/(\varepsilon_2 S), \tag{1}$$

deci nu depinde separat de $d_{1,3}$. Placa dielectrică poate fi de exemplu, *lipită* la una din armături.

În cazul plăcii **conductoare**: $1/C = 1/C_1 + 1/C_3 =$

$= d_1/(\varepsilon_1 S) + d_3/(\varepsilon_1 S) = (d_1 + d_3)/(\varepsilon_1 S) = (d - d_2)/(\varepsilon_1 S)$, (2)

deci placa conductoare poate fi de exemplu lipită de una din armături.

Observăm că o placă **dielectrică** de grosime d şi permitivitate *relativă* ε_r poate fi înlocuită cu un strat de ***aer*** de grosime echivalentă $d_o = d/\varepsilon_r < d$: $C = \varepsilon_o\varepsilon_r S : d = \varepsilon_o S : (d/\varepsilon_r) = \varepsilon_o S : d_o$. (3)

În cazul plăcii **metalice** introduse între armături, trebuie pus $\varepsilon \to \infty$ (sau $\varepsilon_r \to \infty$).

Atunci condensatoarele cu diferite straturi dielectrice paralele cu armături, reprezintă un singur condensator cu ***aer***, *echivalent*:

$$C = \varepsilon_o S : [\sum (d_k/\varepsilon_{rk})]. \quad (4)$$

b) Aplicăm rezultatele precedente. În cazul plăcii **dielectrice**: $C = \varepsilon_c S : d$, $C' = \varepsilon_o S : [d/2 + d/(2\varepsilon_r)]$, $C' : C = 2\varepsilon_r : (1 + \varepsilon_r)$, (5)

$\varepsilon_r \in [1, \infty) \to C' \in [C, 2C)$.

În cazul plăcii **conductoare**:

$$C' = \varepsilon_o S : (d/2), \quad C'/C = 2. \quad (6)$$

Capacitatea condensatorului se dublează deoarece distanţa dintre armături se reduce la jumătate.

1.2.5. ***Aflaţi raportul capacităţilor celor două condensatoare din figură, cunoscând permitivităţile dielectricilor.***

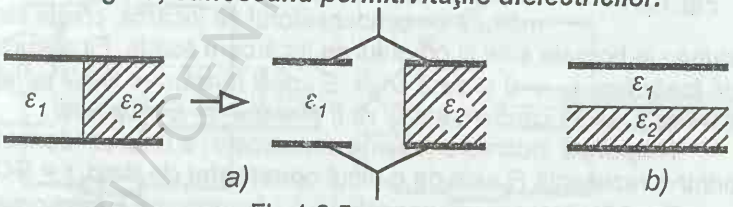


Fig.1.2.5

Rezolvare. Cazul b) l-am studiat mai sus. Cazul a) este echivalent cu două condensatoare legate în **paralel** (neglijăm efectele de *margine*), aşa cum se vede imediat din figură.

$C_a = C_1 + C_2 = (\varepsilon_1 S/2) : d + (\varepsilon_2 S/2) : d = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) S : (2d)$. (1)

$1/C_b = 1/C_1' + 1/C_2' = (d/2) : (\varepsilon_1 S) + (d/2) : (\varepsilon_2 S) =$

$= [d/(2S)] \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) : (\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, (2)

$C_a : C_b = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 : (4\varepsilon_1\varepsilon_2) = (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})^2 : (4\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}) > 1$. (3)

Egalitatea $C_a = C_b$ este posibilă numai dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

1.2.6. ***Un condensator plan cu aer a fost încărcat până la o tensiune*** U = 220 V, ***apoi după deconectare de la sursă, armăturile au fost depărtate între ele până la o distanţă de*** n = 3,0 ori ***mai mare şi condensatorul a fost cufundat în ulei de permitivitate relativă*** $\varepsilon_r = 2{,}20$. ***Aflaţi tensiunea finală dintre armături.***

Rezolvare. După deconectare armăturile rămân *izolate*, deci *sarcina* de pe fiecare armătură *se conservă* : $Q = C_o U$. Prin depărtarea armăturilor capacitatea scade de *n* ori: $C = C_o / n$, iar prin introducerea dielectricului capacitatea creşte de ε_r ori. Prin urmare,

$$Q = C_o U = (C_o / n)U' = (C_o \varepsilon_r / n)U'' \rightarrow U'' = U \cdot n / \varepsilon_r = 300 \text{ V} .$$

1.2.7. ***a) Până la ce tensiune finală se încarcă condensatorul din montajul dat în figură ? b) Câtă căldură se degajă în procesul de încărcare? c)Cu ce randament are loc încărcarea?***

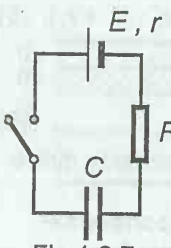


Fig.1.2.7

Rezolvare. a) Fie *i* curentul la un moment dat în procesul încărcării. Atunci tensiunea la bornele condensatorului va fi în acest moment :

$$u = E - (r + R)i , \qquad q = Cu . \tag{1}$$

Iniţial condensatorul nu era încărcat $q = 0$ deci $u = 0$ şi în momentul închiderii întrerupătorului curentul va fi

$$I_o = E : (r + R) , \; t = 0 , \; u = 0, \tag{2}$$

ca şi cum condensatorul ar fi *scurt-circuitat*. Pe măsură ce condensatorul se încarcă, creşte tensiunea la bornele sale şi curentul de încărcare scade. Final curentul de încărcare $i \rightarrow 0$ şi deci $u \rightarrow E$, deci *tensiunea finală până la care se încarcă condensatorul va fi chiar t.e.m. E a bateriei* .

Timpul *de încărcare* (sau de *descărcare*) a unui condensator printr-o rezistenţă *R* este de ordinul ***constantei de timp*** $\tau = RC$.

După încărcarea condensatorului, el reprezintă o ***întrerupere*** de circuit (în *curent* ***continuu***) şi deci nu avem cădere de potenţial pe rezistorul din circuit .

b) **Căldura** degajată se poate calcula **indirect** pe baza bilanţului ***energetic*** . Condensatorul se încarcă cu sarcina $Q = CU = CE$, care trece deci prin baterie, prin urmare bateria efectuează un lucru mecanic $W_B = EQ$.

Pe de altă parte condensatorul înmagazinează energia $W_C = (1/2)\,C\,U^2 = (1/2)\,C\,E^2$.

Diferenţa dintre aceste energii reprezintă ***căldura Joule*** degajată pe rezistoarele din circuit :

$$Q_J = W_B - W_C = EQ - (1/2)CE^2 = (1/2)CE^2 = W_C \,. \qquad (3)$$

Prin urmare, *jumătate* din energia furnizată de baterie o ia *condensatorul* şi *jumătate* se disipă sub formă de *căldură* pe rezistoare. Aceasta din urmă nu depinde de mărimea rezistenţei, valoarea rezistenţei determină ***timpul*** în care această căldură se disipă (~ *constanta de timp* $\tau = RC$) .

c) Randamentul este evident

$$\eta = W_C : W_B = 1/2 = 50\ \% \,. \qquad (4)$$

1.2.8. ***Distanţa dintre armăturile unui condensator plan-paralel cu aer, după încărcarea sa, este mărită de*** n ori . ***Aflaţi în ce raport se schimbă mărimile:*** C , Q , U , F , E , W ***şi faceţi bilanţul energiilor, dacă comutatorul a) este deschis , b) rămâne închis.***

Rezolvare. a) $C = \varepsilon_0 S / d$, $C' = \varepsilon_0 S / (nd) = C / n$; $Q' = Q$ (comutatorul este deschis şi se conservă sarcina); $U' = Q' / C' = Q : (C / n) = n\,U$; $E' = U' / (nd) = E$; $F' = (1/2)\,QE = F$ (forţa de atracţie dintre armături) ; $W' = (1/2)\,Q'\,U' = (1/2)\,QnU = n\,W$; energia condensatorului creşte pe seama lucrului mecanic efectuat din *exterior* pentru a depărta armăturile împotriva forţei de *atracţie* dintre armături.

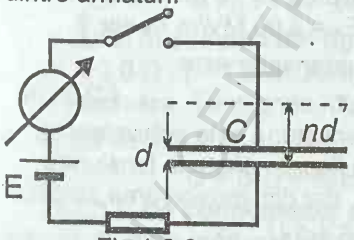


Fig.1.2.8

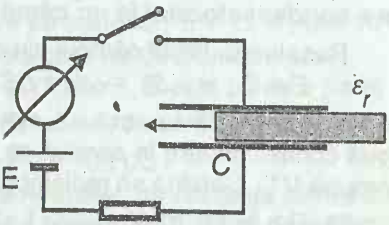


Fig.1.2.9

b) $C' = C / n$; $U' = U =$ E (condensatorul se încarcă de fiecare dată până la *t.e.m.* E a bateriei); $Q' = C'\,U' = Q / n$ - deoarece *scade* capacitatea, condensatorul se ***descarcă parţial*** ; $E' = U' / (nd) = E / n$; $F' = (1/2)\,Q'\,E' = F / n^2$; $W' = (1/2)\,C'\,U'/2 = W / n$ - energia condensatorului **scade**, *lucrul mecanic* efectuat din **exterior** pentru depărtarea armăturilor împotriva forţei de *atracţie* dintre armături, plus scăderea energiei condensatorului merg

parţial în *căldura Joule* şi parţial la **încărcarea** bateriei (prin baterie trece un curent ***invers***, de ***descărcare parţială*** a condensatorului).

1.2.9. ***Între armăturile unui condensator plan-paralel cu aer, după încărcarea sa, se introduce o placă*** dielectrică ***(de aceeaşi grosime*** d ***ca şi distanţa dintre armături). Aflaţi în ce raport se schimbă mărimile :*** C , Q , U , F , E , W ***şi faceţi bilanţul*** energiilor ***dacă comutatorul a) este deschis, b) rămâne închis.***

Rezolvare. a) $C = \varepsilon_0 S / d$, $C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r S / d = \varepsilon_r C$; $Q' = Q$ (comutatorul este *deschis* !); $U' = Q' / C' = U / \varepsilon_r$; $E' = U' / d = E / \varepsilon_r$; $F' = (1/2) Q' E' = F / \varepsilon_r$; $W' = (1/2) Q' U' = W / \varepsilon_r$ - condensatorul face lucru mecanic pozitiv prin *atragerea* dielectricului pe seama energiei sale care *scade* .

b) $C' = C \varepsilon_r$; $U' = U = E$ (condensatorul se încarcă până la *t.e.m.* a bateriei) ; $Q' = C' U' = Q \varepsilon_r$ - creşte capacitatea şi trece un curent de **încărcare** *suplimentară* a condensatorului ; $E' = U' / d = E$; $F' = (1/2) Q' E' = F \varepsilon_r$; $W' = (1/2) C' U'^2 = \varepsilon_r W$ - **bateria** furnizează energie pentru creşterea energiei condensatorului (trece curent de **încărcare** *suplimentară*), pentru lucrul de atragere a dielectricului şi pentru *căldura Joule* .

1.2.10. ***Un condensator plan-paralel aşezat vertical şi având ca dielectric petrol cu permitivitatea relativă*** $\varepsilon_r = 2{,}0$, ***a fost încărcat şi apoi deconectat de la sursă, astfel încât intensitatea câmpului electric*** E = 2,00 MV/m ***. Ce fracţiune din petrol trebuie să se scurgă afară pentru ca să se producă o clacare a condensatorului la un câmp*** E_c = 3,00 MV/m ***în aer ?***

Rezolvare. Iniţial câmpul din condensator este

$$E = Q : (\varepsilon_0 \varepsilon_r S) \rightarrow Q = ES \varepsilon_0 \varepsilon_r \ . \qquad (1)$$

După scurgerea parţială a petrolului, condensatorul este echivalent cu două condensatoare în *paralel*, ca în figură , aflate la tensiunea comună U' . Sarcina se redistribuie, dar din *conservarea sarcinii* rezultă : $Q = (\varepsilon_0 f S / d) U' + [\varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - f) S / d] U' \rightarrow$

$$U' = Qd : \{S \varepsilon_0 [f + (1 - f) \varepsilon_r]\} \ . \qquad (2)$$

Pentru a se produce *clacarea* trebuie o tensiune între armături

$$E_c = U' / d \rightarrow U' = E_c d \ . \qquad (3)$$

Egalând cu (2), rezultă fracţiunea cerută :

$$f + (1 - f) \varepsilon_r = Q : (\varepsilon_0 S E_c) = ES \varepsilon_0 \varepsilon_r : (\varepsilon_0 S E_c) = \varepsilon_r E / E_c \ ,$$

$$f = [\varepsilon_r : (\varepsilon_r - 1)] (1 - E / E_c) = 2/3 \ . \qquad (1)$$

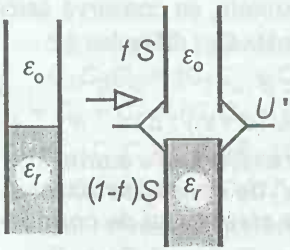


Fig.1.2.10

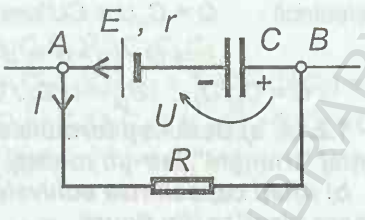


Fig.1.2.12

1.2.11. ***Între armăturile plan-paralele ale unui condensator cu aer, cu distanţa dintre armături*** d = 6,0 mm, ***se introduce o placă metalică de grosime*** d_1 = 1,0 mm ***flancată de două plăci dielectrice de grosime*** d_2 = 2,0 mm ***şi constantă dielectrică*** ε_r = = 4,0 . ***Condensatorul format se încarcă până la o tensiune*** U = = 100 V , ***după care se deconectează şi se scot toate plăcile interioare. Care va fi tensiunea dintre armături ?***

Rezolvare. Conform problemei 1.2.4, condensatorul compus este *echivalent* cu două condensatoare în *serie* :

$$C = \varepsilon_o S : [(d - d_1 - 2d_2) + 2d_2 / \varepsilon_r] . \qquad (1)$$

Condensatorul odată încărcat, fiind deconectat, *sarcina se conservă* :

$$Q = CU = \varepsilon_o SU : [(d - d_1 - 2d_2) + 2d_2 / \varepsilon_r] =$$

$$= C_o U' = \varepsilon_o SU' : d , \qquad (2)$$

de unde rezultă tensiunea U' :

$$U' = U \cdot d : [(d - d_1 - 2d_2) + 2d_2 / \varepsilon_r] = 300 \text{ V} . \qquad (3)$$

1.2.12. ***În schema din figură se cunosc :*** E = 12 V , C = 10 μF , R = 2,0 Ω , I = 1,0 A . ***Aflaţi sarcina de pe condensator .***

Rezolvare. Tensiunea între punctele A, B este pe de o parte RI, iar pe de alta $E - U$:

$$RI = E - U , \quad U = E - RI , \qquad (1)$$

$$Q = CU = C(E - RI) = 100 \ \mu\text{C} . \qquad (2)$$

1.2.13. ***Un condensator plan-paralel, cu distanţa dintre armături*** d , ***este încărcat până la o tensiune*** U. ***După deconectare, se introduce paralel cu armături o placă, izolantă , respectiv conductoare, de grosime*** d ' . ***În ce raport se schimbă tensiunea dintre armături şi care va fi tensiunea pe placa introdusă ?***

Rezolvare. Capacitatea condensatorului cu diferite straturi dielectrice plan-paralele este (v. problema 1.2.4) :

$$C' = \varepsilon_o S : (d - d' + d' / \varepsilon_r) , \quad \text{(pentru metale } \varepsilon_r \to 0) . \qquad (1)$$

După deconectare, armăturile fiind *izolate*, se *conservă sarcina electrică* : $Q = C_o U = CU' \rightarrow U' = U \cdot C_o / C' =$

$$= U \cdot (d - d' + d'/\varepsilon_r) : d\,, \qquad (2)$$

$$Q = C_{pl}\, U_{pl}\,, \quad U_{pl} = U\, C_o / C_{pl} = U\,(d'/\varepsilon_r) : d\,. \qquad (3)$$

1.2.14. ***a) Deduceţi formulele de transformare a unui montaj "triunghi" într-un montaj "stea" de condensatoare .***

b) Aflaţi capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare identice din figură.

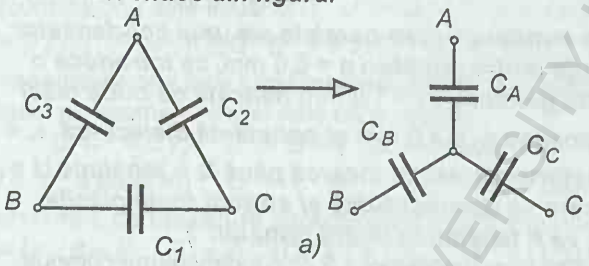


Fig.1.2.14 a

Rezolvare. a) Pentru ca cele două montaje să fie ***echivalente*** trebuie ca între oricare perechi de borne capacitatea echivalentă să fie *aceeaşi* în cele două montaje. Cu notaţiile din figură aceasta înseamnă :

$$1 : C_{AB} = 1 : [C_3 + C_1C_2/(C_1 + C_2)] = 1 : C_A + 1 : C_B\,. \qquad (1)$$

La triunghi, C_1 , C_2 sunt în *serie* şi rezultatul lor este în *paralel* cu C_3, iar la stea, C_C rămâne liber, iar $C_{A,B}$ sunt în *serie* . Altfel :

$$1 : C_{AB} = (C_1 + C_2) : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = 1 : C_A + 1 : C_B\,,$$
$$1 : C_{BC} = (C_2 + C_3) : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = 1 : C_B + 1 : C_C\,, \qquad (2)$$
$$1 : C_{CA} = (C_3 + C_1) : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = 1 : C_C + 1 : C_A\,.$$

Relaţiile se obţin prin *permutări circulare* în baza **simetriei.**

Prin adunarea membru cu membru a relaţiilor (2), obţinem :

$$(C_1 + C_2 + C_3) : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = 1 : C_A + 1 : C_B + 1 : C_C. \qquad (3)$$

Scăzând de aici pe rând ecuaţiile (2), găsim :

$$C_3 : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = 1 : C_C\,, \ldots$$

de unde

$$C_A = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) : C_1\,,$$
$$C_B = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) : C_2\,, \qquad (4)$$
$$C_C = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) : C_3$$

sau $C_A = C_2 + C_3 + C_2C_3 / C_1\,, \quad C_B = C_3 + C_1 + C_3C_1 / C_2\,,$

$$C_C = C_1 + C_2 + C_1C_2 / C_3\,, \qquad (5)$$

(relaţiile se obţin una din alta prin *permutări circulare*) .

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să calculăm produsul şi suma :

$$C_A C_B C_C = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1)^3 : C_1C_2C_3 , \quad (6)$$

$$C_A + C_B + C_C = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1)(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3) = \quad (7)$$

$$= (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1)^2 : (C_1C_2C_3) = C_A C_B C_C : (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1)$$

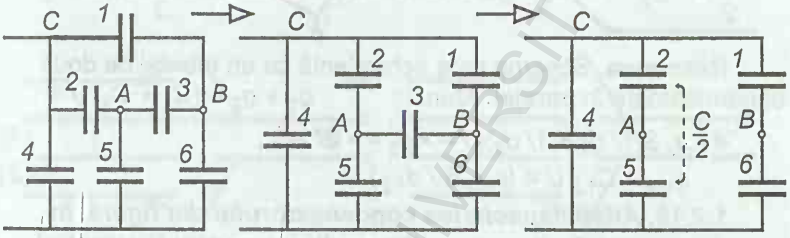
$$\rightarrow (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) = C_A C_B C_C : (C_A + C_B + C_C). \quad (8),(9)$$

Din (4) rezultă acum uşor :

$$C_1 = (C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) : C_A =$$

$$= C_A C_B C_C : [C_A(C_A + C_B + C_C)] = C_B C_C : (C_A + C_B + C_C),$$

$$C_2 = C_A C_C : (C_A + C_B + C_C),\ C_3 = C_A C_B : (C_A + C_B + C_C). \quad (10)$$



b)

Fig.1.2.14 b

b) Urmăriţi figurile. În virtutea **simetriei**, punctele A, B sunt la *acelaşi potenţial*. Asta se vede şi mai uşor dacă scoatem condensatorul *3* . **Teoremă** :

Dacă într-o reţea două puncte sunt la ***acelaşi potenţial****, le putem dezuni sau uni prin orice element, căci nu se schimbă distribuţia potenţialului.*

Scoţând condensatorul *3* dăm peste ultima schemă, din care rezultă $C_e = 2C$.

De altfel, mai general, putem transforma triunghiul ABC în stea .

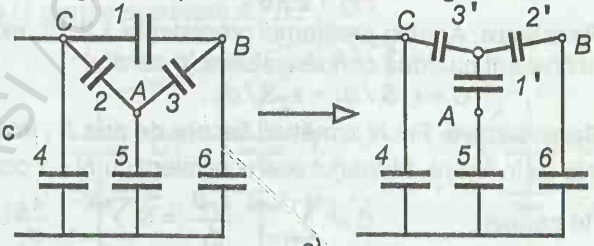


Fig.1.2.14 c

c)

Conform formulelor (4), (5) :

$$C_A = C_B = C_C = C + C + C^2/C = 3C . \quad (11)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Atunci 2' cu 6 în *serie* dau $3C \cdot C : (3C + C) = 3C/4$, la fel 1' cu 5 în *serie* dau $3C/4$, şi (2', 6) în *paralel* cu (1', 5) dau $3C/2$, care în *serie* cu 3' dă $(3C \cdot 3C/2) : [3 + 3/2)C] = C$, care în *paralel* cu 4 dă $2C$.

1.2.15. ***Pentru condensatorul din figură se dau*** $d_1 = 1{,}0$ mm, $d_2 = 10$ mm, $S = 500$ cm^2, $\varepsilon_r = 2{,}0$, $U = 100$ V. ***Aflaţi*** q_3.

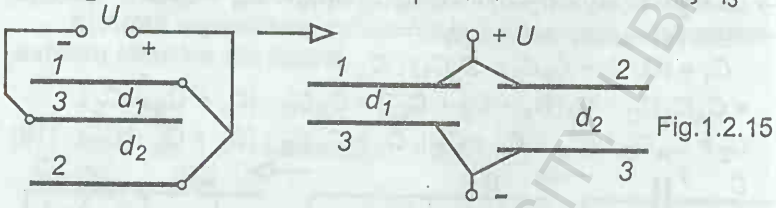


Fig.1.2.15

Rezolvare. Schema este echivalentă cu un montaj de două condensatoare în paralel. Atunci : $q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U =$

$$= \varepsilon_o \varepsilon_r S(1/d_1 + 1/d_2)U = - q_3 = - 97 \text{ nC}, \quad (1)$$

$$q_{1,2} = C_{1,2}U = (\varepsilon_o \varepsilon_r S / d_{1,2})\, U. \quad (2)$$

1.2.16. ***Aflaţi capacitatea condensatorului din figură, în care se cunosc*** S, $d_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2}$. **Generalizare** ***pentru*** N ***armături.***

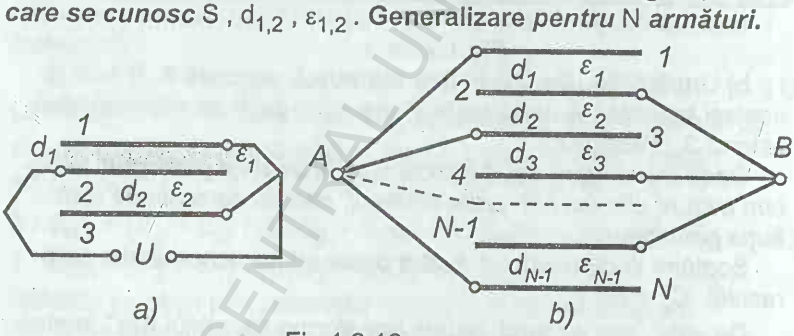


Fig.1.2.16

Rezolvare. Analog problemei precedente 1.2.15, montajul este echivalent cu două condensatoare în *paralel* :

$$C = \varepsilon_1 S / d_1 + \varepsilon_2 S / d_2 . \quad (1)$$

Generalizare. Fie *N* armături, fiecare de arie *S*, intercalate între ele ca în figură. Montajul ese echivalent cu *N* - 1 condensatoare în paralel :

$$C = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varepsilon_i S}{d_i} = S \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varepsilon_i}{d_i} . \quad (2)$$

Dacă distanţele sunt egale şi dielectricii identici (*N* - numărul total de armături), atunci

$$C = (N - 1)\, \varepsilon\, S / d . \quad (3)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

De obicei N este *par* : $N = 2n$, unde n este numărul de perechi de armături, atunci : $C = (2n - 1)\,\varepsilon\, S / d$. (4)

1.2.17. ***În sistemul din figură se dau*** S , d , ε_o ***(aer) . Aflaţi capacitatea sistemului. Cât devine capacitatea dacă una din armăturile exterioare se leagă la una din armăturile interioare?***

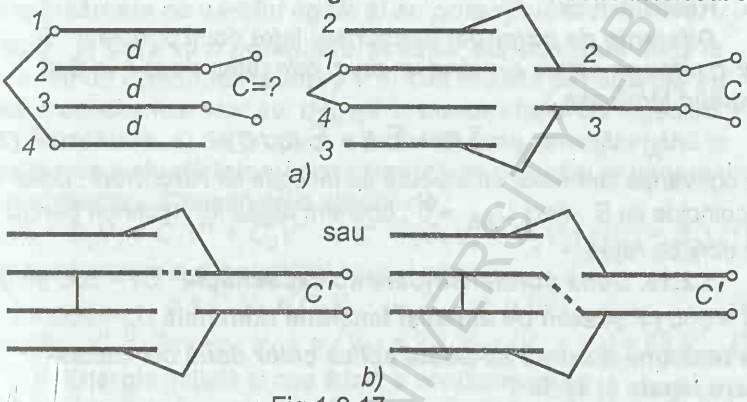


Fig.1.2.17

Rezolvare. Dedublând armăturile interioare, observăm că montajul este echivalent cu schema alăturată .

$C = (1/2)\,\varepsilon_o S / d + \varepsilon_o S / d = (3/2)\,\varepsilon_o S / d$. (1)

Legând una din armăturile exterioare la una din armăturile interioare, se elimină un condensator (în stânga figurii se elimină condensatorul de sus, iar în dreapta - cel de jos), astfel încât rămân două condensatoare în *paralel* : $C' = 2\varepsilon_o S / d$. (2)

1.2.18. ***Un număr*** n ***de condensatoare*** C_i ***, iniţial neîncărcate, sunt legate la bateriile cu t.e.m.*** E_i ***, ca în figură . Aflaţi tensiunea*** U ***dintre punctele*** *A* , *B* .

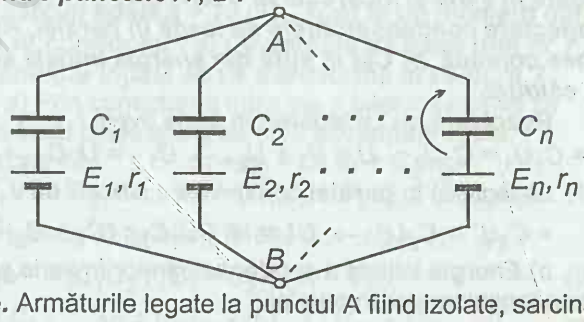


Fig.1.2.18

Rezolvare. Armăturile legate la punctul A fiind izolate, sarcina

lor totală se *conservă* (iniţial era zero) . Mergând de la A la B pe o ramură oarecare avem $U = -q_i / C_i + E_i$, $q_i = (E_i - U) C_i$, (1) pe care însumându-le avem :

$$\Sigma q_i = 0 = \Sigma (E_i - U) C_i = \Sigma E_i C_i - U \Sigma C_i ,$$

$$U = \Sigma E_i C_i \ : \Sigma C_k . \qquad (2)$$

Reamintim că

Diferenţa de potenţial *(tensiunea) între două puncte* A , B *într-o reţea se obţine alegând un drum prin reţea de la* A *la* B *şi sumând tensiunile :*

$$V_A - V_B = U_{AB} = \Sigma RI - \Sigma E + \Sigma (q / C) \qquad (3)$$

cu convenţia semnelor cunoscută de la *legile lui* ***Kirchhoff*** . Dacă A coincide cu B , deci $U_{AB} \equiv 0$, obţinem *legea lui Kirchhoff* pentru un *ochi de reţea* .

1.2.19. ***Două condensatoare au capacităţile*** $C_1 = 300$ pF ***şi*** $C_2 = 500$ pF ***şi sunt de aceeaşi*** **tensiune nominală** $U_n = 300$ V ***. Ce tensiune*** **maximă** ***se poate aplica celor două condensatoare legate în*** **serie** ***?***

Rezolvare. *Conservarea sarcinii* la legarea în *serie* dă :

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 . \qquad (1)$$

De aici se vede că pe condensatorul mai *mic* tensiunea va fi mai mare, deci la acesta se atinge întâi tensiunea nominală (după care apare pericolul *clacării*). În cazul nostru $C_1 < C_2$:

$$U_1 = U_n , \ C_1 U_n = C_2 U_2 , \quad U_2 = U_n \cdot C_1 / C_2 , \qquad (2)$$

$$U_{max} = U_1 + U_2 = U_n + U_n \cdot C_1 / C_2 =$$

$$= U_n (1 + C_1 / C_2) = 480 \text{ V} < 2 \cdot 300 \text{ V}. \qquad (3)$$

1.2.20. ***Două condensatoare*** $C_1 = 4{,}0$ μF , $C_2 = 6{,}0$ μF ***sunt legate în serie şi încărcate la o tensiune*** $U = 100$ V ***. După deconectare condensatoarele se leagă în paralel. Aflaţi : a) tensiunea comună, b) Cât la sută din energia iniţială se transformă în căldură.***

Rezolvare. a) La legarea în **serie** avem :

$$q = C_1 U_1 = C_2 U_2 , \ U = U_1 + U_2 \rightarrow U_{1,2} = U \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2). \qquad (1)$$

La legarea în **paralel** *conservarea sarcinii* dă : $2q = 2C_1 U_1 =$

$$= C_1 U' + C_2 U' \rightarrow U' = U \cdot 2C_1 C_2 : (C_1 + C_2)^2 = 48 \text{ V} . \qquad (2)$$

b) ***Energia*** iniţială a condensatoarelor în serie şi energia finală a condensatoarelor în paralel :

$W_o = (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,U^2$, $W' = (1/2)\,(C_1 + C_2)\,U'^2$. (3)

Căldura Joule $Q_J = W_o - W'$, prin urmare raportul cerut :

$$Q_J : W_o = 1 - W' : W_o = 1 - 4\,C_1C_2 : (C_1 + C_2)^2 =$$
$$= [(C_1 - C_2) : (C_1 + C_2)]^2 = 4{,}0\ \%\ . \quad (4)$$

1.2.21. ***Două corpuri conductoare, depărtate unul de altul, sunt încărcate cu sarcini egale şi au potenţialele*** $V_1 = 40$ V, $V_2 = 60$ V ***. a) Care va fi potenţialul acestor conductoare dacă le unim cu un conductor subţire ? b) Cât la sută din energia iniţială a conductoarelor se degajă în conductorul de legătură ?***

Rezolvare. a) Se produce o *redistribuire* a sarcinilor până la ***egalizarea potenţialelor*** (orice diferenţă de potenţial ar genera un curent electric). Conservarea sarcinii dă :

$C_1V_1 + C_2V_2 = C_1V' + C_2V' \rightarrow V' = (C_1V_1 + C_2V_2) : (C_1 + C_2)$,(1)

dar conductoarele aveau iniţial sarcini egale :

$$q = C_1V_1 = C_2V_2 \ \rightarrow\ C_{1,2} = q / V_{1,2}\ , \quad (2)$$

rezultă : $V' = 2q : (q / V_1 + q / V_2) = 2V_1V_2 : (V_1 + V_2) = 48$ V . (3)

b) **Energia** iniţială şi cea finală a conductoarelor :

$W_o = (1/2)C_1V_1^2 + (1/2)C_2V_2^2$, $W' = (1/2)C_1V'^2 + (1/2)C_2V'^2 =$

$= (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)^2$. (4)

Căldura Joule rezultă din bilanţul ***energiilor*** :

$$Q_J = W_o - W' = (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)^2, \quad (5)$$

$$Q_J : W_o = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)^2 : (C_1V_1^2 + C_2V_2^2)\ . \quad (6)$$

Ţinând seama că conductoarele aveau iniţial sarcini egale (2), rezultă : $Q_J : W_o =$

$$= [q_1q_2 : (q_1V_2 + q_2V_1)]\,(V_1 - V_2)^2 : (q_1V_1 + q_2V_2) = 4{,}0\ \%\ . \quad (7)$$

1.2.22. ***Două bile metalice de raze*** $R_1 = 15$ cm , $R_2 = 5{,}0$ cm ***şi încărcate cu sarcini egale*** $q = 20$ nC ***, sunt la un moment dat legate printr-un fir conductor . a) Ce sarcină va trece prin fir ? Cât la sută din energia iniţială se va transforma în căldură ?***

Rezolvare. a) Prin conectarea între ele a bilelor sarcinile se *redistribuie* astfel încât bilele ajung să aibă ***potenţiale*** *egale*. *Conservarea sarcinii* dă : $q_1 + q_2 = C_1V_1 + C_2V_2 =$

$= q_1' + q_2' = C_1V' + C_2V'$, $V' = (C_1V_1 + C_2V_2) : (C_1 + C_2)$. (1)

Sarcina care trece de la bila *1* la bila *2* : $\Delta q = q_1 - q_1' =$

$$= C_1V_1 - C_1V' = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)\ , \quad (2)$$

$$V_{1,2} = q_{1,2} / C_{1,2}\ ,\ \ \Delta q = (q_1C_2 - q_2C_1) : (C_1 + C_2)\ . \quad (3)$$

Capacitatea unei sfere (bile) conductoare izolate este $C = 4\pi\varepsilon R$, deci $\Delta q = (q_1R_2 - q_2R_1) : (R_1 + R_2) =$

$$= q \cdot (R_2 - R_1) : (R_1 + R_2) = -10 \text{ nC}, \quad (4)$$

(trec electroni de la bila *1* la bila *2*).

b) Putem prelua formula (6) de la problema precedentă 1.2.21. Ţinând seama că $V_{1,2} = q_{1,2} / C_{1,2}$, obţinem :

$$Q_J : W_o = (q_1C_2 - q_2C_1)^2 : [(C_1 + C_2)(q_1^2C_2 + q_2^2C_1)] \quad (5)$$

şi ţinând seama că ***capacitatea unei sfere conductoare izolate este*** $4\pi\varepsilon R$:

$$Q_J : W_o = (q_1R_2 - q_2R_1)^2 : [(R_1 + R_2)(q_1^2R_2 + q_2^2R_1)] =$$

$$= [(R_2 - R_1) : (R_1 + R_2)]^2 . \quad (6)$$

Observăm că ţinând seama de formula (5) de la problema precedentă 1.2.21 şi de formula (2), putem scrie căldura :

$$Q_J = (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)^2 = (1/2)\,\Delta q(V_1 - V_2), \quad (7)$$

rezultat la care ne-am putea aştepta ţinând seama că sarcina Δq parcurge o diferenţă de potenţial care scade de la valoarea iniţială $V_1 - V_2$ la cea finală $V' - V' = 0$.

1.2.23. ***Două sfere de raze*** $R_1 = 15$ cm , $R_2 = 10$ cm ***sunt încărcate până la potenţialele*** $V_1 = 20$ kV , $V_2 = 40$ kV. ***a) Ce sarcină va trece de pe sfera 1 pe sfera 2 dacă le unim printr-un fir conductor ? b) Câtă căldură se degajă în fir ?***

Rezolvare. a) Sferele se descarcă una pe cealaltă , până ajung la ***acelaşi potenţial.*** *Conservarea sarcinii* dă :

$$q_1 + q_2 = C_1V_1 + C_2V_2 = q_1' + q_2' = C_1V' + C_2V' ,$$

$$V' = (C_1V_1 + C_2V_2) : (C_1 + C_2) =$$

$$= (R_1V_1 + R_2V_2) : (R_1 + R_2) = 28 \text{ kV}, \quad (C = 4\pi\varepsilon R). \quad (1)$$

$$\Delta q = q_1 - q_1' = C_1V_1 - C_1V' = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2) =$$

$$= [4\pi\varepsilon R_1R_2 : (R_1 + R_2)]\,(V_1 - V_2) = -130 \text{ nC} \quad (2)$$

(trec electroni de pe sfera *1* pe sfera *2*).

b) $Q_J = (1/2)C_1V_1^2 + (1/2)C_2V_2^2 - (1/2)C_1V'^2 - (1/2)C_2V'^2 =$

$= (1/2)[\,C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(V_1 - V_2)^2 = (1/2)\Delta q(V_1 - V_2) = 1{,}3$ mJ.(3)

1.2.24. ***Două condensatoare*** $C_1 = 3{,}0\ \mu$F , $C_2 = 2{,}0\ \mu$F, ***încărcate până la tensiunile*** $U_1 = 300$ V , $U_2 = 200$ V , ***sunt conectate "în serie" , cu armăturile de semne opuse, ca în figură. a) Ce sarcină va curge prin conductorul de legătură ? b) Câtă căldură se degajă ?***

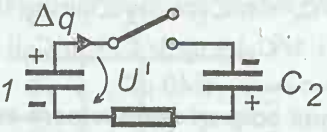


Fig.1.2.24

Rezolvare. Condensatoarele se vor descărca unul pe altul până când vor ajunge la *aceeaşi tensiune* între armături U'. *Conservarea sarcinii* electrice ($q = CU$) dă :

$C_1U_1 - C_2U_2 = C_1U' + C_2U'$, $U' = (C_1U_1 - C_2U_2) : (C_1 + C_2)$, (1)

unde în stânga apare *minus* deoarece sarcinile de pe armăturile legate între ele sunt de semne *opuse* .

$\Delta q = C_1U_1 - C_1U' = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(U_1 + U_2) = 600\ \mu C$.(2)

b) **Căldura Joule** se obţine din bilanţul ***energiilor*** :

$Q_J = W_o - W' = (1/2)C_1U_1^2 + (1/2)C_2U_2^2 - (1/2)(C_1 + C_2)U'^2 =$

$=(1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(U_1 + U_2)^2 = (1/2)\Delta q(U_1 + U_2) = 0{,}15$ J.(3)

Observăm iarăşi faptul că căldura degajată nu depinde de rezistoarele din circuit, acestea determină durata descărcării (*constanta de timp* $\tau = RC$).

1.2.25. ***Trei condensatoare au capacităţile*** $C_1 = 6{,}0\ \mu F$, $C_2 = 2{,}0\ \mu F$, $C_3 = 3{,}0\ \mu F$ ***. Dacă conectăm la condensatorul*** C_1 ***neîncărcat pe*** C_2 ***încărcat,*** C_1 ***se va încărca cu*** $q_2 = 30\ \mu C$ ***. Dacă conectăm la*** C_1 ***neîncărcat pe*** C_3 ***încărcat,*** C_1 ***se va încărca cu*** $q_3 = 40\ \mu C$***. Cu ce sarcină se va încărca*** C_1 ***(iniţial neîncărcat) dacă îl conectăm cu*** C_2 ***şi*** C_3 ***încărcate cu aceleaşi sarcini ca înainte şi legate în serie, ca în figură ?***

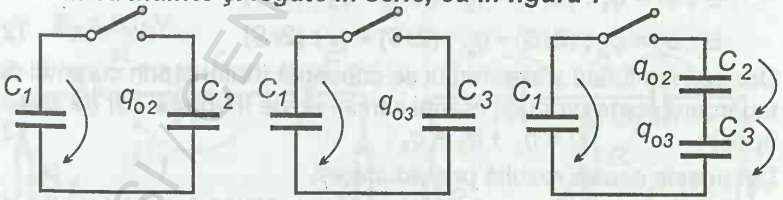


Fig.1.2.25

Rezolvare. Condensatorul C_2 (C_3) se descarcă pe C_1 până condensatoarele ajung la aceeaşi *tensiune comună* :

$q_2 : C_1 = (q_{o2} - q_2) : C_2$, $q_3 : C_1 = (q_{o3} - q_3) : C_3$; (1)

$q_{23} : C_1 = (q_{o2} - q_{23}) : C_2 + (q_{o3} - q_{23}) : C_3$. (2)

Scoatem $q_{o2} : C_2$ şi $q_{o3} : C_3$ din (1) şi înlocuim în (2) :

$q_{23} : C_1 = q_2(1/C_1 + 1/C_2) - q_{23} : C_2 + q_3(1/C_1 + 1/C_3) - q_{23} : C_3$,

$q_{23} = [q_2(1/C_1 + 1/C_2) + q_3(1/C_1 + 1/C_3)] : (1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3) =$

$= 40\ \mu C$. (3)

1.2.26. ***Două corpuri conductoare au o formă oarecare. Iniţial pe corpul*** A ***există o sarcină*** Q , ***iar*** B ***este neîncărcat. Corpurile se pun în contact printr-un conductor fin şi atunci de la*** A ***la*** B ***trece o sarcină*** q . ***Ce sarcină suplimentară*** q_x ***trebuie comunicată corpurilor aflate în contact, astfel încât pe corpul*** A ***să rămână sarcina*** q ***?***

Rezolvare. Corpurile puse în contact ajung la *acelaşi potenţial* comun : $(Q - q) : C_A = q : C_B$, $q : C_A = (Q + q_x - q) : C_B$. (1)

Împărţind ecuaţiile membru la membru, obţinem :

$(Q - q) : q = q : (Q + q_x - q)$, $q_x = Q \cdot (2q - Q) : (Q - q)$. (2)

1.2.27. ***În montajul din figură se cunosc*** S, ε , $d_{1,2}$, E . ***Iniţial armătura*** 1 ***este încărcată cu sarcina*** Q, ***iar celelalte sunt neutre. Aflaţi sarcinile pe armături după închiderea întrerupătoarelor.***

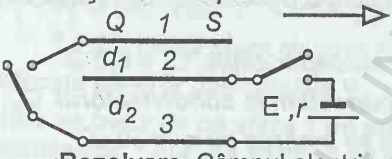


Fig.1.2.27

Rezolvare. Câmpul electric produs de o placă încărcată este de o parte şi de alta în vecinătatea plăcii (v. de exemplu, problema 1.2.3) : $E = \sigma : (2\varepsilon) = Q : (2\varepsilon S)$. (1)

Aplicăm ***principiul suprapunerii*** :

$E : d_1 = q_1 : (2\varepsilon S) - q_2 : (2\varepsilon S) - q_3 : (2\varepsilon S)$,

$E : d_2 = q_3 : (2\varepsilon S) - q_2 : (2\varepsilon S) - q_1 : (2\varepsilon S)$. (2)

Dar *sarcina* totală a sistemului se *conservă* (bateria prin curentul de încărcare poate produce numai sarcini egale în modul dar de semn opus) : $Q = q_1 + q_2 + q_3$. (3)

Din aceste ecuaţii rezultă prin adunare :

$E(1/d_1 + 1/d_2) = - q_2 : (\varepsilon S)$, $q_2 = - \varepsilon SE(1/d_1 + 1/d_2) < 0$, (4)

apoi $q_1 = Q/2 + \varepsilon SE/d_1$, $q_3 = Q/2 + \varepsilon SE/d_2$. (5)

Observăm că sistemul dat nu reprezintă un sistem de ***condensatoare*** propriu-zis, deoarece *suma* totală a sarcinilor nu este *zero* (şi câmpul în exterior nu este zero) .

1.2.28. ***Se dau trei plăci subţiri identice plan-paralele, ca în figură. Se încarcă întâi placa*** 1 , ***apoi placa*** 2 . ***Care vor fi***

sarcinile pe plăci şi câmpurile electrice dintre plăci ?

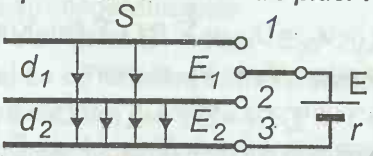


Fig.1.2.28

Rezolvare. Punând comutatorul pe poziţia *1* se încarcă condensatorul *1-3* , placa *2* neavând nici un rol, fiind *neutră* şi aşezată pe o suprafaţă *echipotenţială* . $Q_1 = [\varepsilon S : (d_1 + d_2)]\, E$, (1)

iar placa *3* se va încărca cu $- Q_1$. Mutând comutatorul pe poziţia *2*, sarcinile finale $Q_{2,3}$ însumate trebuie să dea $- Q_1$ în baza *conservării* sarcinii electrice : $Q_2 + Q_3 = - Q_1$. (2)

Pe poziţia 2 , plăcile 2, 3 nu reprezintă de fapt un condensator, deoarece sarcina totală $- Q_1 \neq 0$.

Ştiind că în vecinătatea unei plăci încărcate, de o parte şi de alta, câmpul este *constant* : $E = \sigma : (2\varepsilon) = Q : (2\varepsilon S)$, (3)

aplicăm *principiul suprapunerii* :

$$E_1 = Q_1 : (2\varepsilon S) - Q_2 : (2\varepsilon S) - Q_3 : (2\varepsilon S) = 2Q_1 : (2\varepsilon S) = \\ = E : (d_1 + d_2) ; \quad (4)$$

$$E_2 = E : d_2 = Q_1 : (2\varepsilon S) + Q_2 : (2\varepsilon S) - Q_3 : (2\varepsilon S) = 2Q_3 : (2\varepsilon S), \quad (5)$$

de unde $Q_3 = - (\varepsilon S / d_2)\, E$,

$$Q_2 = - Q_1 - Q_3 = \varepsilon S[1/ d_2 - 1/ (d_1 + d_2)]\, E . \quad (6)$$

1.2.29. ***Aflaţi tensiunile până la care se încarcă condensatoarele*** $C_1 = 2{,}0\ \mu F$, $C_2 = 3{,}0\ \mu F$ ***în schema din figură ;*** $E_1 = 3{,}0$ V $E_2 = 8{,}0$ V .

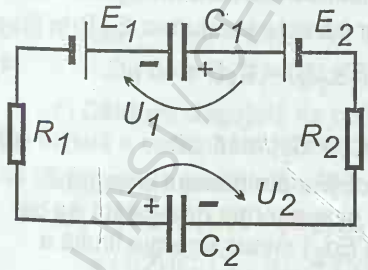


Fig.1.2.29

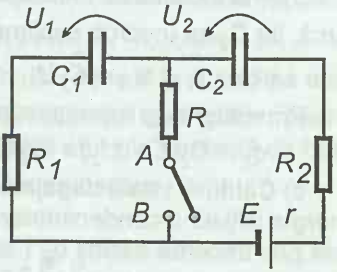


Fig.1.2.30

Rezolvare. Reamintim că *diferenţa de potenţial* (*tensiunea*) între două puncte A, B într-o reţea este - mergând de la A la B pe un drum din reţea :

$$V_A - V_B = U_{AB} = \sum RI - \sum E + \sum(q/C)\,. \qquad (1)$$

Pe un ***ochi*** *de reţea* $V_A = V_B$ şi avem

$$\sum RI - \sum E + \sum(q/C) = 0\,. \qquad (2)$$

Mergând prin circuitul nostru în sens trigonometric vom avea :

$$-(E_2 - E_1) + U_1 + U_2 = 0\,. \qquad (3)$$

Observăm că în **electrostatică** condensatoarele reprezintă o **întrerupere** de circuit, de aceea rezistoarele în *serie* cu condensatoare ***nu*** dau *căderi de potenţial* ($I = 0$).

Pe de altă parte, la legarea în serie a condensatoarelor avem

$$Q = C_1U_1 = C_2U_2\,. \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă atunci

$$U_{1,2} = (E_2 - E_1)\cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) = 3{,}0\ \text{V}\,, \text{ respectiv } 2{,}0\ \text{V}\,. \qquad (5)$$

1.2.30. ***În montajul din figură*** E = 10,0 V , C_1 = 6,0 μF , C_2 = = 4,0 μF. ***a) Ce tensiune este între punctele*** A , B ***? b) Ce sarcină va trece prin rezistorul*** R, ***respectiv prin baterie, dacă închidem întrerupătorul ? Câtă căldură totală se degajă în sistem prin închiderea întrerupătorului ?***

Rezolvare. Mergând de la A la B pe ramura stângă, respectiv dreaptă , avem

$$U_{AB} = U_1 = -U_2 - (-E)\,. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, condensatoarele $C_{1,2}$ sunt legate în *serie* , deci

$$q = C_1U_1 = C_2U_2\,. \qquad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$U_{1,2} = E\cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)\,,$$

$$U_{AB} = U_1 = E\cdot C_2 : (C_1 + C_2) = 4{,}0\ \text{V}\,. \qquad (3)$$

b) Prin închiderea întrerupătorului condensatorul C_1 se descarcă, iar C_2 se încarcă suplimentar până la tensiunea E . Prin R va trece sarcina :

$$q_R = C_1U_1 + C_2(E - U_2) = C_2E = 40\ \mu\text{C}. \qquad (4)$$

Prin baterie va trece sarcina :

$$q_E = C_2(E - U_2) = C_2{}^2E : (C_1 + C_2) = 16\ \mu\text{C}\,. \qquad (5)$$

c) **Căldura** totală degajată se obţine din bilanţul *energiilor* . Energia iniţială a condensatoarelor plus energia dezvoltată de baterie prin trecerea sacinii q_E (adică Eq_E) minus energia finală a condensatoarelor ne dă căldura totală :

$$Q_J = (1/2)\,C_1U_1{}^2 + (1/2)\,C_2U_2{}^2 + q_EE - (1/2)\,C_2E^2 =$$

$$= (1/2)[C_2{}^2 : (C_1 + C_2)]\,E^2 = (1/2)\,q_EE = 80\ \mu\text{J}\,, \qquad (6)$$

jumătate din energia dezvoltată de baterie se disipă sub formă de căldură şi *jumătate* o preiau condensatoarele.

1.2.31. ***În montajul din figură*** $E_1 = 10$ V , $E_2 = 20$ V , $C_1 = 3{,}0\ \mu F$, $C_2 = 2{,}0\ \mu F$. ***a) La ce tensiuni sunt încărcate condensatoarele şi ce tensiune este între punctele*** A, B ***? b) Ce sarcină va trece prin rezistorul*** R ***dacă închidem întrerupătorul ? c) Câtă căldură se degajă în sistem după închiderea întrerupătorului ?***

Rezolvare. În **electrostatică** (după trecerea regimului *tranzitoriu* când trec curenţi de *încărcare* sau *descărcare* a condensatoarelor) *condensatoarele reprezintă o* ***întrerupere*** *de circuit*, deci **rezistoarele** legate în **serie** cu condensatoare **nu** dau căderi de potenţial.

Tensiunea dintre două puncte în reţea este dată de formula :

$$V_A - V_B = U_{AB} = \Sigma RI - \Sigma E + \Sigma\,(q / C)\,. \qquad (1)$$

Aplicăm această formulă mergând separat pe cele două ramuri ($E_2 > E_1$, de aceea am ales sensurile tensiunilor $U_{1,2}$ ca în figură) :

$$U_{AB} = -E_1 - U_1 = U_2 - E_2\,. \qquad (2)$$

Pe de altă parte, condensatoarele fiind legate în *serie* :

$$q_o = C_1U_1 = C_2U_2\,. \qquad (3)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$U_{1,2} = (E_2 - E_1)\cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) = 4{,}0\ \text{V , resp. } 6{,}0\ \text{V ;}$$

$$U_{AB} = -(C_1E_1 + C_2E_2) : (C_1 + C_2) = -14{,}0\ \text{V} \qquad (4)$$

(potenţial $V_B > V_A$) .

b) Prin închiderea întrerupătorului condensatorul C_1 se descarcă şi se **reîncarcă** la tensiunea E_1 , iar condensatorul C_2 se încarcă **suplimentar** până la tensiunea E_2 . Sarcina care va trece prin R este

$$q_R = C_1E_1 - (-C_1U_1) + C_2E_2 - C_2U_2 =$$
$$= C_1E_1 + C_2E_2 = 70\ \mu\text{C}\ \ \text{(de la B la A)}\,. \qquad (5)$$

c) **Căldura** degajată se obţine din ***bilanţul energiilor*** : energia iniţială a condensatoarelor, W_o , plus energia furnizată de baterie (Eq_E) minus energia finală a condensatoarelor, W' :

$$W_o = (1/2)\,C_1U_1^2 + (1/2)\,C_2U_2^2 =$$
$$= (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(E_2 - E_1)^2, \qquad (6)$$

$$W' = (1/2)\,C_1E_1^2 + (1/2)\,C_2E_2^2\,, \qquad (7)$$

$$W_{bat} = E_1q_{E_1} + E_2q_{E_2} = E_1C_1(E_1 + U_1) + E_2C_2(E_2 - U_2) =$$

$$= (C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2)\,, \qquad (8)$$

$$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)(C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2) =$$

$$= (1/2)\,q_R(-U_{AB}) = 0{,}49 \text{ mJ}\,, \qquad (9)$$

jumătate din energia dezvoltată de baterie se disipă şi *jumătate* este preluată de condensatoare.

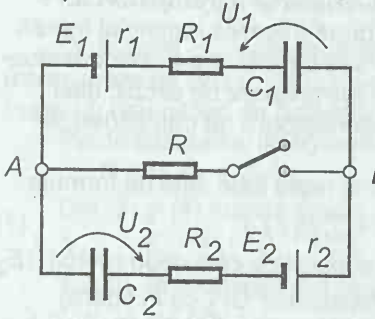


Fig.1.2.31

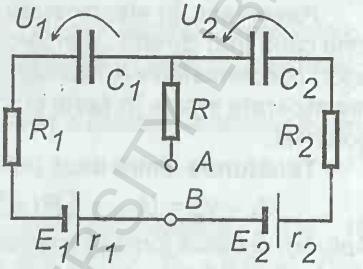


Fig.1.2.32

1.2.32. ***În schema din figură avem :*** $C_1 = 6{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$ $E_1 = 10{,}0$ V , $E_2 = 20{,}0$ V ***. a) Aflaţi diferenţa de potenţial între punctele*** A , B. ***b) Ce sarcină va trece prin rezistorul*** R ***dacă unim punctele*** A, B ***? c) Câtă căldură totală se degajă în sistem după unirea punctelor*** A, B ***?***

Rezolvare. Mergând de la A la B prin ramura stângă, respectiv dreaptă, avem $U_{AB} = U_1 - E_1 = -U_2 - (-E_2)$. (1)

Pe de altă parte , $C_{1,2}$ fiind legate în *serie* : $C_1U_1 = C_2U_2$. (2)

Din aceste ecuaţii rezultă : $U_{1,2} = (E_1 + E_2) \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)$,

$$U_{AB} = (C_2E_2 - C_1E_1) : (C_1 + C_2) = 2{,}0 \text{ V}\,. \qquad (3)$$

b) Prin unirea punctelor A, B fiecare condensator se încarcă *suplimentar* până la t.e.m. a bateriei respective . Prin rezistorul R va trece sarcina :

$$q_R = C_2(E_2 - U_2) - C_1(E_1 - U_1) = C_2E_2 - C_1E_1 = 20\ \mu C\,. \qquad (4)$$

c) **Căldura** degajată se obţine din *bilanţul energiilor* : energia iniţială W_o a condensatoarelor plus energia W_{bat} furnizată de baterie ($q_E E$) minus energia finală W' a condensatoarelor :

$$W_o = (1/2)\,C_1U_1^2 + (1/2)\,C_2U_2^2 =$$

$$= (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(E_1 + E_2)^2, \qquad (5)$$

$$W' = (1/2)\,C_1E_1^2 + (1/2)\,C_2E_2^2\,, \qquad (6)$$

BCU STIINTA UNIVERSITY LIBRARY

$W_{bat} = E_1C_1(E_1 - U_1) + E_2C_2(E_2 - U_2) =$

$= (C_2E_2 - C_1E_1)^2 : (C_1 + C_2)$, (7)

$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)(C_2E_2 - C_1E_1)^2 : (C_1 + C_2) =$

$= (1/2)\, q_R\, U_{AB} = 20\ \mu J$, (8)

jumătate din energia dezvoltată de baterie se disipă sub formă de căldură şi *jumătate* este preluată de condensatoare.

1.2.33. ***În montajul din figură :*** $C_1 = 6{,}0\ \mu F$, $C_2 = 4{,}0\ \mu F$, $E_1 = 10$ V , $E_2 = 20$ V . ***a) Aflaţi potenţialul punctului*** A . ***b) Ce sarcină va rece prin rezistorul*** R ***dacă punem punctul*** A ***la pământ ? c) Câtă căldură totală se degajă în sistem după punerea punctului*** A ***la pământ ?***

Rezolvare. Mergem de la A pe ramura stângă , respectiv dreaptă, până la P ($E_2 > E_1$, de aceea am ales sensurile $U_{1,2}$ ca în figură) : $V_A = U_{AP} = U_1 - (-E_1) = -U_2 - (-E_2)$. (1)

Pe de altă parte condensatoarele fiind legate în *serie* (*conservarea sarcinii*) : $C_1U_1 = C_2U_2$. (2)

Din aceste ecuaţii rezultă : $U_{1,2} = (E_2 - E_1) \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)$,

$V_A = (C_1E_1 + C_2E_2) : (C_1 + C_2) = 14$ V . (3)

b) Prin punerea punctului A la pământ , condensatorul C_1 se *descarcă* şi se **reîncarcă** până la tensiunea E_1, iar condensatorul C_2 se încarcă **suplimentar** până la t.e.m. E_2 :

$q_R = C_1U_1 + C_1E_1 + C_2(E_2 - U_2) = C_1E_1 + C_2E_2 = 140\ \mu C$. (4)

c) **Căldura** disipată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** : energia iniţială W_o a condensatoarelor plus energia W_{bat} furnizată de baterie ($q_E E$) minus energia finală W' a condensatoarelor :

$W_o = (1/2)\, C_1U_1^2 + (1/2)\, C_2U_2^2 =$

$= (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\, (E_2 - E_1)^2$, (5)

$W' = (1/2)\, C_1E_1^2 + (1/2)\, C_2E_2^2$, (6)

$W_{bat} = E_1(C_1U_1 + C_1E_1) + E_2\,(C_2E_2 - C_2U_2) =$

$= (C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2)$, (7)

$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)(C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2) =$

$= (1/2)\, q_R\, V = 0{,}98$ mJ , (8)

jumătate din energia dezvoltată de baterie se disipă sub formă de căldură şi *jumătate* este preluată de condensatoare.

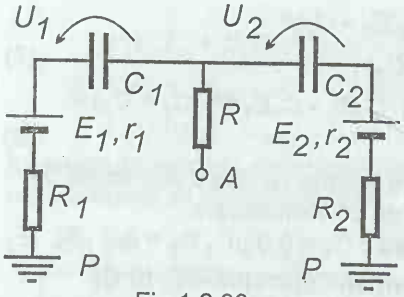


Fig.1.2.33

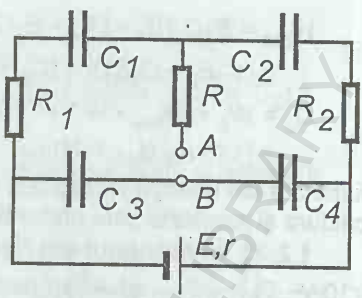


Fig.1.2.34

1.2.34. ***În schema din figură se cunosc capacităţile*** $C_{1,2,3,4}$ ***şi t.e.m.*** E ***. Aflaţi : a) Tensiunea*** U_{AB}***, b) Sarcina care va trece prin rezistorul*** R ***şi prin baterie , dacă unim*** A ***cu*** B ***, c) Căldura degajată în sistem după unirea lui*** A ***cu*** B***, d) Care este condiţia ca prin*** R ***sau prin baterie să*** nu ***treacă sarcini la unirea lui*** A ***cu*** B ***?***

Rezolvare. a) Tensiunile pe condensatoare se află din relaţiile cunoscute : $E = U_1 + U_2 = U_3 + U_4$,

$$C_1U_1 = C_2U_2 , \quad C_3U_3 = C_4U_4 , \tag{1}$$

de unde $U_{1,2} = E \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)$,

$$U_{3,4} = E \cdot C_{4,3} : (C_3 + C_4) . \tag{2}$$

Mergând de la A la B pe ramura din stânga, de exemplu, avem

$$U_{AB} = U_1 - U_3 = E\,[C_2 : (C_1 + C_2) - C_4 : (C_3 + C_4)] . \tag{3}$$

b) Prin unirea punctelor A , B se schimbă tensiunile pe condensatoare (C_1 cu C_3 şi C_2 cu C_4 devin legate în **paralel** şi rezultantele lor în **serie**) : $U_1' = E \cdot (C_2 + C_4) : (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$,

$$U_2' = E \cdot (C_1 + C_3) : (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) ; \tag{4}$$

$$q_R = -(q_1' - q_2') = -C_1U_1' + C_2U_2' =$$

$$= (C_2C_3 - C_1C_4)E : (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) , \tag{5}$$

$$q_E = (C_2 + C_4)U_2' - C_2U_2 - C_4U_4 =$$

$$= E\,(C_1 + C_3)\,(C_2 + C_4) : (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) -$$

$$- [C_1C_2 : (C_1 + C_2) + C_3C_4 : (C_3 + C_4)]\,E = (C_{fin} - C_{in})\,E =$$

$$= (C_2C_3 - C_1C_4)^2E : [(C_1 + C_2)\,(C_3 + C_4)(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)] . \tag{6}$$

c) **Căldura** disipată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$W_o = (1/2)\,C_{in}E^2 , \quad W' = (1/2)\,C_{fin}E^2 , \quad W_{bat} = q_E\,E ,$$

$$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)(C_{fin} - C_{in})\,E^2 = (1/2)q_E\,E , \tag{7}$$

BCU CLUJ-NAPOCA LIBRARY

jumătate din energia furnizată de baterie se disipă sub formă de căldură şi *jumătate* este preluată de condensatoare.

d) Condiţia $q_E = 0$, la fel ca şi $q_R = 0$:

$$C_2C_3 = C_1C_4 , \quad (C_{fin} = C_{in}) , \tag{8}$$

atunci punctele A, B sunt la *acelaşi potenţial* (analog condiţiei de echilibru a *punţii* ***Wheatstone***).

1.2.35. ***În montajul din figură ce trebuie făcut pentru ca : a) Tensiunea pe*** C_2 ***să fie*** U , ***b) Tensiunea pe*** C_1 ***să fie*** U ***şi becul să ardă, c) Tensiunile pe condensatoare să fie egale între ele ?***

Rezolvare. a) Pentru ca tensiunea *U* să cadă pe C_2 scurt-circuităm pe C_1-R_1 închizând ambele întrerupătoare şi fixând reostatul la $R = 0$, (rezistoarele $R_{1,2}$ nu dau căderi de potenţial în regim de electrostatică). Pentru ca becul să nu ardă deschidem acum K_2, tensiunea *U* de pe C_2 nu se schimbă fiindcă C_1 este neîncărcat, dar becul continuă să ardă. Deschidem în sfârşit K_1 - becul se stinge şi tensiunea pe C_2 rămâne mai departe *U* .

b) Scurt-circuităm acum pe C_2-R_2 închizând K_2 , atunci C_1 se încarcă până la *U*. Pentru ca să ardă becul, deschidem pe K_2, tensiunea *U* pe C_1 rămâne, deoarece C_2 este neîncărcat. Închidem în sfârşit K_1, becul va arde, iar pe C_1 rămâne *U* .

c) Închidem ambele întrerupătoare şi fixăm rezistenţa reostatului $R = R_{bec}$. Atunci tensiunile pe reostat şi pe bec vor fi egale : *U* / 2 şi determină aceleaşi tensiuni egale pe cele două condensatoare.

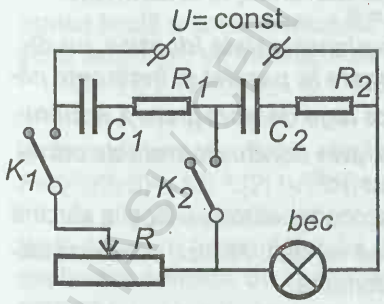


Fig.1.2.35

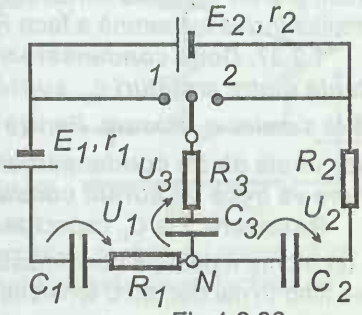


Fig.1.2.36

1.2.36. ***În ce condiţii în schema din figură, prin comutarea comutatorului din poziţia*** 1 ***în poziţia*** 2 ***, nu se schimbă tensiunea de pe condensatorul*** 1 ***?***

Rezolvare. Cu comutatorul pe poziţia *1* avem :

$$E_1 = U_1 + U_3 \,, \quad E_2 = -U_3 + U_2 \qquad (1)$$

şi *conservarea* ***sarcinii*** în nodul N :

$$-C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 = 0 \,. \qquad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$U_1 = [E_1(C_2 + C_3) + E_2C_2\,] : (C_1 + C_2 + C_3) \,. \qquad (3)$$

Cu comutatorul pe poziţia *2*, condensatoarele C_2 şi C_3 devin legate în *paralel* şi reostatul în *serie* cu C_1, atunci (v. formulele din *Breviar* de la divizorul de tensiune pe condensatoare) :

$$U_1' = (E_1 + E_2) \cdot (C_2 + C_3) : (C_1 + C_2 + C_3) \,. \qquad (4)$$

Punând condiţia cerută de problemă : $U_1 = U_1' \rightarrow$

$E_2C_2 = E_2(C_2 + C_3)$ sau $E_2C_3 = 0$,

(5) deci fie $E_2 = 0$ (atunci bornele *1, 2* devin scurt-circuitate) , fie $C_3 = 0$ (scoatem C_3 şi lăsăm circuitul întrerupt) - soluţii uşor de interpretat pe schemă .

Observăm că a scoate un **condensator** din circuit şi a lăsa circuitul *deschis* (*întrerupt*) înseamnă a face $C = 0$ (a depărta armăturile condensatorului la infinit). A scoate un **condensator** din circuit şi a uni capetele conductoarelor de conexiune lăsând circuitul *închis* înseamnă a face $C \rightarrow \infty$ (a uni sau scurt-circuita armăturile condensatorului) . La **rezistoare** avem ***invers*** :

A scoate un **rezistor** din circuit şi a lăsa circuitul *deschis* (*întrerupt*) înseamnă a face $R \rightarrow \infty$. A scoate un **rezistor** din circuit şi a uni capetele conductoarelor de conexiune lăsând circuitul *închis* înseamnă a face $R = 0$.

1.2.37. ***Două condensatoare plan-paralele identice, cu distanţa dintre armături*** d_o***, sunt legate în paralel şi încărcate până la sarcina*** q_o ***fiecare. Pentru ce lege de apropiere a armăturilor unuia dintre condensatoare, prin conductoarele de conexiune va trece un curent constant*** I ***?***

Rezolvare. Fie C_o capacitatea condensatorului fix şi q sarcina la un moment dat t pe condensatorul variabil. Atunci, condensatoarele fiind în paralel, au o tensiune comună :

$u = (2q_o - q) : C_o = q : C$ sau $(2q_o - q) : (\varepsilon S / d_o) = q : (\varepsilon S / d)$, de unde $q = q_o \cdot 2d_o : (d + d_o)$. (1)

Sarcina care a trecut de pe condensatorul C_o pe condensatorul C

este $\Delta q = q - q_0 = q_0 \cdot (d_0 - d) : (d_0 + d) = I\,t$, (2)

de unde $d = d_0 \cdot (q_0 - I\,t) : (q_0 + I\,t)$. (3)

1.2.38. ***La un "condensator" plan-paralel cu aria unei armături*** S ***şi distanţa dintre armături*** d, ***o armătură are sarcina*** q, ***iar cealaltă*** Nq, (N > 1). ***Aflaţi diferenţa de potenţial dintre armături.***

Rezolvare. Câmpul electric în vecinătatea unei plăci încărcate, de o parte şi de alta, este *constant* : $E = \sigma / (2\varepsilon) = Q / (2\varepsilon S)$. (1)

Aplicăm *principiul* ***suprapunerii*** : câmpul dintre armături va fi

$E = Nq : (2\varepsilon S) - q : (2\varepsilon S) = (N - 1)\, q : (2\varepsilon S)$. (2)

Câmpul fiind ***constant*** (uniform şi omogen), diferenţa de potenţial dintre armături va fi $U = E\,d = (N - 1)\, qd : (2\varepsilon S)$. (3)

1.2.39. ***Una dintre armăturile unui condensator plan-paralel, de arie*** S = 100 cm^2, ***este fixată orizontal, iar cealaltă este suspendată în echilibru de un resort de constantă elastică*** k = = 10,0 N/m . ***Cu cât se va lungi resortul dacă condensatorul se încarcă cu sarcina*** q = 100 nC ***?***

Rezolvare. Forţa de atracţie dintre armăturile condensatorului este $F = Q \cdot E / 2 = Q\,U / (2d) = Q^2 / (2Cd) = Q^2 / (2\varepsilon S)$. (1)

Această forţă este echilibrată de forţa elastică a resortului prin alungirea acestuia : $q^2 / (2\varepsilon S) = kx$, $x = q^2 / (2\varepsilon Sk) = 5{,}6$ mm. (2)

1.2.40. ***În montajul din figură, după închiderea întrerupătorului, distanţa dintre armături scade (la echilibru) cu*** f = 10 % . ***Cu ce fracţiune scade această distanţă (la echilibru), dacă închidem întrerupătorul pentru*** **scurt timp** ***?***

Rezolvare. În primul caz capacitatea finală a condensatorului şi sarcina cu care se încarcă sunt :

$C = \varepsilon S : [(1 - f)d]$, $Q = CE = \varepsilon SE : [(1 - f)d]$, (1)

iar forţa de atracţie dintre armături:

$F = Q^2 : (2\varepsilon S) = \varepsilon SE^2 : [2(1-f)^2 d^2] = kfd$ (2)

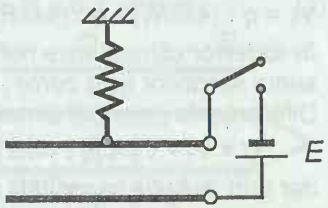


Fig.1.2.40

În al doilea caz, în timpul scurt de închidere a întrerupătorului, armătura mobilă nu apucă să se deplaseze sensibil, de aceea con-densatorul se va încărca cu sarcina :

$Q' = \varepsilon SE : d$, $F' = \varepsilon SE^2 : (2d^2) = kf'\,d$. (3)

Împărţind ecuaţiile membru la membru, obţinem :

$(1 - f)^2 = f' / f$, $f' = f(1 - f)^2 = 8{,}1$ %. (4)

1.2.41. ***Într-un condensator plan-paralel cu tensiunea dintre armături menţinută*** **constantă,** ***se introduce paralel cu armături o placă dielectrică cu constanta dielectrică*** ε_r ***şi grosime egală cu o fracţiune*** f ***din distanţa dintre plăci. În ce raport se schimbă forţa de atracţie dintre armături ? Dar dacă condensatorul, înainte de introducerea plăcii, este deconectat de la sursă ?***

Rezolvare. Capacitatea condensatorului nu depinde de poziţia plăcii introduse paralel cu armături (v. problema 1.2.4) , condensatorul obţinut este echivalent cu două condensatoare în *serie* :

$$C_o = \varepsilon_o S / d\,, \quad C' = \varepsilon_o S : [(1 - f)d + fd / \varepsilon_r] =$$

$$= C_o : (1 - f + f / \varepsilon_r)\,. \qquad (1)$$

Forţa de atracţie dintre armături : $F_o = Q^2 : (2\varepsilon_o S)$,

$$F' = Q'^2 : (2\varepsilon_o S)\,, \quad F' / F = Q'^2 / Q^2 = C'^2 U^2 / (C_o^2 U^2) =$$

$$= 1 : (1 - f + f / \varepsilon_r)^2 \in [1\,,\, 1 / (1 - f)^2)\,. \qquad (2)$$

În cazul deconectării : $Q' = Q$ şi $F' = F$.

1.2.42. ***Un condensator sferic are razele armăturilor*** $R_{1,2}$ ***şi permitivitatea dielectricului*** ε ***. Aflaţi capacitatea condensatorului şi raportul dintre câmpul maxim şi cel minim .***

Rezolvare. Potenţialul unei sfere conductoare este $q : (4\pi\varepsilon R)$ în toate punctele sale (inclusiv în interior), iar în exterior este $q : (4\pi\varepsilon r)$. Considerând armătura interioară pozitivă ($+ q$),iar cea exterioară negativă ($- q$), aplicăm *principiul* ***suprapunerii*** pentru armătura interioară, respectiv exterioară :

$V_1 = q : (4\pi\varepsilon R_1) - q : (4\pi\varepsilon R_2)$, $V_2 = q : (4\pi\varepsilon R_2) - q : (4\pi\varepsilon R_2) = 0$,(1)

în exterior câmpul *este nul*, ceea ce era de aşteptat (deoarece suma sarcinilor este *zero*) , iar potenţialul este *constant* (ales zero). Diferenţa de potenţial dintre armături este atunci :

$$U = V_1 - V_2 = [q : (4\pi\varepsilon)]\,(1 / R_1 - 1 / R_2)\,, \qquad (2)$$

dar prin *definiţia* capacităţii avem

$$C = q / U = 4\pi\varepsilon \cdot R_1 R_2 : (R_2 - R_1)\,, \qquad (3)$$

aceasta este formula capacităţii unui ***condensator sferic*** .

Ştiind că în interiorul unei sfere conductoare izolate câmpul este zero, iar în exterior este $q : (4\pi\varepsilon r^2)$ şi aplicând *principiul* ***suprapunerii***, găsim câmpul între armături :

$$E = q : (4\pi\varepsilon r^2), \qquad R_1 \le r \le R_2\,, \quad (E_{ext} = 0)\,. \qquad (4)$$

Câmpul este maxim la suprafaţa armăturii interioare, unde este

pericol de *clacare*, şi este minim la armătura exterioară, deci

$$E_{max} : E_{min} = (R_2 : R_1)^2 . \qquad (5)$$

1.2.43. ***Pe fundul unui vas umplut cu petrol lampant (luaţi*** ρ , ε ***din tabele) este fixată o armătură de arie*** $S = 100\ cm^2$ ***a unui condensator plan-paralel. Cealaltă armătură pluteşte pe dielectric. Cu cât se va scufunda suplimentar armătura (suficient de groasă) dacă condensatorul este încărcat cu sarcina*** $q = 0{,}80\ \mu C$ ***?***

Rezolvare. Forţa de atracţie dintre armături este echilibrată de forţa arhimedică suplimentară :

$$F = (1/2)\, q \cdot U / d = q^2 : (2\varepsilon S) = \rho\, S x g , \qquad (1)$$

$$x = q^2 : (2\varepsilon S^2 \rho\, g) = 10\ mm . \qquad (2)$$

1.2.44. ***De o parte şi de alta a unei plăci, cufundată în petrol lampant, câmpul electric este*** $E_1 = 10\ kV/m$ ***, respectiv*** $E_2 = 20\ kV/m$***, ca în figură. Aflaţi forţa electrică pe unitatea de arie a plăcii .***

Rezolvare. Fie σ *densitatea superficială* de sarcină a plăcii. Deoarece câmpul de o parte şi de alta este *diferit*, înseamnă că pe lângă câmpul produs de sarcina plăcii mai există un câmp *exterior*, şi atunci avem $E_2 = \sigma / (2\varepsilon) + E_o$, $E_1 = \sigma / (2\varepsilon) - E_o$, (1)

$$E_o = (1/2)(E_2 - E_1) , \quad \sigma = \varepsilon (E_1 + E_2) . \qquad (2)$$

Forţa exercitată asupra unei sarcini este $q\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este câmpul existent în locul unde se află q, produs de toate ***celelalte*** sarcini, ***afară de*** q . În cazul nostru placa se află într-un câmp omogen şi uniform $\vec{E}_o$ (exterior), deci $F = q\, E_o$,

$$f^* = q\, E_o / S = \sigma E_o = (1/2)\varepsilon (E_2^2 - E_1^2) = 6{,}1\ mN/m^2 . \qquad (3)$$

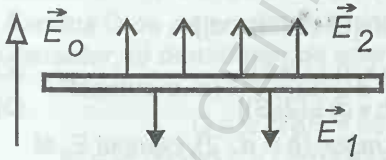


Fig.1.2.44

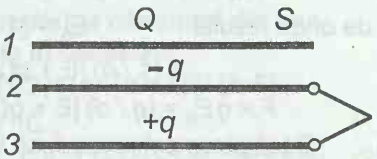


Fig.1.2.45

1.2.45. ***Fie trei plăci metalice plan-paralele de arie*** $S = 100\ cm^2$***, apropiate între ele. Placa*** **1** ***este încărcată cu sarcina*** $Q = 0{,}100\ \mu C$***, iar celelalte două sunt neutre şi scurt-circuitate între ele. Aflaţi forţa care acţionează asupra plăcii*** **2** ***.***

Rezolvare. Plăcile *2* , *3* sunt la acelaşi potenţial ($V_2 = V_3$) şi câmpul între aceste plăci este *nul* (v. proprietăţile unui conductor în electrostatică). Pe aceste plăci se induc sarcini $-q(2)$, $+q(3)$.

Ştiind că o placă încărcată produce în vecinătatea sa, de o parte şi de alta, câmp *constant* $\sigma / (2\varepsilon)$, aplicăm ***principiul suprapunerii*** pentru câmpul între plăcile *2, 3* :

$$0 = Q / (2\varepsilon S) - q / (2\varepsilon S) - q / (2\varepsilon S) \rightarrow q = Q / 2 . \quad (1)$$

Forţa exercitată asupra unei sarcini q aflată într-un câmp $\vec{E}$ este $\vec{F} = q\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este câmpul existent în locul unde se află q, produs de toate ***celelalte*** sarcini ***afară de*** q .

În cazul nostru placa *2* se află într-un câmp uniform şi omogen (constant) produs de celelalte două plăci *1* şi *3* :

$$E = Q / (2\varepsilon S) - q / (2\varepsilon S) = Q / (4\varepsilon S) \text{ (spre placa } 3), \quad (2)$$

$$F = (-q)E = -qQ / (4\varepsilon S) = -Q^2 / (8\varepsilon S) = -14 \text{ mN (spre placa } 1). \quad (3)$$

1.2.46. ***Între armăturile plan-paralele ale unui condensator este introdusă, paralel cu armături, o placă subţire încărcată cu sarcina*** q (> 0)***, ca în figură. Aflaţi forţa exercitată asupra plăcii introduse.*** *Discuţie.*

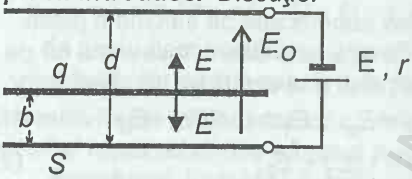


Fig.1.2.46

Rezolvare. În vecinătatea unei plăci încărcate câmpul este $\sigma / (2\varepsilon)$. Aplicăm ***principiul suprapunerii .*** Placa introdusă produce propriul său câmp $E = q : (2\varepsilon S)$, iar armăturile încărcate produc un câmp E_o. *Diferenţa de potenţial* dintre armături este egală cu *t.e.m.* a bateriei (nu avem curenţi). Câmpul fiind *uniform* :

$$E = (E_o - E)b + (E_o + E)(d - b) , \quad E = q : (2\varepsilon S) , \quad (1)$$

de unde rezultă $E_o = (1 / d) [E + E(2b - d)] =$

$$= (1 / d) [E + q(2b - d) : (2\varepsilon S)] , \quad (2)$$

$$F = qE_o = (q / d) [E + q(2b - d) : (2\varepsilon S)] . \quad (3)$$

Dacă placa este introdusă la *mijloc* ($b = d / 2$), câmpul E_o al condensatorului $E_o = E / d$ este acelaşi ca şi în absenţa plăcii şi $F = qE_o = qE / d$. Deoarece $b \in (0 , d)$, câmpul E_o şi forţa variază între limitele : $E_o \in (E / d - E , E / d + E)$,

$$F \in q (E / d - E , E / d + E) , \quad (4)$$

deci poate fi zero sau să-şi schimbe sensul .

1.2.47.*Un condensator conectat permanent la o baterie cu t.e.m.* E = 20 V ***este cufundat în apă şi se încarcă cu sarcina***

$q = 3{,}0\ \mu C$. ***Cu cât variază energia condensatorului dacă îl scoatem din apă ?***

Rezolvare. Tensiunea condensatorului este permanent $U = E$. Dacă în aer capacitatea condensatorului este C_o, atunci în apă va fi $C = \varepsilon_r C_o$ şi bilanţul energiilor este :

$W_o = (1/2)\,CU^2 = (1/2)\,\varepsilon_r C_o U^2$, $W' = (1/2)\,C_o U^2$, dar $Q = CU$,(1)

$\Delta W = W' - W_o = (1/2)\,C_o U^2\,(1 - \varepsilon_r) = (1/2)\,qU(1/\varepsilon_r - 1) = -30\ \mu J$,(2)

prin scurgerea apei capacitatea condensatorului *scade* şi el se *descarcă parţial*.

1.2.48. ***Un condensator are energia*** $W_o = 20\ \mu J$. ***Fiind deconectat de la sursă, i se scoate dielectricul efectuând pentru aceasta un lucru mecanic*** $L = 70\ \mu J$. ***Aflaţi permitivitatea relativă a dielectricului.***

Rezolvare. Capacitatea unui condensator, prin scoaterea dielectricului, se micşorează de ε_r ori. *Bilanţul energiilor* este :

$$W_o = Q^2 : (2C)\,, \quad W' = Q^2 : (2C/\varepsilon_r) = \varepsilon_r W_o\,. \qquad (1)$$

Energia condensatorului *creşte* deşi este deconectat de la sursă ($Q' = Q$) şi capacitatea *scade*, aceasta din cauza *lucrului mecanic* efectuat din *exterior* pentru scoaterea dielectricului împotriva forţelor câmpului : $W' = W_o + L$,

$$\varepsilon_r W_o = W_o + L\,, \quad \varepsilon_r = 1 + L/W_o = 4{,}5\,. \qquad (2)$$

1.2.49. ***Armăturile unui condensator plan-paralel, cu aria*** $S = 1{,}00\ dm^2$ ***a fiecărei armături şi cu dielectric având permitivitatea*** $\varepsilon = 4{,}43\ \varepsilon_o$ ***, se atrag cu o forţă*** $F = 10{,}0\ mN$. ***Aflaţi : a) Sarcina*** Q ***de pe armături, b) intensitatea câmpului din condensator, c) densitatea de energie în dielectric .***

Rezolvare. a) $F = (1/2)\,QE = (1/2)\,Q\,U/d = Q^2/(2\varepsilon S)$,

$$Q = \sqrt{2\varepsilon SF} = 88{,}5\ nC\,. \qquad (1)$$

b) $F = (1/2)\,QE = (1/2)\,\varepsilon E^2 S$, $E = \sqrt{2F/(\varepsilon S)} = 226\ kV/m$. (2)

c) $w = (1/2)\,\varepsilon E^2 = F/S = 1{,}00\ J/m^3$. (3)

1.2.50. ***O sferă încărcată, de rază*** $R_1 = 1{,}0\ cm$, ***este legată printr-un fir conductor de o altă sferă, iniţial neîncărcată, de rază*** $R_2 = 2{,}0\ cm$, ***căreia i se transferă prin aceasta o energie*** $W = 0{,}30\ J$. ***Aflaţi sarcina iniţială a primei sfere.***

Rezolvare. Sfera *1* se va descărca parţial pe sfera *2* până se *egalează potenţialele* , adică sferele ajung la un *potenţial comun*

(altfel, orice diferenţă de potenţial generează un curent). Scriem *conservarea sarcinii* electrice :

$$Q_1 = C_1V' + C_2V' = (C_1 + C_2)V' \ , \quad C_{1,2} = 4\pi\varepsilon R_{1,2}. \qquad (1)$$

Energia transferată sferei *2* este chiar energia ei finală :

$$W = (1/2)\,C_2V'^2 \ ; \quad V' = \sqrt{2W/C_2} \ . \qquad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă : $Q_1 = (C_1 + C_2)\sqrt{2W/C_2} =$

$$= 4\pi\varepsilon(R_1 + R_2)\sqrt{2W/(4\pi\varepsilon R_2)} = 1{,}7\ \mu C \ . \qquad (3)$$

1.2.51. ***În schema din figură condensatorul*** $C_1 = 3{,}0\ \mu F$ ***este încărcat iniţial până la energia*** $W_o = 1{,}0$ J ***, iar condensatorul*** $C_2 = 2{,}0\ \mu F$ ***este neîncărcat. Aflaţi câtă căldură se degajă în rezistor după închiderea întrerupătorului.***

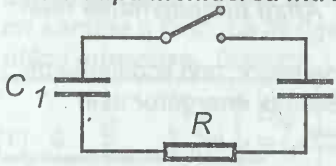


Fig.1.2.51

Rezolvare. Condensatorul C_1 se va descărca parţial pe condensatorul C_2 până ajung la *aceeaşi tensiune* comună. Scriem *conservarea sarcinii* electrice :

$$C_1U_1 = (C_1 + C_2)\,U' \ , \quad W_o = (1/2)\,C_1U_1^2 \ . \qquad (1)$$

Energia *finală* a sistemului de condensatoare :

$$W' = (1/2)\,C_1U'^2 + (1/2)\,C_2U'^2 =$$

$$= (1/2)\,C_1U_1^2 \cdot C_1 : (C_1 + C_2) = W_o \cdot C_1 : (C_1 + C_2) \ . (2)$$

Bilanţul ***energiilor*** dă **căldura** degajată :

$$Q_J = W_o - W' = W_o \cdot C_2 : (C_1 + C_2) = 0{,}40\ \text{J}. \qquad (3)$$

Căldura degajată nu depinde de rezistenţa rezistorului, aceasta determină doar *durata* fenomenului (timpul de încărcare sau de descărcare a unui condensator C printr-un rezistor R este caracterizat de ***constanta de timp*** $\tau = RC$) .

1.2.52. ***Două sfere conductoare de raze*** $R_1 = 3{,}0$ cm, $R_2 =$ $= 6{,}0$ cm, ***îndepărtate între ele, sunt încărcate până la potenţialele*** $V_1 = 2{,}0$ kV , $V_2 = 1{,}0$ kV . ***Ele sunt apoi unite printr-un fir conductor subţire. Aflaţi căldura degajată în fir .***

Rezolvare. Sfera *1* având un potenţial mai ridicat se va descărca pe sfera *2* până când sferele ajung la un potenţial comun. Scriem *conservarea sarcinii* electrice :

$C_1V_1 + C_2V_2 = C_1V' + C_2V' \rightarrow$

$V' = (C_1V_1 + C_2V_2) : (C_1 + C_2).$ (1)

Căldura degajată se obţine din *bilanţul* ***energiilor***:

$Q_J = W_o - W' = (1/2)\,C_1V_1^2 + (1/2)\,C_2V_2^2 -$

$- (1/2)\,C_1V'^2 - (1/2)\,C_2V'^2 = (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)](V_1 - V_2)^2,$ (2)

$C_{1,2} = 4\pi\varepsilon R_{1,2}$,

$Q_J = (1/2)[4\pi\varepsilon R_1R_2 : (R_1 + R_2)](V_1 - V_2)^2 = 1{,}1\ \mu J.$ (3)

1.2.53. ***În schema din figură condensatorul*** $C_o = 2{,}0\ \mu F$ ***este iniţial încărcat până la tensiunea*** $U_o = 1{,}00\ kV$, ***iar condensatoarele*** $C_1 = 3{,}0\ \mu F$ ***şi*** $C_2 = 5{,}0\ \mu F$ ***sunt neîncărcate. Ce cantitate de căldură se degajă în rezistor după un număr mare de comutări ale comutatorului ?***

Rezolvare. Condensatorul C_o se va descărca parţial pe condensatoarele $C_{1,2}$ până când nu vor mai fi diferenţe de tensiune între condensatoare. Scriem *conservarea sarcinii* electrice:

$C_oU_o = (C_o + C_1 + C_2)U' \rightarrow U' = U_o\,C_o : (C_o + C_1 + C_2).$ (1)

Cantitatea de **căldură** degajată se obţine din *bilanţul* ***energiilor***:

$Q_J = W_o - W' = (1/2)\,C_oU_o^2 - (1/2)(C_o + C_1 + C_2)U'^2 =$

$= (1/2)\,C_oU_o^2 \cdot (C_1 + C_2) : (C_o + C_1 + C_2) = 0{,}80\ J.$ (2)

(Dealtfel, condensatoarele $C_{1,2}$ pot fi înlocuite cu un singur condensator $C_1 + C_2$).

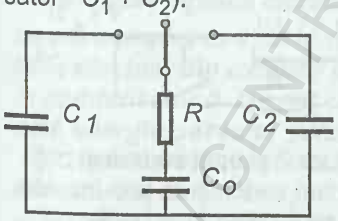


Fig.1.2.53

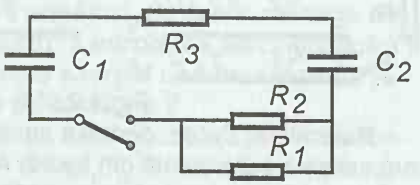


Fig.1.2.54

1.2.54. ***În montajul din figură se cunosc*** $R_1 = 1{,}00\ k\Omega$, $R_2 = 2{,}00\ k\Omega$, $R_3 = 2{,}00\ k\Omega$, $C_1 = 2{,}0\ \mu F$, $C_2 = 3{,}0\ \mu F$. ***Iniţial condensatorul*** C_1 ***este încărcat până la energia*** $W_1 = 1{,}00\ J$, ***iar*** C_2 ***nu este încărcat. Ce căldură se degajă în rezistorul*** R_1 ***?***

Rezolvare. Condensatorul C_1 se descarcă peste C_2 până ce condensatoarele ajung la *aceeaşi tensiune*. Scriem *conservarea*

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

sarcinii electrice : $C_1U_1 = (C_1 + C_2)U'$, $W_1 = (1/2)\,C_1U_1^2$. (1)

Căldura totală degajată rezultă din *bilanţul* ***energiilor*** :

$Q_J = W_1 - (1/2)\,(C_1 + C_2)U'^2 = W_1 \cdot C_2 : (C_1 + C_2)$. (2)

Această căldură se degajă în cele trei rezistoare. Pentru două rezistoare în ***serie*** căldurile degajate sunt $R_{1,2}I^2\Delta t$, unde I este curentul comun care trece prin rezistoare, deci sunt proporţionale cu rezistenţa . Pentru două rezistoare în ***paralel***, căldurile degajate sunt $(U^2/R_{1,2})\Delta t$, unde U este tensiunea comună la bornele rezistoarelor, deci sunt *invers* proporţionale cu rezistenţa .

În cazul nostru, din căldura **totală** Q_J (2) o fracţiune

$$Q_J \cdot [R_1R_2/(R_1 + R_2)] : [R_1R_2/(R_1 + R_2) + R_3] =$$

$$= Q_J \cdot R_1R_2 : [R_1R_2 + (R_1 + R_2)\,R_3] \qquad (3)$$

se degajă în $(R_1 + R_2)$, iar **din aceasta** în R_1 se degajă :

$$Q_{J1} = Q_J \cdot \{R_1R_2 : [R_1R_2 + (R_1 + R_2)\,R_3]\} \cdot R_2 : (R_1 + R_2) =$$

$$= W_1 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}10\ \text{J} . \qquad (4)$$

1.2.55. ***În montajul din figură condensatorul*** C_1 ***(cu sarcinile*** $\pm q$) ***este încărcat iniţial până la energia*** $W_o = 0{,}40$ mJ , ***iar raportul distanţelor*** $d_2/d_1 = 3{,}0$. ***Armătura superioară este neutră. Ce căldură se degajă în rezistor după închiderea întrerupătorului ?***

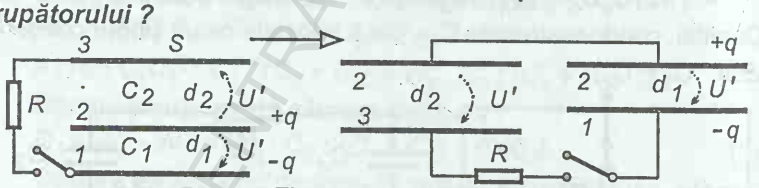


Fig.1.2.55

Rezolvare. Putem dedubla armătura *2* şi apoi separa şi obţinem schema echivalentă din figură. Acum se vede că prin închiderea întrerupătorului, condensatorul C_1 se va descărca parţial pe con-densatorul C_2 până ajung la *acelaşi potenţial* comun. Scriem *conservarea sarcinii* : $q = C_1U' + C_2U' = (C_1 + C_2)U'$. (1)

Căldura degajată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$Q_J = q^2 : (2C_1) - (1/2)\,C_1U'^2 - (1/2)\,C_2U'^2 =$$

$$= [q^2 : (2C_1)] \cdot C_2 : (C_1 + C_2) = W_o \cdot C_2 : (C_1 + C_2) =$$

$$= W_o : (1 + C_1/C_2) = W_o : (1 + d_2/d_1) = 0{,}10\ \text{mJ}. \qquad (2)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

1.2.56. ***Un condensator este încărcat cu energia*** $W_o = 120$ ***μJ de la o baterie la care rămâne conectat tot timpul. La un moment dat i se scoate dielectricul efectuând pentru aceasta un lucru mecanic*** $L = 70$ ***μJ . Aflaţi permitivitatea relativă a dielectricului.***

Rezolvare. Prin scoaterea dielectricului **capacitatea** condensatorului se micşorează de ε_r ori : $C' = C/\varepsilon_r$ şi condensatorul se *descarcă parţial* prin baterie :

$$\Delta q = C'U - CU = CU(1/\varepsilon_r - 1) < 0 . \qquad (1)$$

Energia condensatorului *scade* de asemenea :

$$W' - W_o = (1/2)C'U^2 - (1/2)CU^2 = (1/2)CU^2(1/\varepsilon_r - 1) < 0 . \qquad (2)$$

Facem *bilanţul* ***energetic*** : Lucrul mecanic efectuat asupra sistemului prin scoaterea dielectricului plus scăderea energiei condensatorului merg în baterie care face lucru mecanic *negativ*, adică consumă în loc să producă :

$$L + (W_o - W') = |W_{bat}| = (-\Delta q)U , \quad W_o = (1/2)CU^2 . \qquad (3)$$

$$L + W_o(1 - 1/\varepsilon_r) = CU(1 - 1/\varepsilon_r)U = 2W_o(1 - 1/\varepsilon_r) , \qquad (4)$$

$$L = W_o(1 - 1/\varepsilon_r) \rightarrow \varepsilon_r = W_o : (W_o - L) = 2{,}4 . \qquad (5)$$

Observăm că lucrul mecanic efectuat din exterior este egal cu *scăderea* energiei condensatorului şi deci egal cu *jumătate* din energia preluată de baterie .

1.2.57. ***Un condensator cu aer are capacitatea*** C_o ***şi este conectat permanent la o sursă de tensiune*** U ***. Se introduce între armături o placă dielectrică de constantă dielectrică*** ε_r ***care umple complet spaţiul dintre armături. Ce lucru mecanic trebuie efectuat din exterior pentru a introduce placa dielectrică în condensator ?. Cu cât creşte energia condensatorului şi câtă energie dezvoltă sursa de tensiune ?***

Rezolvare. Prin introducerea dielectricului capacitatea condensatorului creşte de ε_r ori : $C' = \varepsilon_r C_o$. Fiind conectat permanent la baterie tensiunea se menţine U şi condensatorul se *încarcă suplimentar* şi energia sa va *creşte* :

$$\Delta q = C'U - C_oU = C_oU(\varepsilon_r - 1) , \qquad (1)$$

$$W' - W_o = (1/2)C'U^2 - (1/2)C_oU^2 = (1/2)C_oU^2(\varepsilon_r - 1) > 0 . \qquad (2)$$

Lucrul mecanic efectuat de sursă (energia produsă sau furnizată de sursă) : $W_{bat} = \Delta qU = C_oU^2(\varepsilon_r - 1)$. (3)

Facem *bilanţul* ***energetic*** : Energia dezvoltată de sursă plus lucrul mecanic efectuat din exterior pentru introducerea dielectricului trebuie să fie egală cu creşterea energiei condensatorului :

$$W_{bat} + L = W' - W_o$$

sau $$C_o U^2(\varepsilon_r - 1) + L = (1/2)\, C_o U^2(\varepsilon_r - 1)\,,$$

$$L = -(1/2)\, C_o U^2(\varepsilon_r - 1) < 0\,. \qquad (4)$$

În adevăr, dielectricul este "supt" spre interiorul condensatorului de către forţele electrice, care fac lucru mecanic pozitiv, în timp ce forţele exterioare fac lucru mecanic negativ ($L' = -L$, dacă procesul este *cuasistatic*). Observăm că *jumătate* din energia dezvoltată de sursă merge pentru a mări energia condensatorului şi *jumătate* pentu introducerea dielectricului.

Această problemă este "inversă" celei precedente 1.2.56.

1.2.58. ***Într-un condensator plan-paralel cu aria unei armături*** S ***şi distanţa dintre armături*** d , ***este introdusă o placă metalică neîncărcată, de grosime*** e , ***paralel cu armături. Condensatorul se conectează la o sursă de tensiune constantă*** U. ***Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a scoate placa metalică din condensator în cazurile : a) condensator deconectat de la sursă , b) condensator conectat permanent la sursă ?***

Rezolvare. Capacitatea condensatorului nu depinde de poziţia plăcii introduse , paralel cu armături (problema 1.2.4) :

$$C_o = \varepsilon_o S / d\,, \quad C' = \varepsilon_o S / (d - e) = C_o \cdot d / (d - e) > C_o\,. \qquad (1)$$

a) Condensatorul fiind deconectat de la sursă, sarcina electrică se *conservă* : $q = C' U$, $W_o = (1/2)\, C' U^2$,

$$W' = q^2 : (2C_o) = W_o \cdot C' / C_o = W_o \cdot d / (d - e) > W_o\,. \qquad (2)$$

$$L = W' - W_o = W_o \cdot e / (d - e) = (1/2)[\varepsilon_o S / (d - e)]U^2\, e / (d - e) > 0. \qquad (3)$$

Lucrul mecanic efectuat din exterior merge în condensator a cărui energie creşte corespunzător .

b) Condensatorul fiind permanent conectat la sursă, tensiunea sa va fi mereu U . Scoţând placa metalică, capacitatea scade, deci condensatorul se va *descărca parţial* în sursă şi energia lui va scădea mergând tot în sursă :

$$\Delta q = C_o U - C' U = -C_o U \cdot e / (d - e) < 0\,, \qquad (4)$$

$$W' - W_o = (1/2) C_o U^2 - (1/2)\, C' U^2 = -(1/2) C_o U^2 \cdot e / (d - e) < 0. \qquad (5)$$

Sursa va consuma energie, deoarece condensatorul se descarcă şi sarcina trece prin sursă în sens invers tensiunii :

$$W_{bat} = \Delta q\, U = - C_o U^2 \cdot e / (d - e) < 0 \,. \qquad (6)$$

Bilanţul ***energiilor*** este : Lucrul mecanic efectuat din exterior plus scăderea energiei condensatorului merg în sursă :

$$L + (W_o - W') = - W_{bat} \,, \quad L + (1/2)\, C_o U^2 \cdot e / (d - e) =$$

$$= C_o U^2 \cdot e / (d - e) \,, \quad L = (1/2)\, C_o U^2 \cdot e / (d - e) =$$

$$= (1/2)(\varepsilon_o S / d)\, U^2 \cdot e / (d - e) \,. \qquad (7)$$

Observăm că lucrul mecanic efectuat din exterior este egal cu scăderea energiei condensatorului şi deci cu *jumătate* din energia preluată de baterie .

În cazul b) lucrul mecanic L necesar este mai mic decât în cazul a).

1.2.59. ***Un condensator cu aer de capacitate*** C_o ***a fost umplut cu un lichid dielectric de permitivitate relativă*** ε_r ***şi încărcat la tensiunea*** U. ***a) Condensatorul este deconectat şi apoi lichidul este vărsat. Câtă energie se va degaja dacă se descarcă acum condensatorul printr-un rezistor ? b)*** Idem , ***dar întâi este vărsat lichidul şi apoi este deconectat condensatorul.***

Rezolvare. Capacitatea condensatorului cu dielectric va fi $C = \varepsilon_r C_o$ şi el se va încărca cu sarcina $Q = CU = \varepsilon_r C_o U$ şi energia

$$W_o = (1/2)\, CU^2 = (1/2)\, \varepsilon_r C_o U^2 \,. \qquad (1)$$

a) Prin deconectare condensatorul rămâne în continuare încărcat cu sarcina $Q = CU$. Atunci prin îndepărtarea dielectricului energia sa devine :

$$W' = (1/2)\, Q^2 : C_o = (1/2)\, \varepsilon_r{}^2 C_o U^2 = \varepsilon_r W_o > W_o \,. \qquad (2)$$

Energia condensatorului a crescut pe seama lucrului mecanic efectuat din exterior pentru îndepărtarea dielectricului. Prin descărcarea acum a condensatorului se degajă energia (2) .

b) Vărsând dielectricul cu condensatorul conectat, capacitatea sa scade şi el se *descarcă parţial* în sursă, unde se duce o parte din energia sa împreună cu lucrul mecanic efectuat pentru îndepărtarea dielectricului . Energia condensatorului va deveni

$$W'' = (1/2)\, C_o U^2 = W_o / \varepsilon_r \qquad (3)$$

şi această energie se va degaja acum în rezistor prin descărcarea condensatorului. Să facem *bilanţul* ***energiilor*** :

Condensatorul se descarcă cu sarcina

$$\Delta q = C_o U - CU = - C_o U(\varepsilon_r - 1) < 0 \qquad (4)$$

cu care se "încarcă" sursa efectuând lucru mecanic negativ :

$$W_{bat} = \Delta q\, U = - C_o U(\varepsilon_r - 1)U . \quad (5)$$

Variaţia energiei condensatorului :

$$W' - W_o = (1/2)\, C_o U^2 - (1/2)\, CU^2 = - (1/2)\, C_o U^2(\varepsilon_r - 1) < 0 \quad (6)$$

este *jumătate* din energia primită de sursă, cealaltă *jumătate* din energia primită de sursă fiind lucrul mecanic efectuat

$$L = (1/2)\, C_o U^2(\varepsilon_r - 1) . \quad (7)$$

1.2.60. ***Un număr*** N ***de condensatoare identice cu dielectric de constantă*** ε ***sunt legate în serie şi ansamblul este încărcat la o anumită tensiune. După deconectare de la sursă, dielectricul a*** n (< N) ***condensatoare se înlocuieşte cu un altul de constantă*** ε' ***. În ce raport se schimbă tensiunea la bornele sistemului şi energia sistemului ?***

Rezolvare. Fiind legate în *serie*, sarcina pe fiecare condensator este aceeaşi. Iniţial toate condensatoarele au aceeaşi tensiune Q / C, deci $U = NQ / C$. După înlocuirea dielectricului la n din ele, **tensiunea** pe acestea se schimbă în $Q / C' = (Q / C)(C / C') =$ $= (Q / C)(\varepsilon / \varepsilon')$, atunci $U' = (N - n)\, Q / C + n(Q / C)(\varepsilon / \varepsilon')$,

$$U' / U = (N - n + n\,\varepsilon / \varepsilon') : N . \quad (1)$$

Energiile sunt : $W = N\,(1/2)\, Q^2 / C$,

$$W' = (N - n)\,(1/2)\, Q^2 / C + n\,(1/2)\, Q^2 / C' ,$$

$$W' / W = (N - n + n\,\varepsilon / \varepsilon') : N . \quad (2)$$

1.2.61. ***Armăturile paralele ale unui condensator de arie*** S = 100 cm^2***, situate la distanţa*** d = 10 mm ***între ele şi scurt-circuitate, sunt aşezate într-un câmp electric omogen exterior*** E_o = 1,00 kV/m, ***perpendicular pe armături. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a apropia lent cele două armături până la distanţa*** d' =1,00 mm ***?***

Rezolvare. Armăturile fiind la acelaşi potenţial, câmpul între ele este zero (v. proprietăţile unui conductor în câmp electrostatic). Pe armături se induc sarcini $\pm q$ care produc un câmp de sens opus $- \vec{E}_o$. **Câmpul** creat într-un condensator este

$$E_o = \sigma / \varepsilon = q / (\varepsilon S) , \quad (1)$$

din care jumătate este creat de o armătură .

Forţa asupra unei armături este $q\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este câmpul creat de toate ***celelalte*** sarcini ***afară de*** q . Atunci asupra armăturii q acţionează forţa :

$$F = q(E_o - E_o / 2) = qE_o / 2 = q^2 / (2\varepsilon S) = (1/2)\varepsilon E_o^2 S , \quad (2)$$

care caută să *depărteze* armăturile între ele. Pentru a le apropia trebuie efectuat din exterior un lucru mecanic pozitiv :

$$L = F(d - d') = (1/2)\varepsilon E_o^2 S(d - d') = 0{,}40 \text{ nJ} . \quad (3)$$

Se poate judeca şi astfel : prin apropierea armăturilor volumul unde câmpul era zero se *restrânge* cu $S(d - d')$ şi în acest volum trebuie creată energia :

$$W = w\, S(d - d') = (1/2)\varepsilon E_o^2 S(d - d') , \quad (4)$$

unde $w = (1/2)\varepsilon E_o^2$ este ***densitatea de energie*** .

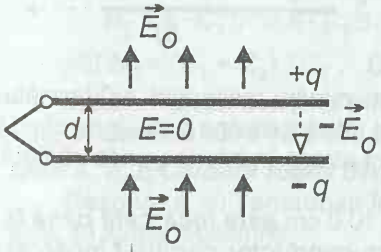


Fig.1.2.61

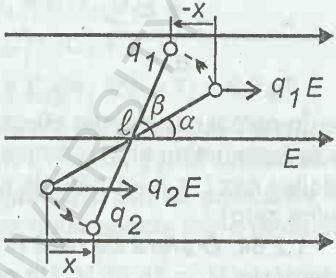


Fig.1.2.62

1.2.62. ***O tijă izolantă de lungime*** $\ell = 20$ cm ***are la capete sarcinile*** $q_1 = 20\ \mu C$, $q_2 = 50\ \mu C$ ***şi se află în câmpul electric*** $E = 1{,}00$ kV/m ***. Aflaţi lucrul mecanic efectuat de câmp la rotirea tijei de la unghiul*** $\alpha = 30^o$ ***la unghiul*** $\beta = 45^o$***, ca în figură .***

Rezolvare. Asupra sarcinilor acţionează forţele $q_{1,2}E$ care efectuează lucrul mecanic : $L = -q_1E \cdot x + q_2E \cdot x =$

$$= (q_2 - q_1)E \cdot (\ell/2)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0{,}48 \text{ mJ} . \quad (1)$$

1.2.63. ***Două condensatoare plan-paralele identice, de capacitate*** C ***fiecare şi încărcate cu sarcina*** q ***fiecare, sunt introduse complet unul în altul în cele două variante din figură. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru aceasta ?***

Rezolvare. Fie E câmpul în fiecare condensator când sunt separate. Aplicăm ***principiul suprapunerii*** : fiecare condensator creează propriul său câmp, ***separat şi independent***, şi câmpurile se adună (vectorial) . Obţinem situaţia din figură . Ştiind că densitatea de energie este $(1/2)\varepsilon E^2$, obţinem energia finală în cele două variante :

a) $W' = (1/2)\varepsilon(2E)^2 Sd/2 + 2 \cdot (1/2)\varepsilon E^2 Sd/2 = 3[(1/2)\varepsilon E^2 Sd]$,

b) $W' = 2 \cdot (1/2)\varepsilon E^2 Sd/2 = (1/2)\varepsilon E^2 Sd$. (1)

Scăzând de aici energia inițială $W_0 = 2 \cdot (1/2)\varepsilon E^2 Sd$, găsim

a) $L = W' - W_0 = (1/2)\varepsilon E^2 Sd = q^2/(2C) > 0$,

b) $L = W' - W_0 = -(1/2)\varepsilon E^2 Sd = -q^2/(2C) < 0$. (2)

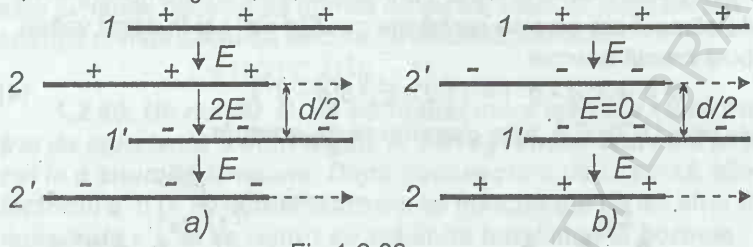


Fig.1.2.63

În primul caz trebuie efectuat un lucru mecanic $L > 0$ (armăturile se introduc cu efort, câmpul în interior devine dublu), pe când în al doilea caz $L < 0$ (armăturile sunt atrase în interior, unde câmpul devine zero).

1.2.64. ***O sferă de rază*** R = 10,0 cm ***este încărcată până la potențialul*** V_1 = 15,85 V. ***Un corp conductor depărtat încărcat și el până la potențialul*** V_2 = 2,00 V ***este adus în contact printr-un fir cu sfera, astfel încât potențialul său urcă la*** V' = 10,85 V. ***Aflați capacitatea corpului conductor.***

Rezolvare. Prin punerea corpurilor în contact electric se produce redistribuirea sarcinilor până corpurile ajung la *același* potențial comun, altfel dacă ar exista o *diferență* de potențial ar continua să curgă curent electric. În cazul nostru potențialul final comun este V'. Scriem *conservarea sarcinii* electrice:

$$C_1V_1 + C_2V_2 = C_1V' + C_2V' \rightarrow C_2 = C_1(V_1 - V') : (V' - V_2) =$$

$$= 4\pi\varepsilon R_1 (V_1 - V') : (V' - V_2) = 6{,}3 \text{ pF}. \quad (1)$$

Observăm că un corp conductor izolat reprezintă un condensator, a cărui cealaltă armătură este Pământul. Prin legarea sferei cu corpul din problemă obținem două condensatoare legate în paralel (celelalte armături fiind reprezentate de Pământ), astfel încât

$$V' = (q_1 + q_2) : (C_1 + C_2) = (C_1V_1 + C_2V_2) : (C_1 + C_2) \text{ etc.} \quad (2)$$

1.2.65. ***Un condensator cu capacitatea*** C = 10 μF ***încărcat la o anumită tensiune este descărcat printr-un galvanometru balistic*** ***(indică sarcina ce trece prin el) care dă o deviație*** N_1 = 30 diviziuni. ***Reîncărcat din nou la aceeași tensiune, este pus în contact (în paralel) cu un condensator necunoscut, după***

care se deconectează şi se descarcă din nou prin galvanometrul **balistic** *, care dă acum* $N_2 = 20$ div. ***Aflaţi capacitatea necunoscută .***

Rezolvare. Condensatorul încărcat se descarcă parţial pe celălalt până ce ajung amândouă la *aceeaşi* tensiune comună (o diferenţă de potenţial produce un curent electric). Legea de *conservare a sarcinii* electrice dă :

$$C_1U_1 = C_1U' + C_xU' \rightarrow U' = U_1 \cdot C_1 : (C_1 + C_x) . \qquad (1)$$

Deviaţiile *galvanometrului* ***balistic*** sunt proporţionale cu **sarcina** care trece prin el : $N_1 = k \cdot C_1U_1$,

$$N_2 = k \cdot C_1U' = k \cdot C_1U_1 \cdot C_1 : (C_1 + C_x), \qquad (2)$$

$$N_1 / N_2 = (C_1 + C_x) / C_1 , \quad C_x = C_1(N_1 / N_2 - 1) = 5{,}0\ \mu F . \qquad (3)$$

1.2.66. ***Pentru schema din figură calculaţi : a) Tensiunea*** U_{AB}, ***b) Sarcina care va trece prin*** R_o ***şi*** $E_{1,2}$ ***prin unirea punctelor*** A, B, ***c) Căldura totală degajată prin unirea punctelor*** A, B.

Rezolvare. a) **Tensiunea** între două puncte într-o reţea este dată de suma tensiunilor :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \Sigma RI - \Sigma E + \Sigma (q / C) , \qquad (1)$$

mergând de la A la B prin reţea (cu convenţia cunoscută a semnelor). În cazul nostru :

$$U_{AB} = - U_1 - (- E_1) = U_2 - E_2 , \qquad C_1U_1 = C_2U_2 , \qquad (2)$$

unde pe C_o , R_o nu avem tensiune (borna A este liberă) , pe rezistoare în *serie* cu condensatoare, de asemenea, nu avem căderi de potenţial (în *electrostatică* un condensator reprezintă o *întrerupere* de circuit). Condensatoarele $C_{1,2}$ fiind în *serie* au sarcini egale pe armături . Rezultă : $U_{1,2} = (E_1 + E_2) \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)$,

$$U_{AB} = (C_1E_1 - C_2E_2) : (C_1 + C_2) \quad (> 0 \text{ sau } < 0), \qquad (3)$$

prima formulă se putea scrie direct (*divizor de tensiune* pe condensatoare, v, *Breviar*) .

b) După unirea punctelor A, B avem pentru cele două *ochiuri* de reţea şi pentru *nodul* N - *conservarea sarcinii* armăturilor legate la acest nod : $U_1' + U_o' - E_1 = 0$, $U_2' - E_2 - U_o' = 0$,

$$- C_1U_1' + C_2U_2' + C_oU_o' = 0 , \qquad (4)$$

de unde rezultă tensiunile :

$$U_1' = [C_oE_1 + C_2(E_1 + E_2)] : (C_o + C_1 + C_2) ,$$

$$U_2' = [C_oE_2 + C_1(E_1 + E_2)] : (C_o + C_1 + C_2) ,$$

$U_o' = (C_1E_1 - C_2E_2) : (C_o + C_1 + C_2)$. (5)

Prin R_o va trece sarcina cu care se încarcă C_o :

$\Delta q_o = C_oU_o' = C_o\,(C_1E_1 - C_2E_2) : (C_o + C_1 + C_2)$. (6)

Prin baterii vor trece aceleaşi sarcini ca şi prin rezistoarele respective $R_{1,2}$, deci sarcina de încărcare suplimentară (cu semn algebric) a condensatoarelor respective : (7)

$\Delta q_1 = C_1(U_1' - U_1) = C_oC_1(C_1E_1 - C_2E_2) : [(C_1 + C_2)(C_o + C_1 + C_2)]$,

$\Delta q_2 = C_2(U_2' - U_2) = C_oC_2(C_2E_2 - C_1E_1) : [(C_1 + C_2)(C_o + C_1 + C_2)]$.

Se verifică relaţia : $\Delta q_1 - \Delta q_2 - \Delta q_o = 0$ pentru nodul N.

c) **Căldura** disipată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** : energia iniţială a condensatoarelor plus energia dezvoltată (furnizată) de baterii ($\Delta q \cdot E$) minus energia finală a condensatoarelor : (8)

$W_o = (1/2)\,C_1U_1^2 + (1/2)\,C_2U_2^2 = (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)](E_1 + E_2)^2$,

$W' = (1/2)\,C_1U_1'^2 + (1/2)\,C_2U_2'^2 =$

$= (1/2)\,[C_o((C_1E_1^2 + C_2E_2^2) + C_1C_2(E_1 + E_2)^2] : (C_o + C_1 + C_2)$. (9)

Creşterea energiei condensatoarelor : $W' - W_o =$ (10)

$= (1/2)\,[C_o(C_1E_1 - C_2E_2)^2] : [(C_1 + C_2)(C_o + C_1 + C_2)] = (1/2)\,W_{bat}$.

Energia furnizată de baterie : $W_{bat} = \Delta q_1\,E_1 + \Delta q_2\,E_2 =$

$= [C_o(C_1E_1 - C_2E_2)^2] : [(C_1 + C_2)(C_o + C_1 + C_2)]$. (11)

Căldura degajată în sistem (pe rezistoare) prin unirea punctelor A , B : $Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)\,W_{bat} =$

$= (1/2)\,[C_o(C_1E_1 - C_2E_2)^2] : [(C_1 + C_2)(C_o + C_1 + C_2)]$. (12)

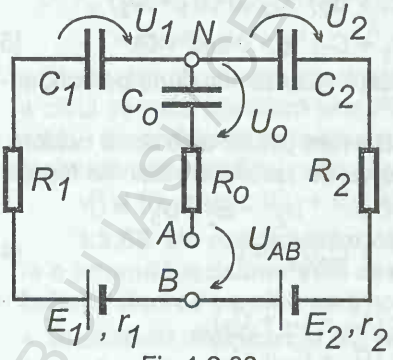


Fig.1.2.66

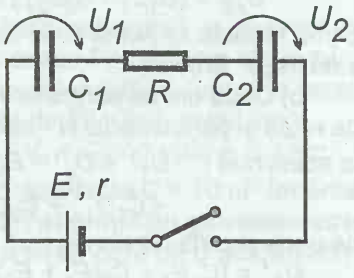


Fig.1.2.68

1.2.67. ***Două condensatoare cu aer de capacităţi*** $C_{1,2}$, ***sunt încărcate în prealabil până la tensiunile*** $U_{1,2}$, ***după care li se înlocuiesc dielectricii cu alţii de permitivitate*** $\varepsilon_{1,2}$. ***Condensatoarele se leagă în paralel. Câtă căldură se degajă prin aceasta ?***

Rezolvare. Sarcinile iniţiale sunt respectiv

$$q_1 = C_1U_1 , \qquad q_2 = C_2U_2 , \tag{1}$$

Prin înlocuirea dielectricilor sarcinile nu se schimbă, dar se schimbă capacităţile : $C_1' = \varepsilon_{r1}C_1$, $C_2' = \varepsilon_{r2}C_2$. (2)

Prin legarea condensatoarelor în paralel, se redistribuie sarcina electrică până când condensatoarele ajung la *aceeaşi* tensiune comună U' . Scriem *conservarea* sarcinii electrice :

$$q_1 \pm q_2 = C_1U_1 \pm C_2U_2 = C_1'U' + C_2'U' , \tag{3}$$

(legarea între ele a armăturilor cu acelaşi semn, respectiv cu semne opuse).

Căldura degajată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** . Energia *iniţială* a condensatoarelor :

$$W_o = q_1^2 : (2C_1') + q_2^2 : (2C_2') = C_1U_1^2 : (2\varepsilon_{r1}) + C_2U_2^2 : (2\varepsilon_{r2}). \tag{4}$$

Energia *finală* a condensatoarelor : $W' = (1/2)C_1'U'^2 +$

$$+ (1/2)C_2'U'^2 = (1/2)(C_1U_1 \pm C_2U_2)^2 : (\varepsilon_{r1}C_1 + \varepsilon_{r2}C_2). \tag{5}$$

Căldura degajată : $Q_J = W_o - W' =$

$$= C_1C_2(U_1\,\varepsilon_{r2} \mp U_2\,\varepsilon_{r1})^2 : [2\,\varepsilon_{r1}\,\varepsilon_{r2}\,(\varepsilon_{r1}C_1 + \varepsilon_{r2}C_2)] . \tag{6}$$

1.2.68. ***În schema din figură condensatoarele*** $C_{1,2}$ ***sunt în prealabil încărcate până la tensiunile*** U_{o1} , ***respectiv*** U_{o2} .

Aflaţi : a) Tensiunile de pe condensatoare după închiderea întrerupătorului, b) Căldura degajată pe rezistorul R .

Rezolvare. a) După închiderea întrerupătorului avem :

$$E = U_1 + U_2 . \tag{1}$$

Conservarea sarcinii electrice pe armăturile legate la R :

$$-C_1U_{o1} + C_2U_{o2} = -C_1U_1 + C_2U_2 . \tag{2}$$

Din ecuaţiile 1), (2) rezultă: $U_1 = (C_2E + C_1U_{o1} - C_2U_{o2}) : (C_1 + C_2)$,

$$U_2 = (C_1E - C_1U_{o1} + C_2U_{o2}) : (C_1 + C_2) . \tag{3}$$

Caz *particular* : $U_{o1} = E$, $U_{o2} = 0$:

$$U_1 = E = U_{o1} , \quad U_2 = 0 , \tag{4}$$

adică C_1 rămâne mai departe încărcat la tensiunea E, iar C_2 rămâne neîncărcat .

b) **Sarcina** care trece prin baterie : $\Delta q = C_1(U_1 - U_{o1}) =$

$= C_2(U_2 - U_{o2}) = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(E - U_{o1} - U_{o2})$. (5)

Energia iniţială a condensatoarelor :

$W_o = (1/2)C_1U_{o1}^2 + (1/2)C_2U_{o2}^2$ (6)

şi energia finală a condensatoarelor: $W' = (1/2)C_1U_1^2 + (1/2)C_2U_2^2 =$

$= (1/2)[C_1C_2E^2 + (C_1U_{o1} - C_2U_{o2})^2] : (C_1 + C_2)$. (7)

Energia dezvoltată de *baterie* :

$W_{bat} = \Delta q\, E = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(E - U_{o1} - U_{o2})E$. (8)

Variaţia energiei condensatoarelor :

$W' - W_o = (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,[E^2 - (U_{o1} + U_{o2})^2]$. (9)

Căldura *totală* degajată rezultă din *bilanţul* ***energiilor*** :

$Q_J = W_o + W_{bat} - W' =$

$= (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(E - U_{o1} - U_{o2})^2$. (10)

Deoarece R şi r sunt în *serie*, deci străbătute de acelaşi curent :

$Q_R : Q_r = RI^2\Delta t : (rI^2\Delta t)$, deci

$Q_R = Q_J \cdot R : (R + r)$, $\quad Q_r = Q_J \cdot r : (R + r)$. (11)

1.2.69. ***Un condensator plan cu aer este încărcat până la o tensiune*** U ***. După deconectare de la sursă, se introduce între armături o placă dielectrică de constantă dielectrică*** ε_r ***, de arie egală cu o fracţiune*** f ***din aria*** S ***a unei armături şi de grosime*** d ***egală cu distanţa dintre armături. Aflaţi : a) Capacitatea noului condensator , b) Câmpul electric din condensator , c) Densitatea de sarcină electrică pe armături , d) Variaţia energiei condensatorului datorită introducerii plăcii .***

Rezolvare. a) Condensatorul este echivalent cu două condensatoare în *paralel* (neglijăm efectele de *margine*):

$C' = \varepsilon_o(1 - f)S : d + \varepsilon_o\varepsilon_r fS : d =$

$= \varepsilon_o S(1 - f + f\varepsilon_r) : d = C\,(1 - f + f\varepsilon_r)$. (1)

b) Înainte de deconectare condensatorul s-a încărcat cu sarcina $Q = CU$, care se ***conservă*** , deci $E = U'/d = Q/(dC') =$

$= Q : [\varepsilon_o S(1 - f + f\varepsilon_r)] = U : [d(1 - f + f\varepsilon_r)]$. (2)

c) Intensitatea câmpului electric de o parte şi de alta a unei plăci încărcate este $\sigma/(2\varepsilon)$. Câmpul între armături va fi σ/ε , de unde rezultă : $\sigma_{aer} = \varepsilon_o E$, $\quad \sigma_{diel} = \varepsilon_o\varepsilon_r E$. (3)

d) Variaţia energiei condensatorului : $W' - W_o =$

$= (1/2)Q^2(1/C' - 1/C) = (1/2)CU^2(1 - \varepsilon_r)f : (1 - f + f\varepsilon_r) < 0.$ (4)

Energia condensatorului *scade*, deoarece pe seama acestei energii es-te tras dielectricul de forţele câmpului înspre interiorul condensatorului .

1.2.70. ***Reluaţi problema precedentă*** **1.2.69** ***, considerând că condensatorul rămâne permanent legat la sursă .***

Rezolvare. a) C' este la fel ca la problema precedentă .

b)Tensiunea între armături rămâne mereu egală cu U , deci

$$E = U / d . \quad (5)$$

c) $\sigma_{aer} = \varepsilon_o E , \quad \sigma_{diel} = \varepsilon_o \varepsilon_r E .$ (6)

d) $W' - W_o = (1/2)C'U^2 - (1/2)CU^2 =$

$$= (1/2)CU^2(\varepsilon_r - 1)f > 0 . \quad (7)$$

Energia condensatorului *creşte* deşi forţele câmpului fac lucru mecanic pozitiv pentru atragerea dielectricului. Bateria este cea care furnizează energie, atât pentru mărirea energiei condensatorului (prin *încărcarea* sa suplimentară datorită *creşterii* capacităţii), cât şi lucrul mecanic de introducere a dielectricului. În adevăr, sarcina suplimentară cu care se încarcă condensatorul şi energia furnizată de baterie sunt : $\Delta q = (C' - C)U = CU(\varepsilon_r - 1)f ,$

$$W_{bat} = \Delta q\, U = CU^2(\varepsilon_r - 1)f . \quad (2)$$

Lucrul mecanic efectuat de forţele câmpului pentru introducerea dielectricului :

$$L = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)\, CU^2(\varepsilon_r - 1)f = (1/2)\, W_{bat} , \quad (3)$$

jumătate din energia dezvoltată de baterie merge în creşterea energiei condensatorului şi *jumătate* pentru lucrul mecanic de introducere a dielectricului .

(*) 1.2.71. ***În figură este reprezentat un voltmetru cu condensator. Se dau : constanta elastică*** k , ***aria unei armături*** S. ***Când*** U = 0 , ***resortul este nedeformat şi distanţa dintre armături este*** d . ***Reprezentaţi grafic*** U = f (x) , ***unde*** x ***este alungirea resortului .***

Rezolvare. Forţa de atracţie dintre armături egalează forţa elastică : $F = Q\,E/2 = kx$ sau $(1/2)\varepsilon_o E^2 S = kx , \; E = U : (d - x),$ (1)

$$U(x) = (d - x)\sqrt{2kx/(\varepsilon_o S)} = \sqrt{k/(\varepsilon_o S)}\sqrt{(2x)(d-x)(d-x)} . \quad (2)$$

Sub ultimul radical avem produsul a trei factori. Suma lor fiind *constantă* , *maximul* are loc atunci când factorii sunt *egali* :

$2x = d - x = d - x$, de unde $x = d/3$. (3)

Rezultatul se poate obţine cu ajutorul ***derivatelor***. *Condiţia de extremum este* ***anularea*** *derivatei :*

$$f'(x) = [\sqrt{x}\ (d - x)]' = \frac{d - 3x}{2\sqrt{x}} = 0\ ,\ \text{de unde}\ x = d/3\ . \quad (4)$$

Natura extremului este dată de *semnul* derivatei a *doua* sau de variaţia semnului derivatei întâia la trecerea prin rădăcină (trece de la + la -) : $f''(x) = \frac{-6x - d + 3x}{4x\sqrt{x}}$, $f''(d/3) < 0$, (5)

deci avem un *maxim* : $U_{max} = \frac{2d}{3}\sqrt{3kd/(3\varepsilon_o S)}$. (6)

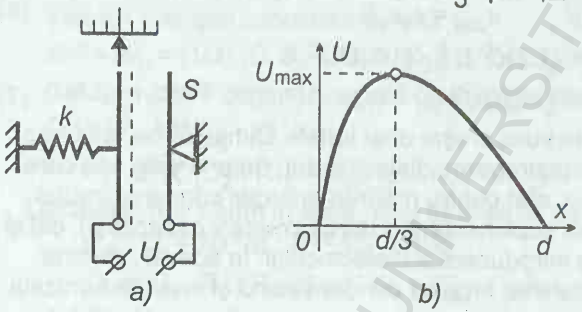


Fig.1.2.71

* **1.2.72.** ***Două corpuri conductoare izolate, de capacităţi*** $C_{1,2}$ ***şi încărcate cu sarcinile*** $q_{1,2}$***, sunt puse în contact electric . Arătaţi că după stabilirea echilibrului , egalitatea potenţialelor este echivalentă cu condiţia de*** minim ***a energiei electrice totale a sistemului .***

Rezolvare. Fie *x* sarcina care trece de pe corpul *1* pe corpul *2* prin stabilirea contactului electric . Atunci energia totală a sistemului devine : $W = (q_1 - x)^2 : (2C_1) + (q_2 + x)^2 : (2C_2)$. (1)

Condiţia de extremum este anularea derivatei :

$W'(x) = dW/dx = -(q_1 - x)/C_1 + (q_2 + x)/C_2 = 0$,

de unde $x = (C_2 q_1 - C_1 q_2) : (C_1 + C_2)$. (2)

Sarcinile finale vor fi : $q_1' = q_1 - x =$

$= (q_1 + q_2) \cdot C_1 : (C_1 + C_2)$, $q_2' = (q_1 + q_2) \cdot C_2 : (C_1 + C_2)$, (3)

deci potenţialele finale vor fi :

$V_1' = q_1'/C_1 = (q_1 + q_2) : (C_1 + C_2) = V_2' = q_2'/C_2$. (4)

Derivata a *doua* : $W''(x) = d^2W/dx^2 = 1/C_1 + 1/C_2 > 0$, (5)

deci energia *W* are un **minim** .

** **1.2.73.** ***Ce lucru mecanic (minim) trebuie efectuat pentru a mări distanţa dintre armăturile unui condensator plan-paralel cu aer, de la*** $d_1 = 3{,}0$ cm ***la*** $d_2 = 10$ cm . ***Aria unei armături*** $S = 100\ \text{cm}^2$ ***: a) condensatorul este conectat permanent la o baterie cu t.e.m.*** $E = 220$ V , b) ***condensatorul este încărcat de la baterie, dar apoi deconectat.***

Rezolvare. a) Fie x distanţa dintre armături la un moment dat, atunci forţa de atracţie dintre armături în acest moment este :

$$F(x) = QE/2 = QE/(2x) = CE^2/(2x) = \varepsilon SE^2/(2x^2)\,, \qquad (1)$$

($U = E = \text{const}$) . *Lucrul mecanic* cerut : $dL = F(x)\,dx$,

$$L = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\varepsilon S}{2x^2} E^2\,dx = \frac{1}{2}\,\varepsilon S E^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{d_1}^{d_2} =$$

$$= -(1/2)\,\varepsilon S E^2\,(1/d_2 - 1/d_1) = W_1 - W_2 = -\Delta W = 50\ \text{nJ}\,. \qquad (2)$$

Observăm că acest lucru mecanic este efectuat din exterior pentru a mări distanţa dintre armături, împotriva forţei de atracţie dintre armături. El ***nu*** este egal în cazul nostru cu variaţia energiei condensatorului : $\Delta W = W_2 - W_1 = (1/2)C_2E^2 - (1/2)C_1E^2 =$

$$= (1/2)\,\varepsilon S E^2\,(1/d_2 - 1/d_1) = -L\,, \qquad (3)$$

fiindcă condensatorul rămâne **conectat** la baterie! ($U = E = \text{const}$). Lucrul mecanic efectuat (2) merge în baterie . Deoarece capacitatea condensatorului *scade* , el se ***descarcă*** parţial prin baterie, prin care va trece sarcina : $q = (C_1 - C_2)\,E \qquad (4)$

în sens *invers* tensiunii e.m. , deci bateria *consumă* energia :

$$-L_{bat} = qE = (C_1 - C_2)\,E^2 = 2(W_1 - W_2) = L + (-\Delta W) = 2L\,, \qquad (5)$$

energie formată din lucrul mecanic efectuat din exterior plus scăderea energiei potenţiale a condensatorului .

b) Acum se *conservă sarcina* Q :

$$F(x) = Q^2 : (2Cx) = Q^2 : (2\varepsilon S) = \text{const}\,, \qquad (6)$$

$$L = \int_{d_1}^{d_2} F\,dx = F(d_2 - d_1) = [Q^2 : (2\varepsilon S)]\,(d_2 - d_1) =$$

$$= [\varepsilon S : (2d_1^2)]\,E^2(d_2 - d_1) = W_2 - W_1 = \Delta W\,. \qquad (7)$$

Acest lucru mecanic efectuat asupra condensatorului, împotriva forţei de atracţie dintre armături, este egal cu creşterea enegiei potenţiale a condensatorului (care rămâne deconectat de la baterie). El este mai mare decât cel precedent în raportul $d_2/d_1 = 3{,}3$.

** 1.2.74. ***Calculaţi : a) capacitatea unui condensator* sferic *de raze* $R_{1,2}$ *şi cu dielectric de constantă* ε_r *, b) energia câmpului electric din condensator, folosind formula densităţii de energie .*

Rezolvare. a) Deoarece sarcinile celor două armături sferice sunt egale în modul şi de semn opus, câmpul în exteriorul condensatorului este nul, la fel ca şi în interiorul sferei interioare. Câmpul dintre armături este dat de sarcina sferei interioare :

$$E = q : (4\pi\varepsilon r^2), \qquad R_1 \le r \le R_2 . \tag{1}$$

Diferenţa de potenţial dintre armături este prin definiţie :

$$V_1 - V_2 = U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\, \mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2} . \tag{2}$$

Acest rezultat se poate obţine imediat cu ajutorul *principiului* ***suprapunerii***, ştiind câmpul şi potenţialul unei sfere conductoare izolate. Din definiţia capacităţii rezultă acum :

$$C = q : U = 4\pi\varepsilon \cdot R_1R_2 : (R_2 - R_1) . \tag{3}$$

b) **Energia** cerută se poate exprima imediat prin capacitatea (3) :

$$W = (1/2)\,CU^2 = (1/2)\,qU = q^2 : (2C) , \tag{4}$$

dar s-o calculăm cu ajutorul densităţii de energie :

$$w = \mathrm{d}W / \mathrm{d}V = (1/2)\varepsilon E^2 , \quad \mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V , \quad W = \int \mathrm{d}W = \int w\,\mathrm{d}V . \tag{5}$$

Profitând de *simetria sferică*, alegem ***elementul*** de volum sub forma unei *pături sferice* ***elementare*** de rază r , de arie $S = 4\pi r^2$ şi de grosime infinit mică $\mathrm{d}r$, având deci volumul :

$$\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r . \tag{6}$$

Această expresie a volumului *păturii sferice elementare* se poate obţine şi ca o creştere *infinitezimală* (*diferenţială*) a volumului unei sfere : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}[(4\pi/3)r^3] = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, datorită creşterii infinitezimale a razei cu $\mathrm{d}r$.

$$W = \int w\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\,\varepsilon \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r =$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= \frac{q^2(R_2-R_1)}{8\pi\varepsilon R_1R_2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} . \tag{7}$$

** **1.2.75.** ***O bilă conductoare de rază*** R_1 ***este învelită într-o pătură dielectrică de rază exterioară*** R_2 ***şi constantă dielectrică*** ε ***. Aflaţi : a) Capacitatea bilei, b) Energia câmpului electric din pătura sferică şi din exteriorul ei, dacă sarcina bilei este*** q.

Rezolvare. a) Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul inducţiei *(deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu sarcina electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_{\mathrm{int}} \,. \qquad (1)$$

Fie q sarcina bilei . Datorită *simetriei sferice* câmpul este *radial* şi depinde numai de distanţa până la centrul bilei. Luăm o suprafaţă (gaussiană) sferică concentrică de rază $r > R_2$. Fluxul ***elementar*** este

$$\mathrm{d}\Psi = \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D \, \mathrm{d}S \,. \qquad (2)$$

Integrarea (sumarea) pe toată sfera se face imediat :

$$\Psi = \oint_S \mathrm{d}\Psi = \oint_S D \, \mathrm{d}S = D \oint_S \mathrm{d}S = D \cdot S = D \cdot 4\pi r^2 \,. \qquad (3)$$

Conform teoremei lui *Gauss* :

$$\Psi = D \cdot 4\pi r^2 = q_{\mathrm{int}} = q \,, \quad D = q : (4\pi r^2) \,,$$
$$E = D : \varepsilon_0 = q : (4\pi \varepsilon_0 r^2) \,, \quad r > R_2 \,. \qquad (4)$$

Exact la fel, pentru o sferă gaussiană de rază $r \in (R_1 \,, R_2)$:

$$\Psi = D \cdot 4\pi r^2 = q \,, \quad D = q : (4\pi r^2) \,,$$
$$E = D : \varepsilon = q : (4\pi \varepsilon r^2) \,, \qquad r \in (R_1 \,, R_2) \,. \qquad (5)$$

Potenţialul bilei, prin definiţie ,

$$V = -\int_{\infty}^{R_1} \vec{E} \, \mathrm{d}\vec{r} =$$

$$= -\int_{\infty}^{R_2} E \, \mathrm{d}r - \int_{R_2}^{R_1} E \, \mathrm{d}r = -\int_{\infty}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, \mathrm{d}r - \int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Bigg|_{\infty}^{R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \Bigg|_{R_2}^{R_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) . \qquad (6)$$

Din definiţia *capacităţii* unui conductor izolat avem :

$$C = \frac{q}{V} \,, \quad \frac{1}{C} = \frac{V}{q} \,, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{R_2 - R_1}{4\pi\varepsilon R_1 R_2} \,. \qquad (7)$$

Rezultatul era de aşteptat. În adevăr, dacă ne imaginăm că metalizăm suprafaţa sferei ***echipotenţiale*** R_2 , ceea ce nu schimbă cu nimic lucrurile (nu se schimbă nici *potenţialul*, deci nici *câmpul*), sistemul este echivalent cu două condensatoare legate în *serie* : condensator *sferic* de raze $R_{1,2}$ şi constantă ε de capacitate

$4\pi\varepsilon R_1R_2 : (R_2 - R_1)$ şi o sferă *izolată* de capacitate $4\pi\varepsilon_0 R_2$ (cealaltă armătură sferică fiind la infinit).

b) **Densitatea de energie** a câmpului electric este :

$$w = dW/dV = (1/2)\varepsilon E^2 , \; dW = w dV , \; W = \int dW = \int w\, dV . \quad (8)$$

Având în vedere *simetria sferică*, alegem ***elementul*** de volum sub forma unei *pături sferice* ***elementare*** de grosime infinitezimală dr : $= 4\pi r^2 dr$. Atunci : $W_i = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cdot 4\pi r^2 dr =$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (9)$$

Analog, în **exteriorul** păturii dielectrice :

$$W_e = \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} . \quad (10)$$

Energia electrică *totală* a bilei : $W = W_e + W_i =$

$$= \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\, qV , \quad (11)$$

unde V este **potenţialul** bilei (6), aşa cum era de aşteptat :

$$W = (1/2)CV^2 = (1/2)qV = q^2/(2C) . \quad (12)$$

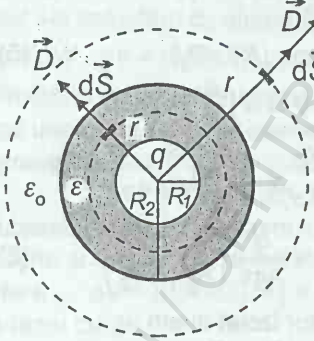


Fig.1.2.75

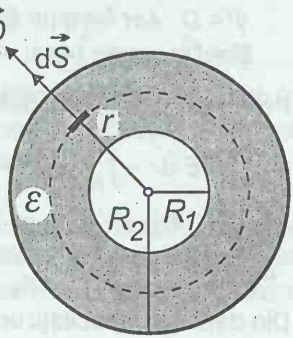


Fig.1.2.76

** **1.2.76.** ***Calculaţi capacitatea unui condensator*** **cilindric** ***format din două armături cilindrice concentrice de raze*** $R_{1,2}$ ***şi de lungime*** $\ell \gg R_{1,2}$.

Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul inducţiei *(deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu sarcina electrică conţinută în* ***interiorul***

suprafeţei închise : $\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{int}$. (1)

Alegem o suprafaţă (gaussiană) cilindrică concentrică de rază r. Datorită *simetriei cilindrice* şi alegerii suprafeţei amintite, câmpul $\vec{D}$ este *radial* şi dependent numai de distanţa r până la axa cilindrului (considerăm condensatorul suficient de lung, faţă de rază, ca să neglijăm efectele la *margine*). Atunci fluxul ***elementar*** printr-o suprafaţă ***elementară*** este $d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{S} = D\, dS$ (2)
şi însumat, adică integrat, pe toată suprafaţa cilindrului desemnat dă : $\Psi = \oint_S d\Psi = \oint_{S_{lat}} D\, dS = D \oint_{S_{lat}} dS = D \cdot S_{lat} = D \cdot 2\pi r \ell$, (3)
unde avem flux numai prin suprafaţa *laterală* a cilindrului gaussian, prin cele două baze fluxul este zero căci pe ele $\vec{D} \perp d\vec{S}$. Conform *teoremei lui* ***Gauss*** : $\Psi = D \cdot 2\pi r \ell = q_{int} = q$, $D = q : (2\pi r \ell)$,

$$E = D : \varepsilon = q : (2\pi\, \varepsilon\, r \ell) , \quad r \in (R_1 , R_2) . \tag{4}$$

Să calculăm acum **diferenţa de potenţial** dintre armături :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\, d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon r \ell}\, dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln \frac{R_2}{R_1} . \tag{5}$$

Conform definiţiei capacităţii unui condensator :

$$C = q : U = 2\pi\varepsilon\ell : [\ln(R_2 / R_1)] . \tag{6}$$

Ştiind expresia câmpului (4) şi a **densităţii de energie** :

$$w = dW / dV = (1/2)\varepsilon E^2 , \quad dW = w\, dV , \tag{7}$$

putem calcula **energia** câmpului electric : $W = \int w\, dV =$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cdot 2\pi r \ell\, dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\ell} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\ell} \ln \frac{R_2}{R_1} , \tag{8}$$

unde, ţinând seama de *simetria* ***cilindrică***, am ales ***elementul*** de volum dV sub forma unei ***pături*** *cilindrice* concentrice, de rază r şi grosime *infinitezimală* dr (de lungime ℓ), deci de volum $dV = 2\pi r \ell\, dr$. Pe de altă parte **energia** unui condensator este :

$$W = (1/2)\, CU^2 = q^2 : (2C) . \tag{9}$$

Egalând cu (8) , regăsim expresia capacităţii .

**** 1.2.77.** ***O linie bifilară este formată din două conductoare identice, paralele, fiecare de rază*** R, ***situate la distanţa*** b ***între ele. Calculaţi capacitatea liniei pe unitatea de lungime, considerând că sarcinile sunt distribuite uniform pe conductoare.***

Rezolvare. Pentru a forma un ***condensator*** cele două conductoare trebuie să aibă sarcini ***egale*** în modul şi de semn opus.

Fie λ ***densitatea liniară de sarcină*** a unui conductor. Conform *principiului* ***suprapunerii*** *fiecare sarcină produce* ***separat şi independent*** *propriul său câmp*. Să calculăm deci, întâi, câmpul electric produs de un singur conductor rectiliniu *lung* .

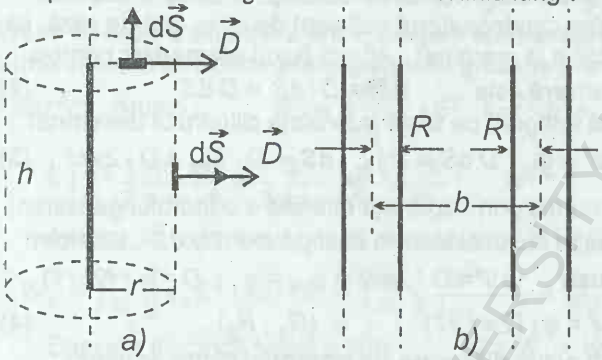


Fig.1.2.77

Vom aplica *teorema lui* ***Gauss*** (7) *Breviar* :

Fluxul inducţiei *(deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu sarcina electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{int} \,. \qquad (1)$$

Să înconjurăm conductorul cu un cilindru (gaussian) coaxial, ca în figură . În virtutea *simetriei* ***cilindrice***, câmpul este **radial**, perpendicular pe conductor şi dependent doar de distanţa r până la conductor, astfel încât fluxul se calculează foarte uşor. Fluxul prin cele două baze este zero fiindcă acolo $\vec{D} \perp d\vec{S}$ ° i deci $\vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$. Rămâne fluxul prin suprafaţa *laterală* a cilindrului gaussian :

$$\Psi = D \cdot S_{lat} = D \cdot 2\pi rh = q_{int} = \lambda\, h \,,$$

$$D = \lambda : (2\pi r) \,, \quad E = D : \varepsilon = \lambda : (2\pi\varepsilon r) \,, \quad r > R \,. \qquad (2)$$

Acest rezultat l-am obţinut şi în problema precedentă 1.2.76. Cele două conductoare paralele fiind încărcate cu sarcini egale în modul şi de semn opus, vor da de-a lungul perpendicularei comune câmpuri în acelaşi sens, care se adună algebric :

$$E = \lambda : (2\pi\varepsilon r) + \lambda : [2\pi\varepsilon(b - r)] \,, \quad r \in (R \,,\, b - R) \,. \qquad (3)$$

Prin definiţie **diferenţa de potenţial** dintre conductoare este

$$U = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{r} = \int_R^{b-R} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r}{b-r} \Bigg|_R^{b-R} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \ln \frac{b-R}{R} \,. \qquad (4)$$

Din definiţia capacităţii rezultă (*pe unitatea de lungime*) :

$$C^* = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b-R}{R}} . \qquad (5)$$

** 1.2.78. ***Un condensator plan-paralel are aria unei armături* S *, distanţa dintre armături* d *, iar dielectricul are permitivitatea variabilă* liniar *de la* ε_1 *lângă o armătură până la* ε_2 *lângă cealaltă armătură. Calculaţi capacitatea condensatorului .*

Rezolvare. Câmpul electric produs de o placă infinită încărcată uniform cu *densitatea superficială de sarcină* $\sigma = dQ/dS$ se poate obţine cu ajutorul *teoremei lui* **Gauss** (7) Breviar :

Fluxul inducţiei *(deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ *printr-o suprafaţă* ***închisă*** *este egal cu sarcina electrică conţinută în* ***interiorul*** *suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_{int} . \qquad (1)$$

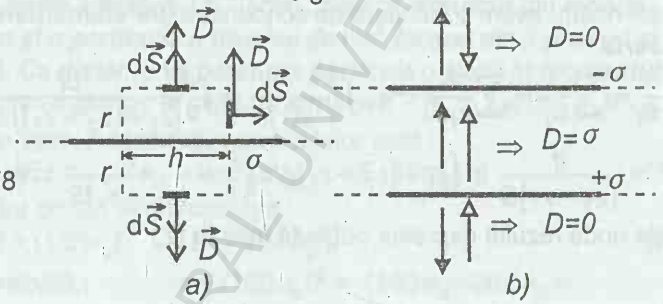


Fig.1.2.78

În virtutea **simetriei** câmpul electric trebuie să fie perpendicular pe placă şi dependent doar de distanţa până la placă . Luăm atunci o suprafaţă gaussiană cilindrică aşezată simetric ca în figură . Fluxul prin suprafaţa *laterală* este *zero*, deoarece acolo $\vec{D}\perp d\vec{S}$ şi deci $\vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$, iar prin cele două baze dă $2D\cdot S$:

$$\Psi = 2DS = q_{int} = \sigma S , \quad D = \sigma/2 = \text{const}, \quad E = D/\varepsilon = \sigma/(2\varepsilon), \qquad (2)$$

rezultat care se poate obţine şi fără teorema lui Gauss . Cele două armături ale condensatorului fiind încărcate cu sarcini egale în modul dar de semn opus, vor produce câmpuri egale în modul dar de semn opus, astfel încât în exteriorul condensatorului câmpul rezultant este zero, iar în interiorul condensatorului câmpul este dublu :

$$D = \sigma , \quad E = D/\varepsilon = \sigma/\varepsilon . \qquad (3)$$

Diferenţa de potenţial dintre armături :

$$U = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{r} = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon} dr , \qquad (4)$$

dar $\varepsilon(r) = \varepsilon_1 + [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d]\, r$, (5)

$$U = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r/d}\, dr = \frac{\sigma d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \ln \left[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r/d\right]_0^d =$$

$$= [\sigma d : (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \ln (\varepsilon_2 / \varepsilon_1), \quad (6)$$

de unde capacitatea, prin definiţie,

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{S}{d} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\ln (\varepsilon_2/\varepsilon_1)}. \quad (7)$$

În particular, dacă ε = const, regăsim (prin trecere la limită $\varepsilon_2 \to \varepsilon_1$, aplicând regula lui *L' Hôspital*) formula cunoscută : $C = \varepsilon S / d$.

Rezultatul (7) se poate obţine mai repede dacă ne amintim că un condensator cu mai multe straturi paralele de *dielectrici* ***diferiţi*** este echivalent cu mai multe condensatoare legate în ***serie***. În cazul nostru avem o *infinitate* de condensatoare ***elementare*** legate în ***serie*** :

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} = \sum \frac{d_i}{\varepsilon_i S} \to \int_0^d \frac{dr}{\varepsilon(r) S} = \int_0^d \frac{dr}{[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r/d] S} =$$

$$= \frac{d}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S} \ln \left[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) r/d\right]_0^d = \frac{d}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S} \ln (\varepsilon_2/\varepsilon_1), \quad (8)$$

de unde rezultă expresia obţinută înainte (7).

1.3. ELECTROSTATICA ŞI MECANICA

1.3.1. ***De pe armăturile opuse, situate în vid la distanţa*** d = = 40 mm ***între ele, ale unui condensator plan-paralel încărcat, pleacă simultan din repaus un electron, respectiv un proton. La ce distanţă de armătura pozitivă se vor întâlni particulele ? Se dă raportul maselor*** $m_p / m_e = 1836$.

Rezolvare. Fie E câmpul electric din condensator. Atunci acceleraţiile particulelor sunt : $a_p = eE / m_p$, $a_e = eE / m_e$. (1)

Forţele gravitaţionale sunt total neglijabile ; de asemenea forţa de

atracţie dintre electron şi proton . Condiţia de întâlnire :

$$d = (1/2)\,a_p t^2 + (1/2)\,a_e t^2 \;\rightarrow\; t^2 = 2d : (a_p + a_e)\,. \qquad (2)$$

Distanţa cerută : $x = (1/2)\,a_p t^2 = (1/2)\,a_p \cdot 2d : (a_p + a_e) =$

$= d : (1 + a_e / a_p) = d : (1 + m_p / m_e) \approx d \cdot m_e / m_p = 22\ \mu\text{m}\,.$ (3)

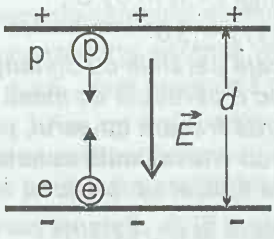


Fig.1.3.1

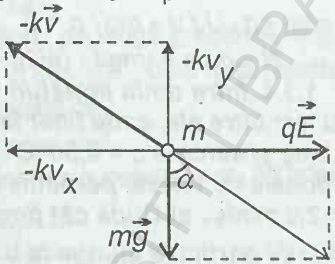


Fig.1.3.4

1.3.2. ***De pe o armătură a unui condensator plan în vid, cu distanţa dintre armături*** d = 10 mm , ***pleacă simultan din repaus un proton şi o particulă*** α ***(nucleu de*** He^4 ***format din*** 2 ***protoni şi*** 2 ***neutroni). Ce distanţă va parcurge particula*** α ***până în momentul când protonul ajunge la cealaltă armătură ?*** ($q_\alpha = 2e,\ m_\alpha \approx 4m_p$).

Rezolvare. Acceleraţiile particulelor sunt :

$$a_p = eE : m_p\,, \quad a_\alpha = 2eE : m_\alpha \approx eE : (2m_p)\,. \qquad (1)$$

Pentru proton avem condiţia :

$$d = (1/2)a_p t^2 \;\rightarrow\; t^2 = 2d / a_p\,, \qquad (2)$$

de unde rezultă : $x = (1/2)\,a_\alpha t^2 = (1/2)\,a_\alpha \cdot 2d / a_p =$

$$= d \cdot a_\alpha / a_p = d \cdot m_p / m_\alpha \cong d/2 = 5\ \text{mm}\,. \qquad (3)$$

1.3.3. ***Într-un condensator plan orizontal, cu distanţa dintre armături*** d = 10,0 mm, ***se găseşte o particulă de masă*** m = = 48 pg . ***În absenţa câmpului electric, particula cade*** uniform ***datorită frecării cu aerul, forţa de frecare fiind proporţională cu viteza. Aplicând o tensiune*** U = 4,90 kV , ***particula cade uniform cu o viteză de*** n = 2,0 ori ***mai mică . Aflaţi câte sarcini*** elementare ***are particula .***

Rezolvare. Forţa de frecare cu aerul *creşte* cu viteza şi la un moment dat *echilibrează* greutatea : din acest moment particula cade *uniform* (acceleraţia = 0) cu viteza *limită* atinsă în acel moment:

$$mg - kv_0 = 0\,. \qquad (1)$$

Prin aplicarea tensiunii apare în condensator câmpul electric $E = U / d$ care exercită asupra particulei forţa qE. Analog cazului precedent, forţa de frecare (crescând) echilibrează la un moment dat

celelalte forţe şi particula cade *uniform* cu noua viteză *limită* v_0 / n:

$$mg - q \cdot U / d - k v_0 / n = 0 . \quad (2)$$

Scoatem kv_0 din (1) şi introducem în (2) :

$$mg - q \cdot U / d - mg / n = 0 , \quad q = mg(1 - 1/n)\, d / U ,$$

$$N = q / e = [mgd : (eU)] \cdot (n - 1) / n = 3{,}0 . \quad (3)$$

1.3.4. ***Între două armături verticale paralele cu distanţa*** d = = 20 mm ***între ele, cade liber la mijloc o particulă de masă*** m = = 2,0 ng ***şi sarcină*** q = 0,50 fC . ***Datorită frecării cu aerul, proporţionale cu viteza, particula cade cu viteza*** limită ***constantă*** v_0 = 2,0 mm/s . ***a) După cât timp de la aplicarea tensiunii*** U = = 4,0 kV ***particula ajunge la o armătură şi ce distanţă parcurge pe verticală ? b)*** Idem, ***pentru cazul mişcării în vid .***

Rezolvare. a) Forţa de frecare cu aerul *creşte* cu viteza şi la un moment dat echilibrează greutatea . Din acest moment forţa rezultantă este zero, deci acceleraţia este zero şi particula cade *uniform* cu viteza *limită* constantă atinsă în acel moment :

$$mg - kv_0 = 0 , \quad k = mg / v_0 . \quad (1)$$

Aplicând tensiunea, particula va fi supusă şi la o forţă electrică orizontală $qE = qU / d$. La limita mişcării uniforme, forţele îşi fac echilibru şi avem pe axele de coordonate :

$$qU / d - kv_x = 0 , \qquad mg - kv_y = 0 \quad (2)$$

sau $\quad qU / d - mg\, v_x / v_0 = 0 , \qquad mg - mg\, v_y / v_0 = 0$

$$\rightarrow \; v_x = v_0\, qU / (mgd) , \quad v_y = v_0 . \quad (3)$$

Mişcarea este *rectilinie uniformă* :

$$d / 2 = v_x t , \quad t = d / (2v_x) = mgd^2 : (2v_0 qU) = 1{,}0 \text{ s} , \quad (4)$$

$$y = v_y t = v_0 t = mgd^2 : (2qU) = 2{,}0 \text{ mm} . \quad (5)$$

b) În vid mişcarea pe orizontală este uniform accelerată cu acceleraţia $a_x = qE / m = qU / (md)$, iar pe verticală este o cădere liberă cu acceleraţia g ; mişcarea rezultantă este rectilinie uniform accelerată (pe o dreaptă oblică). Avem condiţia :

$$d / 2 = (1/2)\, a_x t^2 = [qU / (2md)]\, t^2 , \quad t = d \sqrt{m/(qU)} = 20 \text{ ms} , \quad (6)$$

$$y = (1/2)\, gt^2 = mgd^2 : (2qU) = 2{,}0 \text{ mm} , \quad (7)$$

aceeaşi distanţă pe verticală ca la punctul a), deoarece traiectoria este aceeaşi dreaptă, la fel de înclinată : $\mathrm{tg}\alpha = qE / (mg)$.

1.3.5. ***De un fir este suspendată o bilă de masă*** m = 10 g ***şi sarcină*** q = 0,16 μC . ***Aflaţi raportul dintre perioada micilor***

oscilaţii în absenţa câmpului electric şi perioada în prezenţa unui câmp E = 100 kV/m ***orientat vertical în sus .***

Rezolvare. În absenţa câmpului electric avem pendulul simplu gravitaţional : $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. (1)

În prezenţa câmpului electric vertical , pe lângă greutatea $m\vec{g}$ mai acţionează forţa electrică vertical în sus $q\vec{E}$, deci forţa rezultantă $m\vec{g} + q\vec{E}$, care proiectată pe verticală dă :

$$F = mg - qE = m(g - qE/m) = mg' \ , \qquad (2)$$

ceea ce este echivalent cu modificarea acceleraţiei g , de aceea noua perioadă a oscilaţiilor va fi :

$$T' = 2\pi\sqrt{\ell/g'} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - qE/m}} \ , \qquad (3)$$

$$T'/T = \frac{g - qE/m}{g} = \sqrt{1 - qE/(mg)} = 0{,}90 \ . \qquad (4)$$

1.3.6. ***O bilă cu masa*** m = 2,0 g ***şi sarcina*** q = 1,00 μC, ***suspendată de un fir de lungime*** ℓ = 1,00 m , ***oscilează cu amplitudinea unghiulară*** α = 45° ***în jurul unei poziţii de echilibru care face unghiul*** α_0 = 15° ***cu verticala, sub acţiunea gravitaţiei şi a unui câmp electric orizontal . Aflaţi diferenţa de potenţial între punctele extreme atinse de bilă în timpul oscilaţiilor .***

Rezolvare. În poziţia de *echilibru* cele două forţe $m\vec{g}$ şi $q\vec{E}$ trebuie să dea o rezultantă, egală în modul şi de sens opus cu tensiunea din fir , de aceea

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = qE/(mg) \rightarrow E = (mg/q)\,\mathrm{tg}\alpha_0 \ . \qquad (1)$$

Câmpul electric fiind *omogen* şi *uniform* diferenţa de potenţial este $V_1 - V_2 = E\,d$, (2)

unde d este distanţa pe direcţia câmpului ,

$$V_1 - V_2 = E\,[\ell\,\sin(\alpha + \alpha_0) + \ell\,\sin(\alpha - \alpha_0)] =$$

$$= (mg/q)\,\mathrm{tg}\alpha_0 \cdot \ell \cdot 2\sin\alpha\,\cos\alpha_0 = (2mg\ell/q)\sin\alpha_0\,\sin\alpha = 7{,}32 \text{ kV}. \qquad (3)$$

1.3.7. ***O bilă de masă*** m ***şi sarcină*** q , ***suspendată de un fir ideal izolator, se află într-un câmp electric orizontal*** E . ***Bila a fost deviată cu unghiul*** α ***faţă de poziţia de echilibru şi apoi lăsată liberă. Aflaţi tensiunea din fir în momentul când firul face unghiul*** θ ***cu poziţia de echilibru, în timpul oscilaţiilor. Trataţi câteva cazuri particulare .***

Rezolvare. Conform problemei precedente 1.3.6 pendulul din

enunţ se comportă ca un pendul simplu gravitaţional, dar într-un câmp echivalent :

$$\vec{g}' = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}\,, \quad g' = \sqrt{g^2 + q^2E^2/m^2}\,, \tag{1}$$

cu poziţia de *echilibru* dată de unghiul α_o : $\operatorname{tg}\alpha_o = qE/(mg)$. (2)

Acum putem prelua rezultatul cunoscut de la pendulul simplu gravitaţional : $T = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)$, (3)

în care trebuie să înlocuim pe g cu g' :

$$T = \sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}\,(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\,. \tag{4}$$

Cazuri *particulare* :

a) $T_{max}(\theta = 0) = \sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}\,(3 - 2\cos\alpha)$. (5)

b) $\theta = \alpha = \alpha_o$, $T = mg$, (6)

pendulul oscilează între poziţia verticală şi $2\alpha_o$.

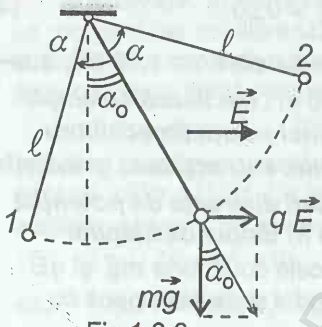


Fig.1.3.6

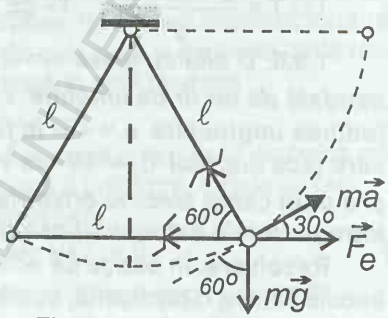


Fig.1.3.9

1.3.8. ***O bilă încărcată, de masă*** m , ***suspendată de un fir izolant, se află în echilibru într-un câmp electric orizontal, cu firul deviat cu unghiul*** α . ***Se inversează instantaneu sensul câmpului electric. Aflaţi tensiunea din fir în timpul oscilaţiilor când firul formează unghiul*** θ ***cu noua direcţie de echilibru a firului. Cazuri particulare.***

Rezolvare. În poziţia iniţială de echilibru, forţele $m\vec{g}$ şi $q\vec{E}$, compuse fiind trebuie să dea o rezultantă în echilibru cu tensiunea din fir (deci egală în modul şi de sens opus cu tensiunea) , atunci

$$\operatorname{tg}\alpha = qE/(mg)\,. \tag{1}$$

Inversând sensul câmpului, noua poziţie de echilibru va fi deviată tot cu α dar de cealaltă parte a verticalei şi prin această inversare pendulul apare deviat cu 2α faţă de noua poziţie de echilibru, deci el va oscila cu această amplitudine în jurul noii poziţii de echilibru.

Pendulul din problemă este echivalent cu un pendul simplu gravitaţional, dar supus la forţa

$$\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}\,, \quad F = mg\sqrt{1+q^2E^2/(mg)^2} = mg/\cos\alpha\,, \qquad (2)$$

$$g' = g\sqrt{1+q^2E^2/(mg)^2} = g\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = g/\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

Acum putem aplica formula pentru tensiunea din fir (formula (3) de la problema precedentă 1.3.7) :

$$T = (mg/\cos\alpha)(3\cos\theta - 2\cos 2\alpha)\,, \qquad (4)$$

unde 2α este *amplitudinea* oscilaţiilor, iar θ este unghiul format de fir cu noua poziţie de echilibru .

Cazuri particulare : a) În poziţiile extreme $\theta = \pm 2\alpha$ (adică unghiurile 3α şi $-\alpha$ faţă de *verticală*) :

$$T_{min} = mg\cos 2\alpha/\cos\alpha\,. \qquad (5)$$

b) La trecerea prin poziţia de echilibru $\theta = 0$ (adică unghiul α faţă de *verticală*) : $T_{max} = (mg/\cos\alpha)(3 - 2\cos 2\alpha)$. (6)

1.3.9. ***Două bile identice încărcate sunt legate între ele printr-un fir de lungime*** $\ell = 5{,}0$ ***cm şi, cu ajutorul a două fire de aceeaşi lungime, sunt suspendate într-un punct astfel încât firele formează un triunghi echilateral. Imediat după tăierea firului dintre bile, acceleraţia fiecărei bile a fost*** $a = 40\ \mathrm{m/s^2}$. ***Aflaţi viteza fiecărei bile în momentul când bilele ajung la aceeaşi înălţime cu punctul de suspensie .***

Rezolvare. După tăierea firului bilele au o mişcare circulară (de rază ℓ). În momentul iniţial $v = 0$, deci acceleraţie normală (radială) $a_n = v^2/\ell = 0$, rămâne numai acceleraţia tangenţială $a = a_t$. Atunci pe direcţia acceleraţiei tangenţiale *lex secunda* dă :

$$F_e\cos 30^\circ - mg\cos 60^\circ = ma\,, \quad F_e = q^2 : (4\pi\varepsilon\ell^2)\,,$$

$$[q^2 : (4\pi\varepsilon\ell^2)]\sqrt{3}/2 - mg/2 = ma\,. \qquad (1)$$

Scriem legea de *conservare a energiei*, luând ca nivel de referinţă pentru energia potenţială gravitaţională punctul de suspensie :

$$-2mg\ell\sin 60^\circ + q^2 : (4\pi\varepsilon\cdot 2\ell\cos 60^\circ) =$$

$$= 2\cdot(1/2)mv^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon\cdot 2l)\,, \qquad (2)$$

unde $q_1q_2 : (4\pi\varepsilon r)$ este energia *potenţială* de interacţie electrostatică a două sarcini electrice .

$$-mg\ell\sqrt{3} + q^2 : (4\pi\varepsilon\cdot\ell) = mv^2 + q^2 : (4\pi\varepsilon\cdot 2\ell)\,, \qquad (3)$$

$$-mg\ell\sqrt{3} + (\ell/\sqrt{3})(mg/2 + ma) = mv^2\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell\,(2a - 5g)} = 0{,}66 \text{ m/s} \qquad (4)$$

(trebuie ca $2a > 5g$) .

1.3.10. ***Bila unui pendul conic ideal are masa*** m = 2,00 g, ***sarcina*** q = 2,5 nC ***şi descrie un cerc de rază*** R = 30 mm ***cu viteza unghiulară*** $\omega = 2{,}00\ s^{-1}$. ***În centrul cercului se aşează o sarcină identică*** q . ***Cât trebuie să fie noua viteză unghiulară pentru ca raza*** R ***să nu se schimbe ?***

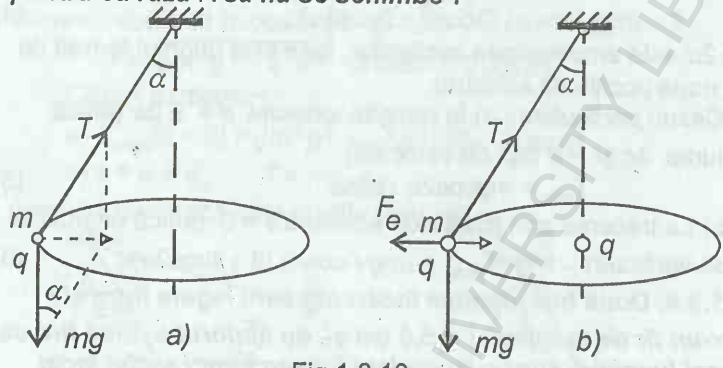


Fig.1.3.10

Rezolvare. În primul caz rezultanta forţelor este

$$mg\,\mathrm{tg}\alpha = ma_c = m\omega^2 R . \qquad (1)$$

În al doilea caz acţionează în plus forţa de respingere F_e :

$$mg\,\mathrm{tg}\alpha = q^2 : (4\pi\varepsilon R^2) = m\omega'^2 R . \qquad (2)$$

Din aceste două ecuaţii prin scădere membru cu membru rezultă :

$$\omega'^2 = \omega^2 - q^2 : (4\pi\varepsilon m R^3) = 2{,}89\ s^{-2}, \quad \omega' = 1{,}7\ s^{-1} . \qquad (3)$$

1.3.11. ***De un fir ideal este suspendată o bilă de masă*** m = = 1,0 g ***şi sarcină*** q = 10 nC. ***La ce distanţă maximă, respectiv minimă, trebuie apropiată de bilă o sarcină identică pentru ca tensiunea din fir să se micşoreze de*** n = 3,0 ori ***?***

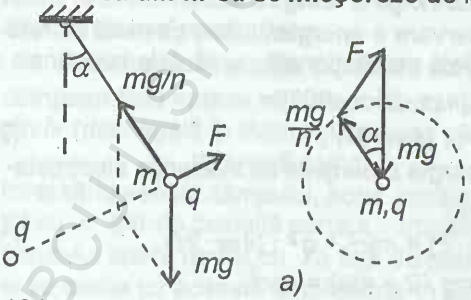


Fig.1.3.11 a

BCU IAŞI / COPYRIGHT UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. Pe lângă forţa de greutate mg şi tensiunea din fir mg/n mai acţionează şi forţa de *respingere* $F = q^2 : (4\pi\varepsilon r^2)$. Distanţa maximă (minimă) corespunde forţei F minime (respectiv maxime). Compunem cele 3 forţe .

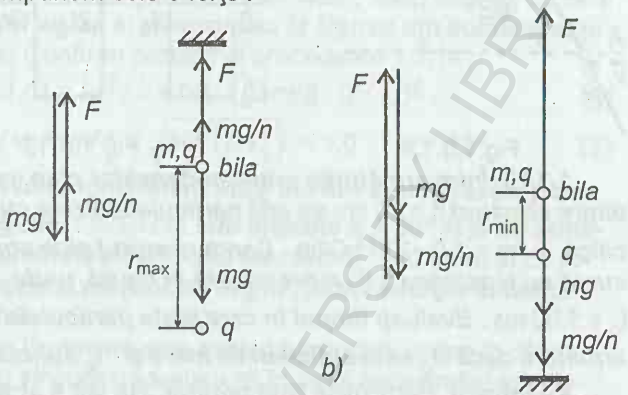


Fig.1.3.11 b

Pentru diferite valori α , locul geometric al originii forţei F (cu vârful fix) este un *cerc*, de unde se vede imediat pentru ce poziţie (α) avem F_{min} (r_{max}) şi F_{max} (r_{min}) .

Avem în cele două cazuri : $mg = mg/n + F$, $mg + mg/n = F$,(1)

$$q^2 : (4\pi\varepsilon r^2) = mg(1 \mp 1/n) ,$$

$$r = q : \sqrt{4\pi\varepsilon mg(1 \mp 1/n)} = 11{,}7 \text{ mm , respectiv } 8{,}3 \text{ mm .} \quad (2)$$

1.3.12. ***Pe două grile paralele dintr-un tub electronic, cu diferenţa de potenţial*** U = 100 V ***între ele, cad electroni sub unghiul de incidenţă*** $\alpha = 60^o$***. Ce energie minimă în*** eV ***trebuie să aibă electronii pentru a putea traversa grilele ?***

Rezolvare. Asupra electronilor acţionează o forţă electrică

$$\vec{F} = -e\vec{E} \quad (1)$$

(forţa gravitaţională este total neglijabilă) .

Analog aruncării oblice în câmp gravitaţional, mişcarea se descompune într-o mişcare uniformă paralel cu grile cu viteza $v_x = v\cos\alpha$ şi o mişcare uniform accelerată perpendicular pe grile cu acceleraţia eE/m. La limită electronii trebuie să ajungă pe grila a doua (pentru a o putea traversa). Aplicăm teorema *variaţiei energiei cinetice* :

$$L = -e(V_A - V_B) = -eU = \Delta E_c =$$

$$= (1/2)m(v\sin\alpha)^2 - (1/2)mv^2 = E_c\sin^2\alpha - E_c , \quad (1)$$

$$E_c = eU : (1 - \sin^2\alpha) = eU : \cos^2\alpha = 64 \text{ aJ} = 400 \text{ eV} . \quad (2)$$

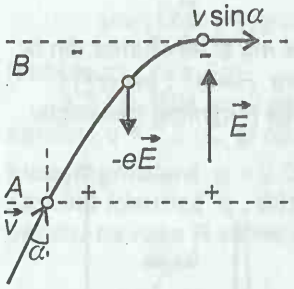


Fig.1.3.12

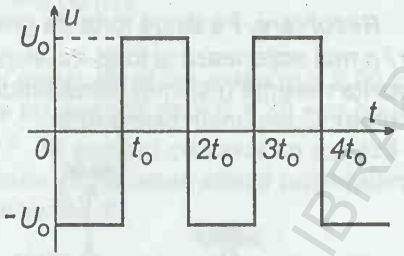


Fig.1.3.13

1.3.13. ***Între armăturile unui condensator plan, cu distanţa dintre armături*** d = 10 cm ***se află particule ionizate cu sarcina specifică*** q / m = 1,0 · 10^{-14} C/kg . ***Condensatorul este conectat la o sursă cu tensiunea*** u (t) ***reprezentată în figură, unde*** U_0 = 2,0 kV , t_0 = 1,00 ms . ***Evaluaţi timpul în care toate particulele se depun pe armături, dacă*** U_0 ***este suficient de mare şi*** t_0 ***suficient de mic.***

Rezolvare. Particulele fiind pozitive, ele vor fi atrase în primul moment de armătura care este în acest moment negativă, şi anume , în timpul t_0 particulele parcurg accelerat distanţa

$$d_0 = at_0^2 / 2 = [qU / (2md)]\, t_0^2 , \qquad (1)$$

apoi în următorul interval t_0 când se inversează câmpul, ele parcurg în continuare frânat, aceeaşi distanţă (considerată « d) . Mai departe, procesul se repetă, de aceea : $t \approx t_0 \cdot d / d_0 =$

$$= t_0 \cdot 2md^2 : (qU_0 t_0^2) = 2d^2 : [(q / m) U_0 t_0] = 16{,}7 \text{ min} \qquad (2)$$

(se depun pe armătura care este în primul moment negativă) .

1.3.14. ***Între armăturile unui condensator plan-paralel intră pe linia mediană o particulă încărcată . Tensiunea dintre armăturile condensatorului este astfel încât particula iese chiar la marginea unei armături . Lungimea condensatorului*** ℓ = 10,0 cm , ***distanţa dintre armături*** d = 1,0 cm . ***Aflaţi unghiul cu care deviază viteza particulei .***

Rezolvare. Mişcarea particulei se descompune într-o mişcare uniformă paralel cu armături, cu viteza $v_x = v_0$, şi o mişcare uniform accelerată pe direcţia normală la armături. Unghiul cerut este dat de $\operatorname{tg}\alpha = v_y : v_x = at : v_0$,

dar $d / 2 = (1/2)\, at^2$ şi $\ell = v_x t = v_0 t$, (1)

$$\operatorname{tg}\alpha = at^2 : (v_0 t) = d : \ell = 0{,}10 , \quad \alpha = 5^\circ 43 ' . \qquad (2)$$

1.3.15. ***Între armăturile unui condensator plan-paralel intră cu viteza*** v_0 =13,3 Mm/s ***pe linia mediană un electron. Tensiunea din-tre armăturile condensatorului*** U =,00 kV, ***sarcina specifică a ele-ctronului*** e / m = 1,76 ·10^{11} C/kg. ***Ştiind că electronul lese din con-densator chiar la marginea unei armături, aflaţi unghiul cu care a deviat vectorul viteză al electronului la ieşirea din condensator.***

Rezolvare. Conform problemei precedente 1.3.14 :

$$\ell = v_0 t\,, \quad d/2 = at^2/2 = [eU : (2md)] \cdot (\ell / v_0)^2\,, \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = at^2/v_0 = d/\ell = \sqrt{eU/\left(mv_0^2\right)} = 1{,}0\,, \quad \alpha = 45^\circ\,. \qquad (2)$$

1.3.16. ***Un ion monovalent intră într-un condensator plan-paralel de lungime*** ℓ = 10 cm ***sub unghiul*** α = 30° ***faţă de armături. Ştiind intensitatea câmpului electric*** E = 40 kV/m ***şi că ionul iese sub acelaşi (în modul) unghi , aflaţi energia cinetică iniţială a ionului.***

Rezolvare. Problema este analogă aruncării oblice în câmp gravitaţional, cu singura deosebire că în locul acceleraţiei gravitaţionale *g* avem acceleraţia $a = eE/m$.

Atunci lungimea condensatorului reprezintă "bătaia" :

$$\ell = (v_0^2/a)\sin 2\alpha = [mv_0^2/(eE)]\,\sin 2\alpha\,, \qquad (1)$$

$$W_0 = (1/2)\,mv_0^2 = eE\,\ell : (2\sin 2\alpha) = 0{,}37\ \mathrm{fJ} = 2{,}3\ \mathrm{keV}\,. \qquad (2)$$

1.3.17. ***O particulă încărcată, accelerată în prealabil de o diferenţă de potenţial*** U_a = 100 V, ***intră într-un condensator plan după linia axială (mediană). Distanţa dintre armături*** d =1,00 cm, ***lungimea armăturilor*** ℓ = 10,0 cm . ***Aflaţi tensiunea maximă permisă pe condensator pentru ca particula să poată ieşi din condensator.***

Rezolvare. Mişcarea particulei se descompune într-o mişcare uniformă paralel cu armături cu viteza $v_x = v_0$ şi o mişcare uniform accelerată perpendicular pe armături, cu acceleraţia $a = eE/m = qU/(md)$ (analog aruncării orizontale în câmp gravitaţional) :

$$\ell = v_0 t\,, \quad d/2 = at^2/2 = [qU : (2md)] \cdot \ell^2 / v_0^2\,, \qquad (1)$$

$$v_0^2 = 2qU_a/m\,, \quad U = 2U_0\, d^2/\ell^2 = 2{,}0\ \mathrm{V}\,. \qquad (2)$$

1.3.18. ***Două particule de mase*** $m_{1,2}$ ***şi sarcini*** $q_{1,2}$ ***intră cu aceeaşi viteză într-un condensator plan, paralel cu armături. Aflaţi raportul devierilor*** y_1 / y_2 ***particulelor la ieşirea lor din condensator.*** **Aplicaţie** ***la proton şi particula*** α .

Rezolvare. Conform problemelor precedente :

$$\ell = v_0 t\,, \quad y = at^2/2\,, \quad a = qE/m\,, \qquad (1)$$

$y = [qE : (2m)] \cdot \ell^2 / v_o^2$, $y_1 : y_2 = (q_1 / q_2)\,(m_2 / m_1)$. (2)

Aplicaţie : $m_\alpha \approx 4m_p$, $q_\alpha = 2e$, (3)

$y_p : y_\alpha = [e : (2e)]\,(4m_p : m_p) = 2$. (4)

1.3.19. ***Un fascicul de particule de diferite mase şi diferite sarcini, accelerate în prealabil de aceeaşi diferenţă de potenţial, intră într-un condensator plan, paralel cu armături. Se separă particulele la ieşirea din condensator ?***

Rezolvare. Conform problemei precedente 1.3.18, deviaţia unei particule la ieşirea din condensator este

$y = qE\,\ell^2 : (2mv_o^2)$, dar $v_o^2 = 2qU_a / m$, (1)

$y = qE\,\ell^2 : (2m \cdot 2qU_a / m) = E\,\ell^2 : (4U_a)$, deci $y_1 / y_2 = 1$ (2)

şi particulele ***nu*** *se separă* !

1.3.20. ***Un fascicul de ioni, acceleraţi de o diferenţă de potenţial*** $U_a = 200$ V ***, intră într-un condensator plan, paralel cu armături . La ieşire fasciculul dă pe un ecran un spot deplasat cu*** $y = 3{,}6$ cm ***. Lungimea armăturilor condensatorului*** $\ell = 4{,}0$ cm ***, distanţa dintre armături*** $d = 1{,}2$ cm ***, distanţa de la mijlocul condensatorului până la ecran*** $L = 12$ cm***. Aflaţi tensiunea de pe condensator.***

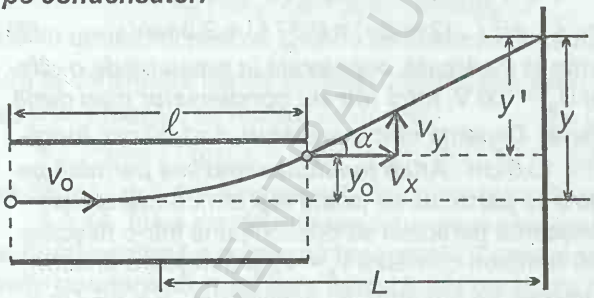


Fig.1.3.20

Rezolvare. Mişcarea particulei în condensator este analogă aruncării (orizontale) în câmp gravitaţional cu acceleraţia :

$a = F / m = qE / m = qU / (md)$; (1)

$\ell = v_o t$, $y_o = at^2 / 2 = [qU : (2md)] \cdot \ell^2 / v_o^2$. (2)

După ieşirea din condensator particula se mişcă rectiliniu uniform :

$\operatorname{tg}\alpha = v_y : v_x = at : v_o = qU\ell : (mdv_o^2)$,

$y' = (L - \ell / 2)\operatorname{tg}\alpha = (L - \ell / 2)\,qU\ell : (mdv_o^2)$, (3)

$y = y_o + y' = qU\ell^2 : (2mdv_o^2) + (L - \ell / 2)\,qU\ell : (mdv_o^2) =$

$= qU\ell L : (mv_o^2 d)$, (4)

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dar $v_o^2 = 2qU_a : m$, $y = [\ell L : (2d)] \cdot U / U_a$, (5)

$U = U_a \cdot 2yd : (\ell L) = 54$ V. (6)

1.3.21. ***Un electron intră pe linia mediană a unui condensator plan cu distanţa dintre armături*** d, ***lungimea armăturilor*** ℓ ***şi tensiunea dintre armături*** U***. Ce viteză minimă trebuie să aibă electronul pentru a nimeri o ţintă circulară de rază*** R ***aşezată la distanţa*** L ***de condensator ?***

Rezolvare. Conform problemei precedente 1.3.20, deviaţia la ieşire din condensator şi unghiul vitezei la ieşire sunt :

$y_o = eU\ell^2 : (2mv_o^2 d)$, $\operatorname{tg}\alpha = eU\ell : (mv_o^2 d)$, $y' = L\operatorname{tg}\alpha$, (1)

$y = y_o + y' = eU\ell(L + \ell/2) : (mv_o^2 d)$. (2)

Avem restricţie atât pentru y_o cât şi pentru y :

$y_o \le d/2 \rightarrow v_o \ge (\ell/d)\sqrt{eU/m} = v_{cr}$, (3)

$y \le R \rightarrow v_o \ge \sqrt{eU\ell(L+\ell/2)/(mRd)} = v_{cr}\sqrt{d(1+2L/\ell)/(2R)}$. (4) Dacă $1 + 2L/\ell < 2R/d$, atunci rămâne condiţia (3) $v_o \ge v_{cr}$, altfel va fi condiţia (4).

1.3.22. ***O particulă de masă*** m = 10 mg ***şi sarcină*** q = 0,40 μC ***este ţinută iniţial lângă armătura pozitivă a unui condensator cu armături plane verticale, aflate la distanţa*** d = 60 mm ***între ele şi cu diferenţa de potenţial*** U = 10 V ***între ele. Lăsând particula liberă, aflaţi lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate până când particula atinge armătura opusă .***

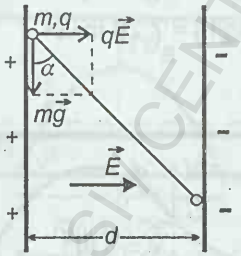


Fig.1.3.22

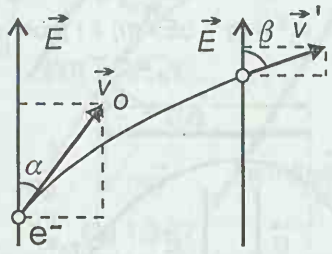


Fig.1.3.23

Rezolvare. Pe verticală particula cade liber cu acceleraţia $\vec{g}$, iar pe orizontală are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia $q\vec{E}/m$. Traiectoria va fi *rectilinie*, cu unghiul de înclinare $\operatorname{tg}\alpha = qE/(mg)$. *Ecuaţiile mişcării* sunt :

$x = (1/2)[qU/(md)]t^2$, $y = (1/2)gt^2$. (1)

Timpul de traversare şi distanţa de coborîre sunt ($x = d$) :

$$t^2 = 2md^2 : (qU) , \quad y = (1/2)g \cdot 2md^2 : (qU) . \qquad (2)$$

Lucrul mecanic al forţei de greutate :

$$W = mgy = (mgd)^2 : (qU) = 8{,}6\ \mu J . \qquad (3)$$

1.3.23. ***Un electron intră într-un condensator cu viteza*** v_0 = = 2,0 Mm/s ***sub unghiul*** $\alpha = 60^\circ$ ***faţă de linia de câmp de intensitate*** E =148 V/m ***. După*** t = 30 ns ***electronul iese din condensator sub unghiul*** β ***. Aflaţi acest unghi.***

Rezolvare. Pe direcţia normală la câmp mişcarea este uniformă, iar de-a lungul câmpului este uniform frânată :

$$v' \sin\beta = v_0 \sin\alpha , \quad v' \cos\beta = v_0 \cos\alpha - (eE / m)\, t , \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\beta = v_0 \sin\alpha : [v_0 \cos\alpha - (eE / m)\, t\,] = 7{,}87 , \quad \beta = 82^\circ\, 46' . \qquad (2)$$

1.3.24. ***Într-un condensator în care câmpul electric*** E = = 1000 kV/m ***intră o particulă de masă*** m = 100 mg ***şi sarcină*** q = 10 nC ***sub unghiul*** $\alpha = 45^\circ$ ***şi iese sub unghiul*** $\beta = 60^\circ$ ***faţă de armături , care sunt aşezate orizontal, ca în figură, şi au lungimea*** ℓ = 10,0 cm***. Aflaţi viteza iniţială a particulei.***

Rezolvare. Pe orizontală particula se mişcă uniform (nu avem forţe orizontale, deci nici acceleraţie) . Pe verticală particula se mişcă uniform variat cu acceleraţia

$$\vec{a} = \left(m\vec{g} + q\vec{E}\right) : m = \vec{g} + q\vec{E}/m . \qquad (1)$$

Problema este analogă aruncării oblice în câmp gravitaţional :

$$\ell = v_x t = v_0 \cos\alpha \cdot t , \quad v_y = - v_x \mathrm{tg}\beta = v_0 \sin\alpha - (g + qE / m)t, \qquad (2)$$

$$- v_0 \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = v_0 \sin\alpha - (g + qE / m) \cdot \ell : (v_0 \cos\alpha) ,$$

$$v_0^2 = (g + qE / m)\, \ell : [\cos^2\alpha \cdot (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)] = 7{,}29\ \mathrm{m^2/s^2} ,$$

$$v_0 = 2{,}7\ \mathrm{m/s} . \qquad (3)$$

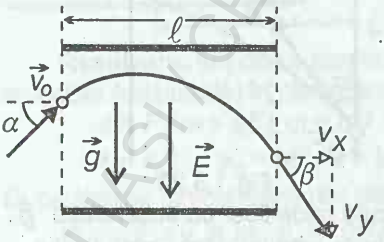


Fig.1.3.24

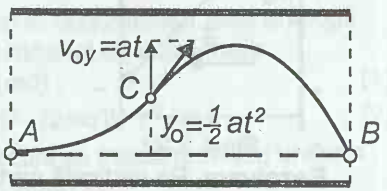


Fig.1.3.25

1.3.25. ***Într-un condensator plan-paralel intră cu viteza*** v ***paralelă cu armături, în punctul*** A, ***o particulă (atomică) încărcată. După cât timp*** t ***trebuie inversată polaritatea tensiunii pe***

armături pentru ca particula să iasă din condensator prin punctul B ? AB = ℓ .

Rezolvare. În momentul t al inversării câmpului particula are viteza şi coordonatele (C) :

$$v_{ox} = v_o\,,\quad v_{oy} = at\,;\quad x_o = v_o t\,,\quad y_o = at^2/2\,. \qquad (1)$$

Din punctul C avem o aruncare oblică, astfel încât particula trebuie să treacă prin B . Timpul acestei aruncări este $\tau = \ell / v - t$ şi avem condiţia : $y(B) = 0 = y_o + v_{oy}\tau - a\tau^2/2$,

$$(1/2)at^2 + at\,(\ell / v - t) - (1/2)a(\ell / v - t)^2 = 0$$

sau $$t^2 - 2(\ell / v)\,t + \ell^2/(2v^2) = 0\,,$$

$$t = (\ell / v)(1 \pm 1 : \sqrt{2}\,),\quad t = (\ell / v)\,(1 - \sqrt{2}\ : 2) = 0{,}30\ \ell / v,\ (1)$$

$(\tau = \ell / v - t \rightarrow t = \ell / v - \tau < \ell / v)$.

1.3.26. ***Într-un tub catodic între catodul plan şi anodul plan, paralel, s-a intercalat o grilă, ca în figură, unde*** d_a = 4,0 mm , $d_g = d/2$. ***De pe catod pleacă un electron sub unghiul*** α = = 45° ***şi ajunge la o distanţă minimă*** $f d_a$, (f = 1/4) ***de anod. Anodul şi grila sunt negativate şi*** $U_g = U_a / 3$. ***Aflaţi la ce distanţă de punctul de plecare revine electronul înapoi pe catod .***

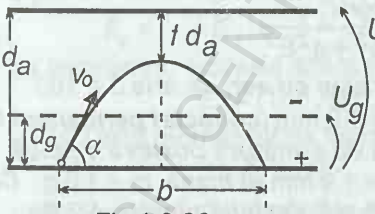


Fig.1.3.26

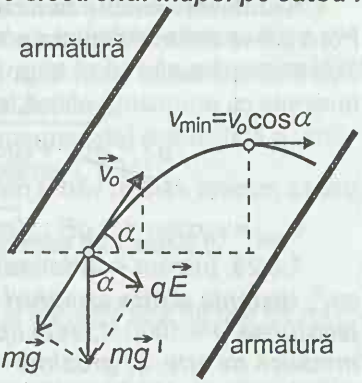


Fig.1.3.27

Rezolvare. Fie $t_{1,2}$ - timpul de zbor de la catod la grilă, respectiv de la grilă la distanţa minimă de anod . Pe direcţia paralelă cu electrozii mişcarea este uniformă cu viteza $v_o\cos\alpha$ (nu avem forţe, deci nici acceleraţie pe această direcţie). Pe direcţia perpendiculară pe electrozi mişcarea este uniform încetinită.

$b = 2v_o\cos\alpha \cdot (t_1 + t_2)$,

$$v_y = v_o \sin\alpha - [eU_g : (md_g)]\, t_1 - \{e(U_a - U_g) : [m(d_a - d_g)]\}\, t_2 , \quad (1)$$

$$y = d_a - d_g - fd_a = (1/2)\,\{e(U_a - U_g) : [m(d_a - d_g)]\}\, t_2^2 . \quad (2)$$

Teorema *variaţiei energiei cinetice* :

$$L = -e[U_g + (U_a - U_g)(d_a - d_g - fd_a) : (d_a - d_g)] =$$

$$= (1/2)\, mv_o^2 \cos^2\alpha - (1/2)\, mv_o^2 . \quad (3)$$

Pentru simplificarea calculelor trecem la cazul concret din problemă : $d_g = d_a / 2$, $U_g = U_a / 3$, $fd_a = d_a / 4$:

$$v_o \sin\alpha - (e/m)\,[2U_a / (3d_a)]\, t_1 - (e/m)\,[4U_a / (3d_a)]\, t_2 = 0, \quad (4)$$

$$d/4 = (1/2)\,(e/m)\,[4U_a / (3d_a)]\, t_2^2 ,$$

$$-e \cdot 2U/3 = (1/2)\, mv_o^2 \cos^2\alpha - (1/2)\, mv_o^2 . \quad (5)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$b = (4 - \sqrt{2})\, d_a \operatorname{ctg}\alpha = 10{,}4 \text{ mm} . \quad (6)$$

1.3.27. ***Într-un condensator plan-paralel aşezat vertical, în vid, intră o particulă de masă*** m ***şi sarcină*** q ***cu viteza*** v_o ***vertical în sus. Ştiind câmpul electric*** E ***din condensator, aflaţi viteza minimă pe care o va atinge particula în condensator.***

Rezolvare. Asupra particulei acţionează forţa $\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}$. Pentru a vedea mai bine traiectoria desenăm condensatorul în poziţie înclinată astfel încât forţa $\vec{F}$ să fie *verticală* . Acum se vede analogia cu aruncarea oblică în câmp gravitaţional cu acceleraţia:

$$g' = \sqrt{g^2 + (qE/m)^2} . \quad (2)$$

Viteza *minimă* este în vârful parabolei :

$$v_{min} = v_o \cos\alpha = v_o qE : \sqrt{m^2 g^2 + q^2 E^2} . \quad (3)$$

1.3.28. ***Într-un condensator plan cu aer, de arie*** S = 100 cm^2***, distanţa dintre armături*** d = 5,0 mm ***,conectat permanent la tensiunea*** U = 1000 V***, este lipită de armătura pozitivă o placă metalică de arie*** S***, grosime*** e = 1,0 mm ***şi masă*** m = 1,0 g ***. Cu ce viteză loveşte placa, lăsată liberă, cealaltă armătură ? Se neglijează gravitaţia şi frecările.***

Rezolvare. Conform problemei 1.2.4 capacitatea condensatorului cu placă intercalată nu depinde de poziţia acesteia :

$$C = \varepsilon_o S : (d - e) . \quad (1)$$

Mişcarea plăcii desprinse, cu sarcina q , reprezintă un *curent* : trecerea sarcinii + q prin circuit, astfel încât armătura pozitivă a condensatorului se încarcă cu + q şi avem situaţia din figură . Energiile

iniţială şi finală ale sistemului sunt :

$$W_0 = (1/2)\,C\,U^2\,, \quad W' = (1/2)\,C\,U^2 + (1/2)\,mv^2\,. \tag{2}$$

Energia cinetică este furnizată de sursă prin care trece sarcina q :

$$L = q\,U = (1/2)\,mv^2\,, \qquad v = \sqrt{2qU/m}\,, \quad q = CU\,, \tag{3}$$

$$v = U\sqrt{2C/m} = U\sqrt{2\varepsilon_0 S/\left[m(d-e)\right]} = 0{,}21 \text{ m/s}\,. \tag{4}$$

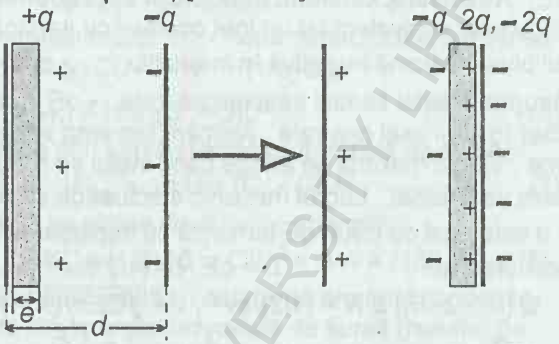


Fig.1.3.28

1.3.29. ***Un "dipol" electric, format din două bile de masă*** m = 5,0 g ***şi sarcină*** |q| = 1,0 μC , ***situate la capetele unei tije izolante fixe de lungime*** ℓ = 10 cm , ***este suspendat la mijlocul tijei în poziţie orizontală şi se află în echilibru într-un câmp electric orizontal*** E = 1,0 kV/m . ***I se imprimă sistemului o viteză unghiulară iniţială*** ω_0 = 2,0 rad/s ***în jurul axei verticale de simetrie. Aflaţi unghiul maxim de deviere .***

Rezolvare. Reamintim expresia **energiei potenţiale** a unui **dipol** într-un câmp electric (v. problema 1.1.34) :

$$E_p = -\,\vec{p}\,\vec{E}\,, \qquad \vec{p} = q\vec{\ell}\,, \tag{1}$$

de asemenea, expresia *energiei cinetice* de ***rotaţie*** :

$$E_c = (1/2)\,J\omega^2\,, \tag{2}$$

unde J este **momentul de inerţie** al corpului faţă de axa de rotaţie:

$$J = \sum m_k R_k^2\,, \tag{3}$$

unde R_k este distanţa până la axă a particulei m_k . În cazul nostru :

$$J = 2 \cdot m(\ell/2)^2 = m\ell^2/2\,. \tag{4}$$

Scriem legea de ***conservare a energiei*** cinetice şi potenţiale :

$$(1/2)\,J\omega_0^2 + (-\,\vec{p}\,\vec{E}\,)_{in} = (-\,\vec{p}\,\vec{E}\,)_{fin}\,, \tag{5}$$

$$(1/2)\,(m\ell^2/2)\,\omega_0^2 - q\ell\,E = -\,q\ell\,E\cos\alpha\,, \tag{6}$$

$$\cos\alpha = 1 - m\ell\omega_0^2 : (4qE)\,, \quad \alpha = 60^\circ\,. \tag{7}$$

BCU Cluj / Central University Library

1.3.30. ***Un inel subţire izolant de masă*** m = 1,0 g ***, uniform încărcat cu sarcina*** Q = 0,10 μC ***, are un*** **interstiţiu** ***subţire de grosime*** d « R ***. Inelul se poate roti liber în jurul axei sale verticale fixe. Se aplică un câmp electric omogen*** E ***în planul inelului perpendicular pe raza spre interstiţiu. Aflaţi viteza liniară*** **maximă** ***a inelului.***

Rezolvare. Conform *principiului* ***suprapunerii*** inelul cu interstiţiu este echivalent cu un inel *complet* cu sarcina în centrul inelului plus o sarcină negativă în interstiţiu : $-q = -Q \cdot d : (2\pi R)$. (1)

Asupra acestei sarcini se exercită forţa $-qE$. Inelul se poate roti liber în jurul axei centrale . Aplicăm teorema *variaţiei energiei cinetice* . Viteza maximă se atinge când inelul se roteşte cu $\pi/2$, după care va fi frânat . Lucrul mecanic efectuat de câmp asupra sarcinii $-q$ este egal cu forţa qE înmulţită cu deplasarea R în direcţia forţei, prin urmare : $L = qE\,R = (1/2)mv^2$,

$$Q\,[d : (2\pi R)]\,E\,R = (1/2)mv^2\,,\ v = \sqrt{QEd/(\pi m)} = 17{,}8 \text{ cm/s}\,. \quad (2)$$

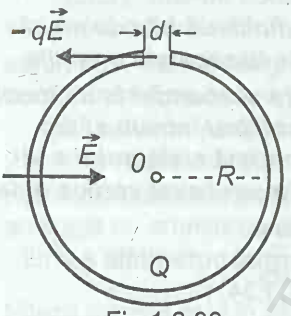


Fig.1.3.30

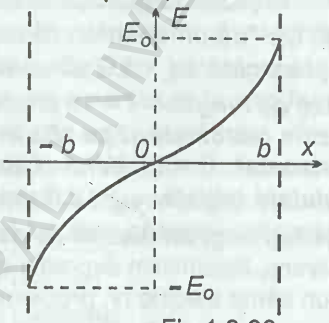


Fig.1.3.33

1.3.31. ***Un condensator plan-paralel cu dielectricul format din*** n ***straturi de grosime*** d_i ***şi permitivitate*** ε_i ***este supus la o tensiune*** U ***. Aflaţi : a) Diferenţa de potenţial pe fiecare strat dielectric, b) Câmpul electric din fiecare strat, c) Energia înmagazinată în fiecare strat, d) Dacă într-un strat se produce*** **clacarea,** ***câtă căldură se degajă ?***

Rezolvare. Condensatorul dat este echivalent cu *n* condensatoare legate în *serie* :

$$C_i = \varepsilon_i S / d_i\,,\quad C = 1 : \Sigma(1/C_i) = \varepsilon_o S : \Sigma\,(d_i/\varepsilon_{ri})\,. \quad (1)$$

a) La legarea în *serie* a condensatoarelor sarcina este aceeaşi pe fiecare condensator : $q = C_i U_i$, $U = \Sigma\, U_i$, (2)

de unde rezultă :

$$U = \sum (q / C_i) = q / C \,, \quad q = CU \,, \quad U_i = q / C_i = U\, C / C_i \,. \qquad (3)$$

b) **Câmpul electric** în fiecare strat dielectric :

$$E_i = U_i / d_i \,, \quad i = 1 \,, 2 \,, ..., n \,. \qquad (4)$$

c) **Energia** înmagazinată în fiecare strat :

$$W_i = (1/2) C_i U_i^2 = (1/2) q^2 / C_i = (1/2) CU^2 \cdot C / C_i \,. \qquad (5)$$

d) **Energia** condensatorului (C' - noua capacitate a condensatorului) : $W_o = (1/2) CU^2$, $W' = (1/2) C' U^2$,

$$W' - W_o = (1/2)(C' - C)U^2 \,. \qquad (6)$$

Sarcina care trece prin sursă şi energia furnizată de sursă :

$$\Delta q = (C' - C)U \,, \quad W_{bat} = \Delta q\, U = (C' - C)U^2 . \qquad (7)$$

Căldura degajată se obţine din bilanţul *energiilor* :

$$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)\,(C' - C)U^2 = \Delta W = (1/2)\, W_{bat} \,. (8)$$

Căldura degajată este egală cu *creşterea* energiei condensatorului şi cu *jumătate* din energia dezvoltată de sursă (rezultat pe care l-am mai întâlnit la probleme) . $Q_J = (1/2)\,(C' - C)U^2 =$

$$= (1/2)\varepsilon_o S U^2 \,[1 : \sum' (d_i / \varepsilon_{ri}) - 1 : \sum (d_i / \varepsilon_{ri})] \,, \qquad (9)$$

unde prima sumă $\sum'$ se extinde asupra straturilor integre .

1.3.32. ***Un corp conductor este încărcat cu o densitate superficială de sarcină*** σ ***. Calculaţi presiunea electrostatică ce se exercită pe suprafaţa acestui corp conductor.***

Rezolvare. Să luăm un ***element*** de suprafaţă extrem de ***mic*** (infinitezimal) ΔS, a cărui sarcină va fi $\Delta q = \sigma\, \Delta S$. Această sarcină se află în câmpul electric $\vec{E}'$ produs de toate ***celelalte*** sarcini ale conductorului, ***afară de*** Δq . Conform formulei fundamentale de definiţie a câmpului electric, asupra sarcinii Δq se exercită o forţă electrostatică $\Delta \vec{F} = \Delta q \vec{E}'$. Câmpul E' se poate calcula astfel . Ştim că un plan încărcat creează, de o parte şi de alta a sa, în **imediata** sa vecinătate un câmp perpendicular pe plan $E_o = \sigma / (2\varepsilon)$. Aplicăm *principiul* ***suprapunerii*** . În imediata vecinătate a elementului ΔS în interiorul conductorului câmpul rezultant este **nul**, dar el se compune din $\vec{E}_o + \vec{E}' = 0$, deci $\vec{E}' = -\vec{E}_o$, $E' = \sigma / (2\varepsilon)$,

$$\Delta F = \Delta q\, E' = [\sigma^2 / (2\varepsilon)]\, \Delta S \,, \quad p = \Delta F : \Delta S = \sigma^2 / (2\varepsilon) \,. \qquad (1)$$

Forţa şi presiunea sunt orientate spre exterior (unde avem câmp) şi se datorează respingerii elestrostatice a sarcinilor de pe suprafaţa conductorului .

Ca exemplu, la un condensator, pe suprafaţa interioară a fiecărei armături se exercită o *presiune* spre cealaltă armătură $p = \sigma^2 / (2\varepsilon)$, care dă o forţă de atracţie între armături :

$$F = p\,S = \sigma^2 S / (2\varepsilon) = Q\,\sigma / (2\varepsilon) = (1/2)\,Q\,E\,, \qquad (2)$$

rezultat bine cunoscut .

(* *) **1.3.33.** ***Între două grile paralele câmpul electric poate fi aproximat prin funcţia*** $E = E_0 \arcsin(x/b)\,,\ -b \le x \le b\,.$

Un electron pleacă din repaus de pe grila $x = -b$ ***. Calculaţi viteza şi acceleraţia electronului în punctele*** $x = 0$ ***şi*** $x = b$ ***. Reprezentaţi grafic câmpul*** $E(x)$.

Rezolvare. Aplicăm teorema *variaţiei energiei cinetice* :

$$L = \int_{-b}^{x} F\,dx = \Delta E_c = (1/2)\,mv^2\,,$$

$$\int_{-b}^{x} (-e) E_0 \arcsin\frac{x}{b}\,dx = \frac{1}{2}\,mv^2\,, \qquad (1)$$

dar $$\int \arcsin\frac{x}{b}\,dx = x \arcsin\frac{x}{b} + \sqrt{b^2 - x^2} + C\,, \qquad (2)$$

atunci $$v^2 = -\frac{2e}{m} E_0 \left[x \arcsin\frac{x}{b} \Big|_{-b}^{x} + \sqrt{b^2 - x^2} \Big|_{-b}^{x} \right] =$$

$$= \frac{2e}{m} E_0 \left[\frac{\pi}{2}\,b - x \arcsin\frac{x}{b} - \sqrt{b^2 - x^2} \right]. \qquad (3)$$

Pentru punctul $x = 0$:

$$v(0) = \sqrt{\frac{2e}{m} E_0 b \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}\,, \quad a(0) = (-e/m)\,E(0) = 0\,, \qquad (4)$$

respectiv pentru punctul $x = b$:

$$v(b) = 0\,,\ a(b) = (-e/m)\,E(b) = (-e/m)\,E_0\,\pi/2\,. \qquad (5)$$

* * **1.3.34.** ***O particulă de masă*** m ***şi sarcină*** $q = ze$ ***vine cu viteza*** v_0 ***paralel cu axa*** Ox ***spre un nucleu fix de sarcină*** $Q = Ze$, ***distanţa traiectoriei iniţiale până la axa*** Ox ***este*** b **(parametrul de şoc)** ***. Calculaţi : a) unghiul de împrăştiere*** φ ***, b) distanţa*** **minimă** ***la care se apropie particula de nucleu.***

Rezolvare. a) Conform figurii avem componentele **forţei** :

$$F_x = [qQ : (4\pi\varepsilon r^2)] \cos\theta\,, \quad F_y = [qQ : (4\pi\varepsilon r^2)] \sin\theta\,, \qquad (1)$$

Deoarece suportul forţei trece permanent prin punctul O (nucleul fix) , braţul forţei faţă de acest punct este *zero*, deci *momentul forţei* faţă de acest punct este zero şi atunci din *teorema* momentului cinetic rezultă ***conservarea momentului cinetic*** faţă de

punctul O : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$, $\vec{L} = \text{const}$. (2)

Vectorul $\vec{L}$ este perpendicular pe desen, spre desen, deci

$$L = L_z = -mv_0 b = -mv_\theta \cdot r = mr\,(d\theta / dt) \cdot r = mr^2\, d\theta / dt\,, \quad (3)$$

$$(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} < 0)\,.$$

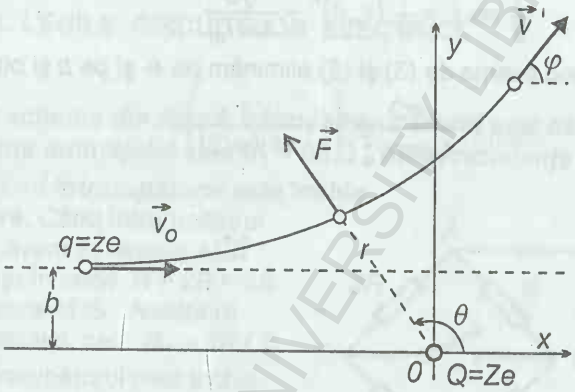


Fig.1.3.34

Deoarece ***forţele electrostatice sunt conservative***, suma dintre energia cinetică şi energia potenţială se ***conservă*** . Cum la distanţe foarte mari $E_p \to 0$, rezultă că viteza finală : $|\vec{v}\,'| = |\vec{v}_o|$.

Lex secunda dă pe axa Oy :

$$F_y = [qQ : (4\pi\varepsilon r^2)]\,\sin\theta = ma_y = m\, dv_y / dt\,,$$

$$dv_y = [qQ : (4\pi\varepsilon m r^2)]\,\sin\theta\, dt\,. \quad (4)$$

Ţinând seama de *conservarea momentului cinetic* (3), putem scrie

$$dv_y = [qQ\,\sin\theta : (4\pi\varepsilon L)]\, d\theta = -[qQ\,\sin\theta : (4\pi\varepsilon m v_o b)]\, d\theta\,. \quad (5)$$

Variabilele s-au separat şi acum putem integra :

$$v_y = \int dv_y = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon m v_o b}\int \sin\theta\, d\theta = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon m v_o b}\,(\cos\theta + C)\,,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia la margine* : pentru $\theta = \pi$ avem $v_y = 0$: $0 = A(-1 + C)$, $C = 1$,

$$v_y = [qQ : (4\pi\varepsilon m v_o b)](\cos\theta + 1)\,. \quad (6)$$

Când $\theta \to \varphi$ avem

$$\sin\varphi = v_y : v' = v_y : v_o = [qQ : (4\pi\varepsilon m v_o^2 b)](\cos\varphi + 1) \quad (7)$$

sau $2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) = [qQ : (4\pi\varepsilon m v_o^2 b)]\, 2\cos^2(\varphi/2)$,

de unde $\operatorname{tg}(\varphi/2) = qQ : (4\pi\varepsilon m v_o^2 b) = zZe^2 : (4\pi\varepsilon m v_o^2 b)$. (8)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se vede că pentru ciocnire *frontală* , $b = 0$, avem $\varphi = \pi$, particula se întoarce exact înapoi .

b) La distanţa *minimă* avem condiţia : $\dot{r} = 0$ °i $v = r\dot{\theta}$, (9) atunci ecuaţia de *conservare a energiei* se scrie

$$\frac{1}{2} mv_o^2 = \frac{1}{2} \left(r_m \dot{\theta}\right)^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon r_m} . \qquad (10)$$

Ţinând seama de (3) şi (8) eliminăm pe $\dot{\theta}$ şi pe b şi obţinem :

$$r_{min} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon m v_o^2} \left(1 + \frac{1}{\sin(\varphi/2)}\right) . \qquad (11)$$

* *

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. ELECTROCINETICA

2.1. LEGILE CIRCUITELOR ELECTRICE

2.1.1. ***În schema din figură, când întrerupătorul este*** **deschis,** ***rezistenţa montajului este*** $R_1 = 90\ \Omega$ ***. Aflaţi rezistenţa montajului când întrerupătorul este*** **închis.**

Rezolvare. Când întrerupătorul este deschis, avem în ramura ACB două rezistenţe în *serie* $R + 2R = 3R$ şi la fel în ramura ADB . Aceste ramuri sunt în *paralel*, deci $R_1 = 3R/2$.

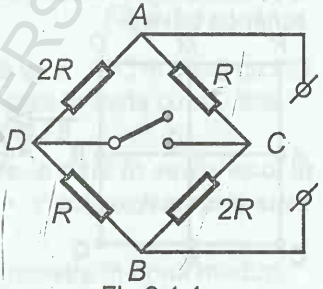


Fig.2.1.1

Când întrerupătorul este închis, AC şi AD sunt în *paralel* (punctele C, D sunt reunite) şi dau $2R/3$, la fel CB şi DB dau $2R/3$. Acestea sunt legate în *serie*, deci $R_2 = 4R/3$. Din prima relaţie rezultă $R = 2R_1/3$ care introdusă în ultima , dă $R_2 = = 8R/9 = 80\ \Omega$.

2.1.2. ***Aflaţi rezistenţa echivalentă între punctele*** A, O ***ale montajului din figură. Toate rezistenţele sunt egale cu*** R .

Rezolvare. *Dacă două puncte într-o reţea electrică sunt la* ***acelaşi potenţial*** *, atunci le putem uni prin* ***orice rezistenţă*** *, deoarece distribuţia potenţialelor nu se schimbă şi nici a curenţilor .*

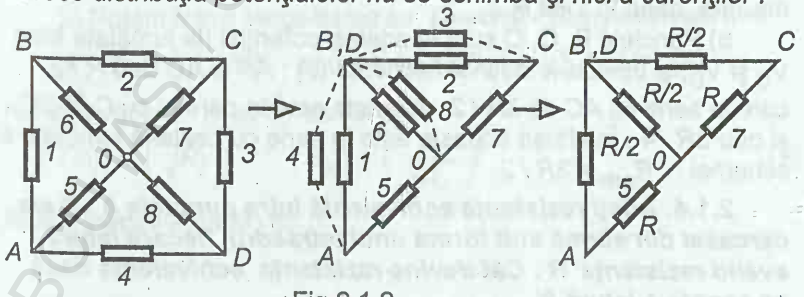


Fig.2.1.2

Observăm că în schema dată, în virtutea *simetriei*, punctele B, O sunt la *acelaşi* potenţial, indiferent ce tensiune s-ar aplica între A , O . Dacă le unim obţinem schema următoare din figură. Acum rezistenţele *2, 3*, rezistenţele *6, 8* şi rezistenţele *1, 4* sunt în *paralel* şi dau $R/2$. Mai departe $(2, 3) = R/2$ este în serie cu *7* şi dau $3R/2$ care este în *paralel* cu $(6, 8) = R/2$ dând $3R/8$. Aceasta este în *serie* cu $(1, 4)$: $7R/8$ care în sfârşit, este în paralel cu *5* :

$R_{ech} = 7R/15$.

2.1.3. ***Aflaţi rezistenţa echivalentă între punctele*** A , B, ***respectiv*** C , D ***ale montajului din figură , în care fiecare latură are rezistenţa*** R .

Rezolvare. *Dacă într-o reţea două puncte au* ***acelaşi potenţial,*** *le putem uni prin* ***orice rezistenţă,*** *fără ca prin aceasta să se schimbe ceva .*

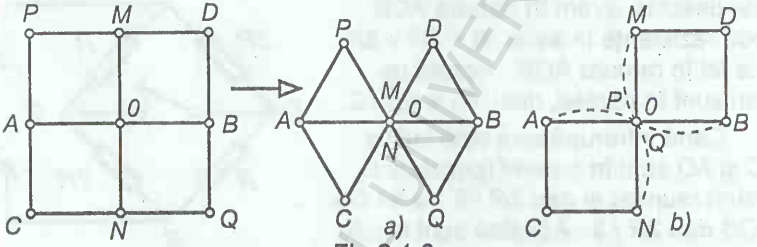


Fig.2.1.3

a) În virtutea *simetriei* punctele M, O , N sunt la *acelaşi* potenţial . În adevăr, dacă scoatem rezistenţele *MO* şi *ON*, atunci evident punctele M, O, N au *acelaşi* potenţial (la mijloc între V_A şi V_B). Acum putem reintroduce rezistenţele scoase fără a schimba nimic.

Unim punctele M, O, N şi obţinem schema (a) din figură , unde ramura APO dă $2R$ şi în paralel cu ACO dă R , care în paralel cu AO dă $R/2$. Aceasta din urmă este în serie cu jumătatea din dreapta, dând în total R .

b) Punctele P, O, Q sunt la *acelaşi* potenţial (la jumătate între V_C şi V_D) şi unindu-le obţinem schema (b) : *AP* şi *AO* dau $R/2$ care in serie cu *AC* dă $3R/2$. Aceasta este în paralel cu C-N-OQ şi dau $3R/4$. În sfârşit aceasta este în serie cu cealaltă jumătate a schemei : $R_{ech} = 3R/2$.

2.1.4. ***Aflaţi rezistenţa echivalentă între punctele*** *A , B ale carcasei din sârmă sub forma unui tetraedru, fiecare latură având rezistenţa* R . ***Cât devine rezistenţa echivalentă dacă se scoate o latură ?***

Rezolvare. În virtutea *simetriei* punctele C , D sunt la *acelaşi* potenţial. În adevăr, dacă am scoate latura CD, atunci punctele C , D ar avea potenţialul de mijloc între V_A şi V_B , şi deci punând CD la loc nu se schimbă nimic .

Unind acum punctele C , D, obţinem *AD* cu *AC* în paralel, deci *R*/2, la fel *BC* cu *BD* dau *R* / 2 şi fiind în serie dau *R* care este în paralel cu *AB*, deci în final $R_e = R/2$.

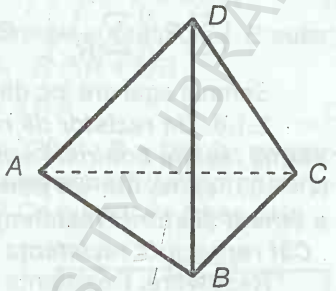


Fig.2.1.4

Am văzut că scoaterea laturii *CD* nu schimbă nimic . Scoaterea laturii *AB* ne readuce la rezistenţa *R*.

Dacă se scoate oricare din laturile *AC* , *BC* sau *AD*, *BD* se obţine acelaşi rezultat . De exemplu, dacă se scoate *AC*, rezistenţa echivalentă va fi : *BC* în serie cu *CD* dau 2*R* care în paralel cu *BD* dau 2*R* / 3, care în serie cu *AD* dau 5*R* / 3, care în paralel cu *AB* dau $R_{ech} = 5R/8$.

2.1.5. ***Se leagă*** n ***rezistenţe*** **diferite,** ***o dată în serie, apoi în paralel. Arătaţi că*** $R_s \geq n^2 R_p$ ***(semnul =*** **dacă** ***rezistenţele sunt*** **egale*)*.**

Rezolvare. Inegalitatea se poate demonstra în două moduri.

a) Plecăm de la inegalitatea dintre media *aritmetică* şi media *geometrică* :

$$\frac{1}{n}\sum R_i \geq \sqrt[n]{\prod R_i}\ , \qquad \frac{1}{n}\sum \frac{1}{R_k} \geq \sqrt[n]{\prod \frac{1}{R_k}}\ . \tag{1}$$

Înmulţind aceste relaţii membru cu membru, obţinem

$$\frac{1}{n} R_s \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{R_p} \geq \sqrt[n]{\prod R_i \cdot \prod \frac{1}{R_k}} = 1\ , \qquad R_s \geq n^2 R_p\ . \tag{2}$$

b) Putem folosi *inegalitatea lui* ***Cauchy - Bunyakowski*** :

$$\vec{A}^2\ \vec{B}^2 \geq \left(\vec{A}\,\vec{B}\right)^2 \quad \text{sau} \quad (\Sigma A_i^2)(\Sigma B_k^2) \geq (\Sigma A_j B_j)^2\ . \tag{3}$$

Alegem vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ astfel :

$$\{A_i\} = \{\sqrt{R_i}\}\ , \qquad \{B_k\} = \{\frac{1}{\sqrt{R_k}}\}\ . \tag{4}$$

Atunci inegalitatea (3) dă :

$$\left[\sum\left(\sqrt{R_i}\right)^2\right]\left[\sum\left(\frac{1}{\sqrt{R_k}}\right)^2\right] \geq \left[\sum\left(\sqrt{R_j}\cdot\frac{1}{\sqrt{R_j}}\right)\right]^2 = n^2 \qquad (5)$$

sau $$\left(\sum R_i\right)\left(\sum\frac{1}{R_k}\right) = R_s\cdot\frac{1}{R_p} \geq n^2 . \qquad (6)$$

Semnul egal are loc dacă toate rezistenţele sunt identice .

2.1.6. ***Un rezistor de rezistenţă*** R = 5,00 Ω ***este format din sârmă izolată bobinată spiră lângă spiră pe o carcasă şi are*** N = 10,0 ***spire. Într-un punct izolaţia dintre două spire vecine s-a stricat şi atunci rezistenţa rezistorului a scăzut la*** R' = 4,75 Ω ***. Cât reprezintă rezistenţa apărută la locul defectului ?***

Rezolvare. Rezistenţa unei spire este R/N . Dacă între două spire vecine apare un defect de izolaţie care prezintă o rezistenţă R_x între aceste spire vecine, atunci noua rezistenţă a rezistorului este formată din rezistenţa celor $N-1$ spire plus, în serie, rezistenţa echivalentă a unei spire legată în paralel cu R_x :

$$R' = R - R/N + (R/N)R_x : (R/N + R_x) , \qquad (1)$$

$$R_x = R\,[N/R' - (N-1)R] : N^2(R - R')] = 0{,}50\ \Omega . \qquad (2)$$

2.1.7.*Un conductor de argint cu secţiunea* $S=5{,}0\cdot10^{-2}$ mm^2, ***densitatea*** δ = 10,5 g/cm^3 ***, căldura specifică*** c = 235 J/(kg · K) ***şi conductivitatea*** $\gamma = 62\cdot10^6\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ ***, este încălzit astfel încât rezistenţa sa creşte cu*** ΔR = 15 mΩ ***, iar energia internă creşte cu*** ΔU = 1,6 J ***. Aflaţi*** **coeficientul termic** ***al rezistivităţii .***

Rezolvare. *Coeficientul termic* al rezistivităţii este prin *definiţie*

$$A = \Delta R : (R_0\Delta t) \approx \Delta R : (R\Delta t) , \quad \text{dar} \quad \Delta U = mc\Delta t , (1)$$

$$A = [\Delta R : (R\Delta U)]\, mc = (\Delta R : \Delta U)\,\delta S\ell c : (\rho\ell / S) =$$

$$= (\Delta R : \Delta U)\,\gamma\delta S^2 c = 3{,}6\cdot10^{-3}\ K^{-1} . \qquad (2)$$

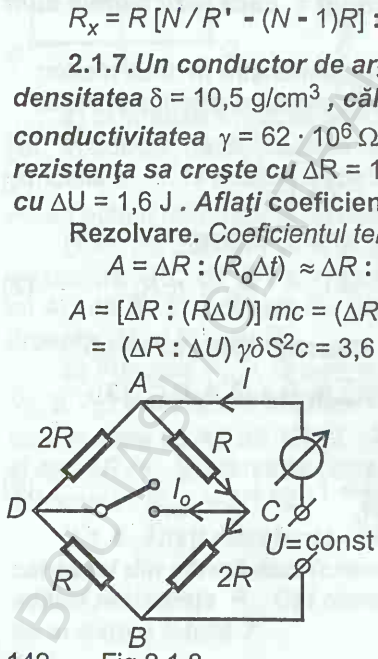


Fig.2.1.8

2.1.8. ***În schema din figură curentul arătat de ampermetrul ideal este*** I_1 = 8,0 A . ***Ce curent va arăta ampermetrul dacă închidem întrerupătorul ? Ce curent va trece prin întrerupător ?***

Rezolvare. Când întrerupătorul este *deschis* ramura $2R + R = 3R$ este în *paralel* cu ramura $R + 2R = 3R$, deci $R_1 = 3R/2$.

Când întrerupătorul este *închis*, $2R$ cu R este în *paralel* ($= 2R/3$) şi rezultatul este în serie cu R, $2R$ în paralel ($= 2R/3$), deci $R_2 = 4R/3 = (4/3)\,2R_1/3 = (8/9)\,R_1$, (1)

$I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2 = I_1 R_1/R_2 = (9/8)\,I_1 = 9{,}0$ A. (2)

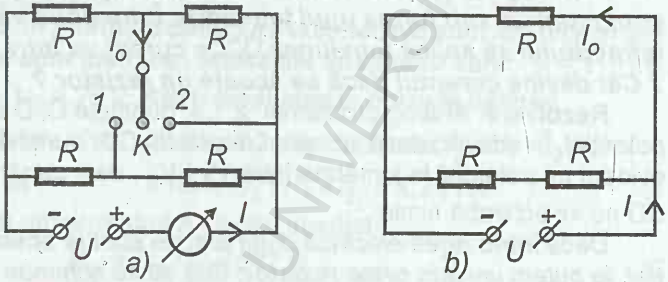
Aplicăm direct formula pentru *bifurcaţia* curentului (v. *Breviar*):

$I_{AC} = I_2 \cdot 2R : (2R + R)$, $I_{CB} = I_2 \cdot R : (R + 2R)$,

$I_o = I_{AC} - I_{CB} = I_2 \cdot 1/3 = (3/8)\,I_1 = 3{,}0$ A. (3)

2.1.9. ***În montajul din figură*** U = 220 V , R = 100 Ω , ***ampermetrul este ideal. Ce curent indică ampermetrul când comutatorul este în poziţia*** 1 , ***respectiv*** 2 ***? Ce curent va trece prin comutator în aceste cazuri ?***

Fig.2.1.9



Rezolvare. a) Când comutatorul este pe poziţia *1* cele două rezistenţe din stânga sunt în paralel ($= R/2$) şi apoi rezultatul în serie cu celelalte două rezistenţe din dreapta în paralel, deci $R/2 + R/2 = R$. Curentul va fi $I = U/R = 2{,}2$ A . În virtutea *simetriei*, punctele pe care le uneşte comutatorul sunt la *acelaşi* potenţial, deci $I_o = 0$.

b) Când comutatorul este în poziţia *2* rezistenţa din dreapta sus este scurt-circuitată şi iese din joc, ca în figura (b). Rezistenţa echivalentă şi curentul vor fi :

$R_{ech} = R \cdot 2R : (R + 2R) = (2/3)\,R$, $I = 3U : (2R) = 3{,}3$ A. (1)

Dealtfel I este suma celor doi curenţi $I_o = U/R = 2{,}2$ A şi $U/(2R)$, deci $I = 3U : (2R)$.

2.1.10. ***Şase voltmetre*** **identice** ***sunt montate ca în figură. Ce tensiune arată fiecare voltmetru ?***

Rezolvare. Se vede imediat că $U_6 = U$. Apoi rezistenţele voltmetrelor *1, 2* şi *4, 5* constituie un *divizor de tensiune* : $U_{1,2,4,5} = U/2$. În sfârşit, punctele C , D au *acelaşi* potenţial $U/2$ faţă de B, deci $U_3 \equiv 0$.

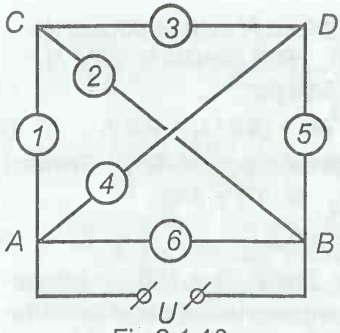


Fig.2.1.10

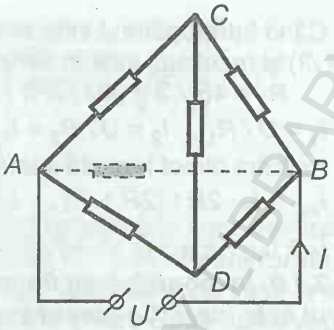


Fig.2.1.11

2.1.11. ***Şase rezistoare identice, de rezistenţă*** R ***fiecare, sunt montate sub forma unui*** tetraedru. ***Între două vârfuri ale tetraedrului se aplică tensiunea*** U. ***Ce curent va intra în montaj ? Cât devine curentul dacă se scoate un rezistor ?***

Rezolvare. Analog problemei 2.1.4, punctele C, D au *acelaşi* potenţial. În adevăr, dacă scoatem rezistorul CD, punctele C, D au evident un potenţial la jumătate între V_A , V_B , deci punând la loc CD nu se schimbă nimic .

Dacă într-o reţea electrică două puncte sunt la ***acelaşi potenţial,*** *le putem uni prin* ***orice rezistor,*** *fără să se schimbe nimic.*

În cazul nostru deci scoatem rezistorul CD şi atunci se vede imediat că ACB dă $2R$ şi este în paralel cu $ADB = 2R$, deci dau R care cu AB dau $R_e = R/2$.

$$I = U/R_e = 2U/R . \qquad (1)$$

Scoaterea laturii CD nu schimbă rezistenţa echivalentă, deci nici curentul .

Dacă se scoate latura AB , $R_e' = R$ şi curentul va fi $I_{min} = U/R$. Dacă se scoate oricare latură AC , BC sau AD , BD , rezistenţa echivalentă devine : $2R \cdot R : (3R) + R = 5R/3$ în paralel cu R : $R_e'' = (5R/3) \cdot R : (5R/3 + R) = (5/8)\,R$,

$$I'' = U/R_e'' = 8U : (5R) . \qquad (2)$$

2.1.12. ***În montajul din figură ampermetrele sunt identice şi voltmetrele sunt identice . Indicaţiile aparatelor sunt :*** $I_1 = 100$ mA , $U_1 = 10{,}0$ V, $I_2 = 110$ mA. ***Aflaţi rezistenţa aparatelor şi tensiunea*** U.

Rezolvare. Pentru ampermetrul A_1 avem imediat :

$$R_A = U_1/I_1 = 100\ \Omega . \qquad (1)$$

Prin voltmetrul V_1 trece curentul $I_2 - I_1$, deci rezistenţa sa este

$$R_V = U_1 : (I_2 - I_1) = 1{,}00\ \text{k}\Omega\ . \qquad (2)$$

Tensiunea aplicată este

$$U = U_1 + R_A I_2 + R_V I_2 = 131\ \text{V}\ . \qquad (3)$$

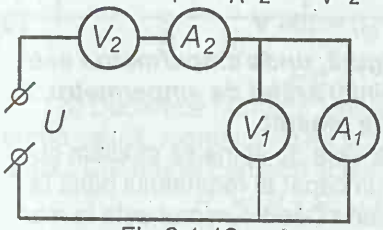


Fig.2.1.12

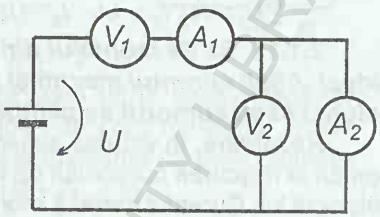


Fig.2.1.13

2.1.13. ***În montajul din figură voltmetrele sunt identice şi ampermetrele sunt identice. Indicaţiile aparatelor sunt:*** $I_1 = 110$ mA, $I_2 = 90$ mA, $U_2 = 25$ V. ***Aflaţi tensiunea la bornele bateriei.***

Rezolvare. Prin voltmetrul 2 trece curentul $I_2' = I_1 - I_2$, deci rezistenţa sa : $R_V = U_2 : (I_1 - I_2) = 1{,}25\ \text{k}\Omega\ .$ (1)

Pentru ampermetrul A_2 avem imediat :

$$R_A = U_2 / I_2 = 277\ \Omega\ . \qquad (2)$$

Tensiunea la bornele bateriei este atunci

$$U = (R_V + R_A) I_1 + U_2 = 193\ \text{V}\ . \qquad (3)$$

2.1.14. ***În montajul din figură sunt*** N ***ampermetre identice şi*** N ***voltmetre identice. Se cunosc indicaţiile :*** $I_1 = 95$ mA, $I_2 = 12$ mA şi $U_1 = 96$ V. ***Aflaţi suma indicaţiilor tuturor voltmetrelor.***

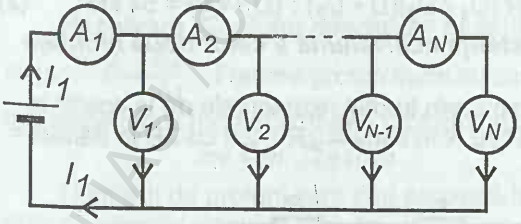


Fig.2.1.14

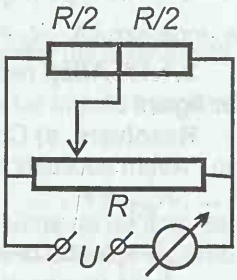


Fig.2.1.15

Rezolvare. Prin voltmetrul V_1 trece curentul $I_1 - I_2$, astfel încât

$$R_V = U_1 : (I_1 - I_2)\ . \qquad (1)$$

Suma indicaţiilor voltmetrelor

$$\sum U_i = \sum (R_V I_{Vi}) = R_V \sum I_{Vi} . \qquad (2)$$

Dar considerând nodul inferior de întoarcere a curenţilor la sursă se vede imediat că $\sum I_{Vi} = I_1$, deci

$$\sum U_i = R_V I_1 = U_1 \cdot I_1 : (I_1 - I_2) = 304 \text{ V} . \qquad (3)$$

2.1.15. ***Se dă montajul din figură, unde ampermetrul este ideal. Aflaţi curentul maxim şi minim arătat de ampermetru, atunci când cursorul se plimbă pe reostat.***

Rezolvare. În virtutea *simetriei* este de ajuns să studiem curentul la mişcarea cursorului de la un capăt al reostatului până la mijlocul lui. Curentul variază monoton . Când cursorul este la marginea reostatului, o jumătate din rezistenţa superioară este scurt-circuitată şi rămâne $R/2$ în paralel cu R, deci

$$R' = (R/2) \cdot R : (R/2 + R) = R/3 ,$$

$$I_{max} = U : (R/3) = 3U/R . \qquad (1)$$

Când cursorul este la mijlocul reostatului avem $R/2$ cu $R/2$ în paralel (= $R/4$) în serie cu tot atâta , deci

$$R'' = R/2 , \qquad I_{min} = 2U/R . \qquad (2)$$

2.1.16. ***Un voltmetru conectat în serie cu un rezistor*** $R = 10\ \text{k}\Omega$ ***la tensiunea reţelei*** $U = 220$ V ***arată*** $U_1 = 120$ V. ***Conectat fiind acum în serie cu o rezistenţă necunoscută la aceeaşi tensiune a reţelei, el arată*** $U_2 = 40$ V . ***Aflaţi rezistenţa necunoscută .***

Rezolvare. Folosind formula pentru *divizorul de tensiune* pe doi rezistori (v. *Breviar*) avem imediat

$$U_1 = U \cdot R_V : (R_V + R) , \quad U_2 = U \cdot R_V : (R_V + R_x) , \qquad (1)$$

de unde rezultă $R_x = R\,(U_1/U_2)(U - U_2) : (U - U_1) = 54\ \text{k}\Omega$. (2)

2.1.17. ***Aflaţi rezistenţa echivalentă a celor două montaje din figură .***

Rezolvare. a) Compunem treptat rezistenţele de la coadă la cap . Avem succesiv : R cu R în serie = $2R$; $2R$ cu $2R$ în paralel = R, ... , $R_{ech} = R$.

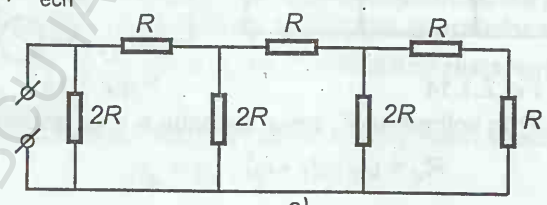


Fig.2.1.17 a

a)

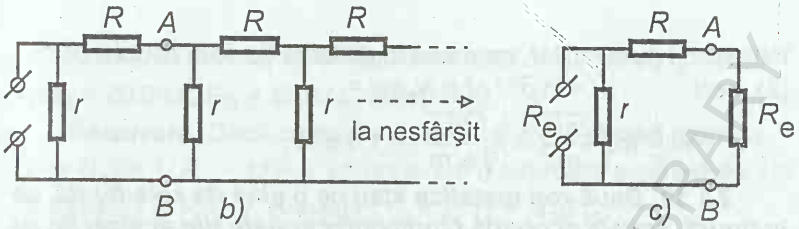


Fig.2.1.17 b, c

b) Deoarece numărul "celulelor" este *infinit*, dacă îndepărtăm prima celulă, montajul nu se schimbă , deci nici rezistenţa echivalentă . Dar atunci conform schemei echivalente (c) avem condiţia :

$$R_e = (R + R_e) \cdot r : (R + R_e + r) , \qquad (1)$$

de unde rezultă $R_e^2 + RR_e - Rr = 0$,

$$R_e = \frac{1}{2}\left(-R \pm \sqrt{R^2 + 4Rr}\right) , \qquad (2)$$

rădăcina negativă nu convine problemei, rămâne deci

$$R_e = \frac{1}{2}\left(-R + \sqrt{R^2 + 4Rr}\right) . \qquad (3)$$

Dacă în primul montaj propus (a) îndepărtăm ultima rezistenţă R şi continuăm la nesfârşit montajul, găsim rezistenţa echivalentă :

$$R_e = \frac{1}{2}\left(-R + \sqrt{R^2 + 8Rr}\right) = R , \qquad (4)$$

adică exact rezistenţa înlăturată, conform ideii de rezolvare a montajului (b) .

2.1.18. ***Asupra unei plăci metalice legate la pământ cade normal un fascicul de protoni acceleraţi la o diferenţă de potenţial*** U = 20 kV***. Protonii sunt absorbiţi de placă dând un curent*** I = 80 mA. ***Aflaţi forţa exercitată de protoni asupra plăcii*** (e / m = $1{,}0 \cdot 10^8$ C/kg).

Rezolvare. Conform *principiului fundamental* (II) al dinamicii forţa : $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$. Fiecare proton duce cu sine un impuls , care se transmite plăcii (prin absorbirea protonului) :

$$mv = m\sqrt{2eU/m} . \qquad (1)$$

Numărul de protoni care cad pe placă în unitatea de timp este egal cu sarcina electrică care trece spre placă în unitatea de timp, adică intensitatea curentului electric, împărţit la sarcina unui proton: $N_0 = I / e$. (2)

Variaţia de impuls a plăcii în unitatea de timp, adică forţa asupra plăcii, este egală cu impulsul primit de la un proton (1)

înmulţit cu numărul lor, care cad în unitatea de timp asupra plăcii, (2), deci $f = |\Delta \vec{p}| / \Delta t = N_o mv =$

$$= \frac{I}{e}\, m\sqrt{\frac{2eU}{m}} = I\sqrt{\frac{2U}{e/m}} = 1{,}6 \text{ mN}. \qquad (3)$$

2.1.19. ***Două roţi metalice stau pe o şină de cale ferată, ca în figură, spiţele şi obada fiind confecţionate din acelaşi tip de bară. Dacă între osiile*** A , B ***se aplică o tensiune*** U, ***ce tensiune va exista între punctele superioare*** C , D ***?***

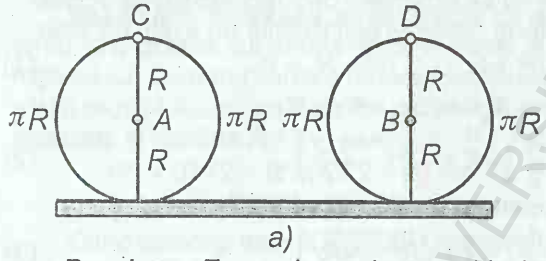


Fig.2.1.19 a

a)

Rezolvare. Transcriem schema echivalentă sub o formă mai comodă . Acum se vede că tensiunea *U* este divizată prin ramurile superioare (cele două rezistenţe *R* inferioare nu joacă aici nici un rol) şi deci $U_{CD} = U_{AB} \cdot R_{CD} : R_{ACDB} =$

$$= U \cdot \pi R : (2R + \pi R) = U \cdot \pi : (2 + \pi) .$$

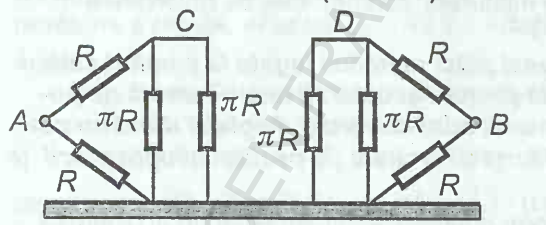


Fig.2.1.19 b

b)

2.1.20. ***Într-un circuit format dintr-o baterie şi un reostat curentul este*** I = 0,50 A ***. Dacă micşorăm rezistenţa reostatului de*** k = 4,0 ori, ***curentul creşte de*** n = 2,0 ori ***. Ce curent va trece dacă scurt-circuităm reostatul ?***

Rezolvare. Avem în baza *legii lui* ***Ohm*** :

$$I = E : (r + R), \qquad nI = E : (r + R / k), \qquad I_{sc} = E : r . \qquad (1)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$I = I_{sc} : (1 + R / r), \qquad nI = I_{sc} : [1 + R / (kr)]. \qquad (2)$$

Eliminând R / r, găsim : $I_{sc} = I\, n(k - 1) : (k - n) = 1{,}50$ A . (3)

2.1.21. ***În montajul din figură se dau :*** $I = 0{,}80$ A, $I_2 = 0{,}30$ A, $R_2 = 20{,}0\ \Omega$, $R_3 = 15{,}0\ \Omega$. ***Aflaţi*** R_1.

Rezolvare. Dacă compunem pe R_1 şi R_3 în paralel (conductanţa $G_{13} = 1/R_1 + 1/R_3$), atunci avem o *bifurcaţie* a curentului I în ramurile R_2 şi R_{13} (v. *Breviar*): $I_2 = I : (1 + R_2 G_{13}) =$

$$= I : [1 + R_2(1/R_1 + 1/R_3)] , \qquad (1)$$

de unde rezultă $R_1 = 1 : [(I/I_2) \cdot 1/R_2 - 1/R_2 - 1/R_3] = 60\ \Omega$. (2)

Se putea judeca şi astfel : Tensiunea între punctele de ramificare este $R_2 I_2 = R_{ech} I = I : (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)$, (3)
de unde rezultă imediat (2).

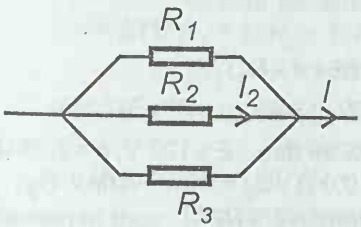


Fig.2.1.21

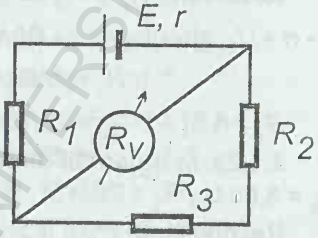


Fig.2.1.22

2.1.22. ***În montajul din figură se dau :*** $E = 100$ V, $r = 10{,}0\ \Omega$, $R_1 = 90\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, $R_V = 2{,}00$ kΩ. ***Ce tensiune arată voltmetrul ?***

Rezolvare. Dacă compunem pe R_V în paralel cu $(R_2 + R_3)$ avem conductanţa $G_{23} = 1/R_V + 1/(R_2 + R_3)$. Atunci avem un divizor de tensiune (v. Breviar): $U_V = E : [1 + (r + R_1)G_{23}] =$

$$= E : \{1 + (r + R_1)[1/R_V + 1/(R_2 + R_3)]\} = 80\ \text{V} .$$

2.1.23. ***În montajul din figură se dau :*** $E = 200$ V, $R_1 = 2{,}00$ kΩ, $R_2 = 3{,}00$ kΩ, $r_1 = 3{,}00$ kΩ, $r_2 = 2{,}00$ kΩ. ***Aflaţi indicaţiile voltmetrelor dacă comutatorul este : a) deschis, b) închis .***

Rezolvare. a) Avem un *divizor de tensiune* (pe r_1, r_2) :

$$U_{1,2} = E \cdot r_{1,2} : (r_1 + r_2) = 80\ \text{V, resp. } 120\ \text{V} . \qquad (1)$$

b) Acum r_1, R_1 sunt în paralel, la fel ca şi r_2, R_2. Avem de asemenea un *divizor de tensiune* :

$$U_1 = E : \{1 + [r_2 R_2 : (r_2 + R_2)](1/r_1 + 1/R_1)\} = 100\ \text{V} ,$$

$$U_2 = E : \{1 + [r_1 R_1 : (r_1 + R_1)](1/r_2 + 1/R_2)\} = 100\ \text{V} . \qquad (2)$$

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

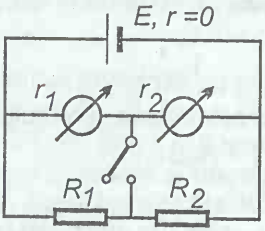


Fig.2.1.23

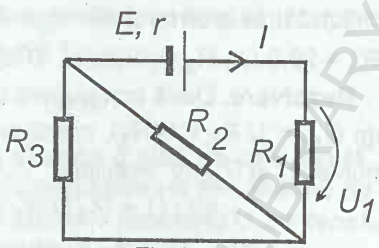


Fig.2.1.24

2.1.24. ***În montajul din figură se dau :*** E = 120 V , r = 25 Ω , R_3 = 20,0 Ω , U_1 = 40 V , I = 2,00 A . ***Aflaţi*** R_2 .

Rezolvare. R_2 şi R_3 sunt în *paralel* şi au la borne tensiunea $E - rI - U_1$, deci *legea lui* ***Ohm*** dă:

$$1/R_2 + 1/R_3 = I : (E - rI - U_1) ,$$

$$R_2 = 1 : [- 1/R_3 + I / (E - rI - U_1)] = 60\ \Omega .$$

2.1.25. ***În montajul din figură se dau :*** E =120 V, r = 2,00 Ω , R_o = 8,00 Ω , R_1 = 20,0 Ω , R_2 = 10,0 Ω , U_2 = 40 V . ***Aflaţi*** R_3 .

Rezolvare. În baza *legii lui* ***Ohm*** avem ($R_{1,2,3}$ sunt în paralel şi au aceeaşi tensiune U_3) : $E = U_3 + (R_o + r)\, I =$

$$= U_3 + (R_o + r)\, U_3 (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) , \qquad (1)$$

de unde rezultă :

$$R_3 = 1 : [- 1/R_1 - 1/R_2 + (E / U_3 - 1) / (r + R_o)] = 20{,}0\ \Omega . \qquad (2)$$

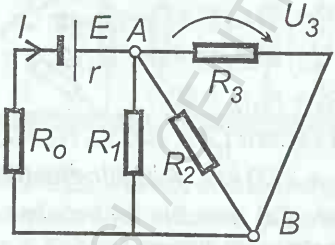
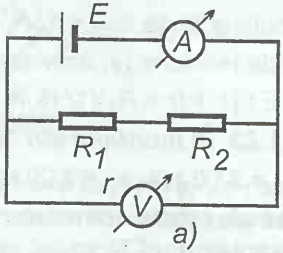


Fig.2.1.25



a)

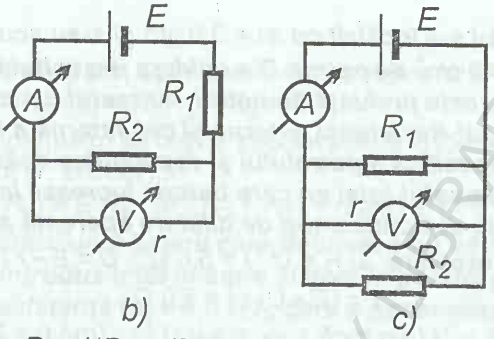
Fig.2.1.26 a

2.1.26. ***În cele 4 montaje din figură se dau :*** E = 220 V ***(rezistenţa internă zero)*** , R_1 = 400 Ω , R_2 = 600 Ω , r = 1,00 kΩ ***(rezistenţa voltmetrului) , ampermetrul este ideal . Aflaţi curentul indicat de ampermetru şi tensiunea indicată de voltmetru .***

Rezolvare. a) *Legea lui* ***Ohm*** :

$$I = E[1/r + 1/(R_1 + R_2)] = 0{,}44\ \text{A} ; \qquad U = E . \qquad (1)$$

Fig.2.1.26 b, c



b) $I = E : [R_1 + R_2\, r / (R_2 + r)] = 0{,}28$ A ,

$U = E : [1 + R_1(1 / R_2 + 1/ r)] = 106$ V . (2)

(divizor de tensiune)

c) $I = E(1/ R_1 + 1/ R_2 + 1/ r) = 1{,}14$ A , $U = E$. (3)

(R_1 , R_2 , r sunt în paralel)

d) $I = \{E : [R_1 + r\, R_1/(r + R_1)]\} \cdot r : (r + R_1) = 0{,}18$ A ,

(bifurcaţia curentului)

$U = E : [1 + R_2(1/ R_1 + 1/ r)] = 71{,}6$ V . (4)

(divizor de tensiune)

Fig.2.1.26 d

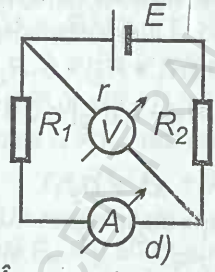
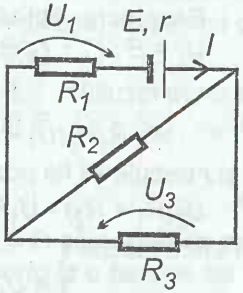


Fig.2.1.27



2.1.27. ***În montajul din figură se dau :*** E = 10,0 V , r = 1,00 Ω , U_1 = 6,0 V, ***randamentul bateriei*** η = 80 % . ***Aflaţi*** I ***şi*** U_3 .

Rezolvare. Tensiunea la borne este $U = E - r\, I$, deci randamentul : $\eta = U / E = (E - r\, I) / E \rightarrow I = E\,(1 - \eta) / r = 2{,}00$ A , (1)

$E - r\, I = U_1 + U_3 \rightarrow U_3 = \eta\, E - U_1 = 2{,}00$ V . (2)

2.1.28. ***O baterie cu t.e.m.*** E = 20,0 V ***debitează un curent*** I = 2,00 A ***pe un rezistor, tensiunea la bornele bateriei fiind*** U = 10,0 V . ***Rezistorul este introdus într-un vas calorimetric umplut până la refuz cu petrol având masa*** m = 0,80 kg ***şi densitatea*** ρ = 800 kg/m^3. ***Lăsând să treacă curentul*** τ = 5,0 min ,

petrolul s-a încălzit cu $\Delta t = 3{,}0$ grd *şi s-au scurs afară din vas* $\Delta V = 3{,}0\ cm^3$ *de petrol. Din căldura dezvoltată în rezistor* $\eta =$ $= 80\ \%$ *este preluată de petrol, iar restul de vasul calorimetric . Aflaţi : a) Rezistenţa externă şi cea internă a bateriei, b) Căldura specifică a petrolului şi capacitatea calorică a vasului, c) Randamentul total cu care bateria lucrează la încălzirea petrolului, d) Coeficientul de dilatare aparentă a petrolului .*

Rezolvare. a) $R = U / I = 5{,}0\ \Omega$; $U = E - r I \rightarrow$

$$r = (E - U) : I = 5{,}0\ \Omega . \qquad (1)$$

b) $\eta\, U I \tau = mc\Delta t \rightarrow c = \eta\, U I \tau : (m\Delta t) = 2{,}0\ kJ/(kg \cdot K)$, (2)

$(1 - \eta) UI\tau = C\Delta t \rightarrow C = (1 - \eta) UI\tau : \Delta t = 400\ J / K$. (3)

c) $\eta_{tot} = \eta_{bat}\, \eta = (U / E)\, \eta = 0{,}40 = 40\ \%$. (4)

d) $\beta_{ap} = \Delta V_{ap} : (V\Delta t) = \Delta V : [(m / \rho)\Delta t] = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$. (5)

2.1.29. *În schema din figură* $R_1 = 20{,}0\ \Omega$, $R_2 = 10{,}0\ \Omega$. *Cu comutatorul deschis tensiunea la bornele bateriei este* $U_1 =$ $= 15{,}0$ V , *iar cu comutatorul închis :* $U_2 = 10{,}0$ V . *Aflaţi t.e.m. şi rezistenţa internă a sursei . Care este condiţia de posibilitate a problemei ?*

Rezolvare. Aplicăm formula *divizorului de tensiune* :

$$U_1 = E : (1 + r / R_1) , \qquad U_2 = E : [1 + r(1/ R_1 + 1/ R_2)] , \qquad (1)$$

de unde rezultă : $E = U_1 U_2 R_1 : [U_2(R_1 + R_2) - U_1 R_2] = 20{,}0$ V ,

$$r = R_1 R_2 (U_1 - U_2) : [U_2(R_1 + R_2) - U_1 R_2] = 6{,}67\ \Omega ; \qquad (2)$$

E şi r trebuie să fie *pozitive* :

$$U_2(R_1 + R_2) - U_1 R_2 > 0 , \qquad U_1 > U_2 , \qquad (3)$$

de unde rezultă : $U_1 / U_2 < (R_1 + R_2) / R_2$,

$$1 < U_1 / U_2 < 1 + R_1 / R_2 . \qquad (4)$$

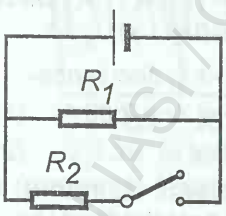


Fig.2.1.29

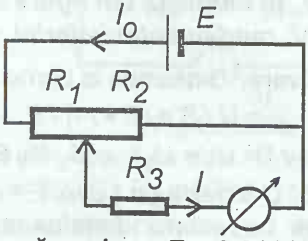


Fig.2.1.30

2.1.30. *În schema din figură se dau :* $E = 9{,}0$ V $(r = 0)$, $R_1 =$ $= 5{,}0\ \Omega$, $R_2 = 5{,}0\ \Omega$, $R_3 = 2{,}0\ \Omega$. *Aflaţi curentul indicat de ampermetrul ideal .*

Rezolvare. Curentul prin baterie este dat de *legea lui* ***Ohm*** :

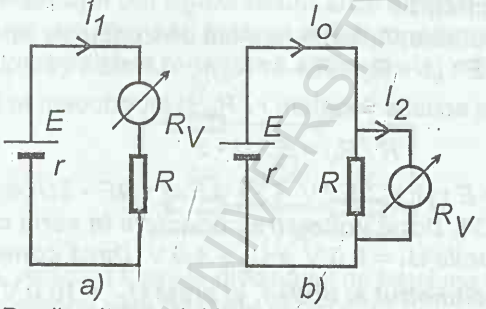
$$I_o = E : [R_1 + R_2R_3 / (R_2 + R_3)] . \quad (1)$$

Curentul I prin ampermetru se obţine imediat aplicând formula *bifurcaţiei* curentului (v. *Breviar*) :

$$I = I_o \cdot R_2 : (R_2 + R_3) = E\,R_2 : [R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3] = 1{,}00 \text{ A} . \quad (2)$$

2.1.31. În circuitul unei baterii care debitează pe un rezistor $R = 20\ \Omega$ ***s-a introdus întâi în serie şi apoi în paralel pe*** R ***un voltmetru de rezistenţă*** $R_V = 4{,}0\ \text{k}\Omega$ ***, care a dat aceeaşi indicaţie . Aflaţi rezistenţa internă a bateriei.***

Fig.2.1.31



Rezolvare. Dacă voltmetrul dă *aceeaşi* indicaţie, înseamnă că prin el trece *acelaşi* curent în cele două montaje :

$$I_1 = E : (r + R + R_V) ,$$

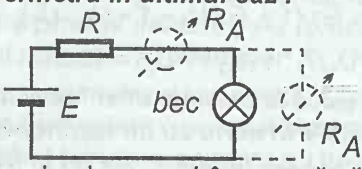
$$I_2 = I_o\,R : (R + R_V) = \{E : [1 + RR_V / (R + R_V)]\}\,R : (R + R_V) . \quad (1)$$

Punând condiţia $I_1 = I_2$, rezultă :

$$r = R^2 / R_V = 0{,}10\ \Omega . \quad (2)$$

2.1.32. Un rezistor de rezistenţă $R = 2{,}0\ \Omega$ ***şi un bec de putere nominală*** $P_n = 0{,}50$ W ***sunt legate în serie la o baterie cu rezistenţa internă neglijabilă . Dacă legăm un ampermetru fie în serie cu becul, fie în paralel pe bec , becul arde normal . Aflaţi curentul arătat de ampermetru în ultimul caz .***

Fig.2.1.32



Rezolvare. Dacă becul arde *normal*, înseamnă că prin bec trece curentul *nominal* I_n şi la bornele sale este tensiunea *nominală* U_n . *Legea lui* ***Ohm*** dă în cele două cazuri :

$E = U_n + I_n(R + R_A)$, $E = U_n + (I_n + I)R$, unde $R_A I = U_n$. (1)

Scădem membru cu membru primele două ecuaţii :

$I_n(R + R_A) = (I_n + I)R$, $I_n R_A = I R$, (2)

unde , ţinând seama de a treia ecuaţie (1), găsim : $I_n \cdot U_n / I = I R$,

$$I = \sqrt{I_n U_n / R} = \sqrt{P_n / R} = 0{,}50 \text{ A} . \quad (3)$$

2.1.33. ***O baterie cu t.e.m.*** E = 12 V ***şi rezistenţa internă neglijabilă debitează pe două rezistoare identice legate în serie . Conectând un voltmetru în paralel pe un rezistor el arată*** U = = 4,0 V ***. Ce tensiune va arăta voltmetrul dacă îl conectăm în serie în circuit ?***

Rezolvare. Aplicăm formula *divizorului de tensiune* :

$U = E : [1 + R(1/R + 1/R_V)]$, $U' = E : (1 + 2R / R_V)$. (1)

Din prima ecuaţie scoatem r / R_V şi introducem în a doua :

$$R / R_V = E / U - 2 ,$$

$U' = E : [1 + 2(E / V - 2)] = E U : (2E - 3U) = 4{,}0$ V .(2)

2.1.34. ***Două voltmetre conectate în serie cu o baterie arată tensiunile*** U_1 = 8,0 V ***şi*** U_2 = 4,0 V. ***Dacă conectăm la baterie numai voltmetrul al doilea, el arată*** U_2' = 10,0 V ***. Care este tensiunea electromotoare a bateriei ?***

Rezolvare. Dacă bateria n-ar avea rezistenţă *internă*, am avea $E = U_3$ şi $E = U_1 + U_2$, ceea ce nu se verifică .

În primul caz, respectiv al doilea, avem :

$U_1 / R_1 = U_2 / R_2 = E / (r + R_1 + R_2)$, $U_2' = E : (1 + r / R_2)$.(1)

Din primele relaţii avem :

$R_1 = R_2 \cdot U_1 / U_2$, $U_2 / R_2 = E / (r + R_2 \cdot U_1 / U_2 + R_2)$

sau $U_2 = E R_2 / (r + R_2 U_1 / U_2 + R_2) = E : (1 + U_1 / U_2 + r / R_2)$,

de unde $r / R_2 = E / U_2 - 1 - U_1 / U_2$, (2)

care introdus în ultima expresie (1) dă :

$U_3 = E : (1 + E / U_2 - 1 - U_1 / U_2) \rightarrow$

$E = U_1 U_2' : (U_2' - U_2) = 13{,}3$ V . (3)

2.1.35. ***Dacă la bornele unei "cutii negre" se aplică o tensiune*** U_1 = 5,0 V ***în serie cu un rezistor*** R = 1,00 Ω ***şi un ampermetru ideal, acesta indică*** I_1 = 1,00 A ***. Dacă se aplică numai tensiunea*** U_2 = 20 V, ***ampermetrul indică*** I_2 = 2,0 A ***. Ce este în "cutie" ?***

Rezolvare. În "cutie" nu poate fi o simplă rezistenţă (echivalentă) r căci atunci ar fi $U_1 / I_1 = R + r$ şi $U_2 / I_2 = r$, ceea ce nu corespunde datelor problemei, deci în cutie trebuie să mai fie o baterie. Considerăm o baterie E în serie cu un rezistor r şi curenţii $I_{1,2}$ în sensul debitării sursei aplicate. Atunci

$$I_1 = (U_1 + E) : (r + R), \quad I_2 = (U_2 + E) : r, \tag{1}$$

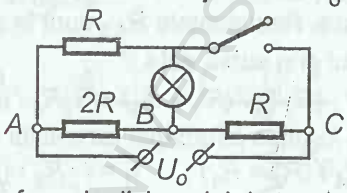
din aceste două ecuaţii rezultă cele două necunoscute:

$$r = (U_2 - U_1 + R I_1) : (I_2 - I_1) = 16\ \Omega,$$

$$E = (R I_1 I_2 - U_1 I_2 + U_2 I_1) : (I_2 - I_1) = 12\ \text{V}. \tag{2}$$

2.1.36. ***În montajul din figură becul arde normal şi la fel, cu întrerupătorul deschis sau închis. Aflaţi tensiunea*** **nominală** ***a becului, cunoscând tensiunea aplicată*** $U_o = 54$ V.

Fig.2.1.36



Rezolvare. Aplicăm formula divizorului de tensiune (v. *Breviar*). Dacă întrerupătorul este **deschis** avem: $U_{AB} = U_o : \{1 + R[1/(2R) + 1/(R + R_{bec})]\}$, $U_n = U_{AB} : (1 + R / R_{bec}) = \{U_o : [3/2 + R/(R + R_{bec})]\} : (1 + R / R_{bec}) = 2U_o : (3 + 5R / R_{bec})$. (1)

Dacă întrerupătorul este **închis** (R din stânga schemei nu intervine):

$$U_n = U_o : [1 + 2R(1/R + 1/R_{bec})] = U_o : (3 + 2R / R_{bec}). \tag{2}$$

Eliminăm R / R_{bec} din ecuaţiile (1), (2) şi obţinem:

$$U_n = U_o : 9 = 6{,}0\ \text{V}. \tag{3}$$

2.1.37. ***O linie bifilară de transmisie (îngropată) are lungimea*** $\ell = 10{,}0$ km. ***Într-un anumit loc izolaţia unuia din cabluri s-a stricat şi s-a creat astfel o legătură cu pământul. Pentru a afla la ce distanţă*** x ***s-a produs defectul, s-a folosit montajul din figură. Cunoscând raportul rezistenţelor*** $R_1 / R_2 = 3{,}0$ ***pentru care curentul din galvanometru se*** **anulează,** ***aflaţi distanţa*** x.

Rezolvare. Montajul reprezintă o *punte* ***Wheatstone***. Condiţia de "echilibru" a punţii (când prin galvanometru ***nu*** trece curent) este

$$R_1 / R_2 = (2\ell - x) : x \rightarrow$$

$$x = 2\ell \cdot R_2 : (R_1 + R_2) = 2\ell : (1 + R_1 / R_2) = 5{,}0\ \text{km}.$$

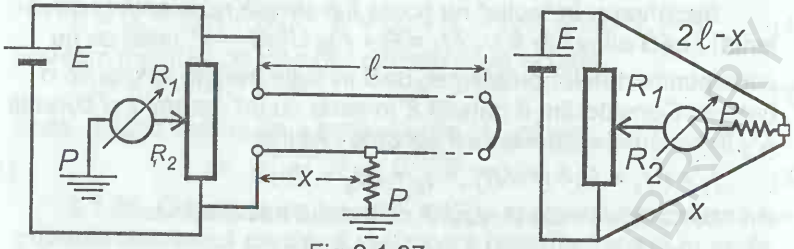


Fig.2.1.37

2.1.38. ***În schema din figură se dau :*** $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $U = 36$ V ***, conductoarele au rezistenţă neglijabilă. Peste punctele*** A , B ***cade o şurubelniţă, aflaţi curentul de scurt-circuit .***

Rezolvare. Rezistenţele $R_{1,3}$ sunt în paralel, la fel rezistenţele $R_{2,4}$. Curentul prin sursă este :

$$I = U : [R_1R_3 / (R_1 + R_3) + R_2R_4 / (R_2 + R_4)] \qquad (1)$$

Aplicăm formula *bifurcaţiei* curentului (v. *Breviar*) :

$$I_2 = I \cdot R_4 : (R_2 + R_4)\,, \qquad I_1 = I \cdot R_3 : (R_1 + R_3)\,, \qquad (2)$$

atunci pentru nodul A avem : $I_{sc} = I_2 - I_1 =$

$= U \cdot (R_1R_4 - R_2R_3) : [R_1R_3(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_1 + R_3)] = 0{,}27$ A.

Condiţia ca $I_{sc} = 0$ este chiar condiţia de "echilibru" a "punţii" pe care o reprezintă montajul dat.

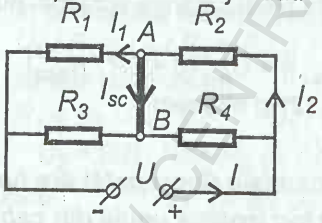


Fig.2.1.38

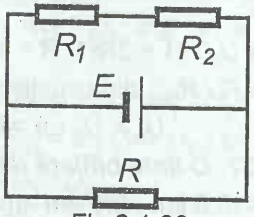


Fig.2.1.39

2.1.39. ***În montajul din figură bateria are rezistenţa internă neglijabilă. Dacă conectăm un voltmetru (de rezistenţă*** R_V***) succesiv la bornele lui*** R, $R_{1,2}$ ***găsim respectiv*** $U = 15{,}0$ V, $U_1 = 4{,}0$ V, $U_2 = 6{,}0$ V. ***Aflaţi tensiunile pe*** $R_{1,2}$ ***în absenţa voltmetrului.***

Rezolvare. Deoarece bateria n-are rezistentă internă, tensiunea la bornele sale este chiar t.e.m. : $U = E$. Aplicăm formula divizorului de tensiune (v. *Breviar*) :

$U_1 = U : [1 + R_2(1/R_1 + 1/R_V)] = U \cdot R_1 R_V : [R_1 R_2 + R_V(R_1 + R_2)]$,
$U_2 = U : [1 + R_1(1/R_2 + 1/R_V)] = U \cdot R_2 R_V : [R_1 R_2 + R_V(R_1 + R_2)]$,
(1) de unde rezultă raportul, independent de rezistenţa voltmetrului:

$$U_1 / U_2 = R_1 / R_2 . \qquad (2)$$

$U_1' = U : (1 + R_2 / R_1) = U : (1 + U_2 / U_1) = 6{,}0$ V ,
$U_2' = U : (1 + R_1 / R_2) = U : (1 + U_1 / U_2) = 9{,}0$ V . (3)

2.1.40. ***În montajul din figură cele 3 voltmetre sunt identice, bateria are t.e.m.*** E = 5,0 V ***şi rezistenţa internă neglijabilă . Voltmetrul*** V_1 ***arată*** U_1 = 2,0 V ***. Cât arată celelalte voltmetre ?***

Rezolvare. $E = U_1 + U_2$, $U_2 = E - U_1 = 3{,}0$ V . (1)

$U_3 = R_V I_3 = R_V(I_1 - I_2) = R_V(U_1 / R_V - U_2 / R_V) = U_1 - U_2 = -1{,}0$ V,
deci I_3 are sens invers ca în figură .

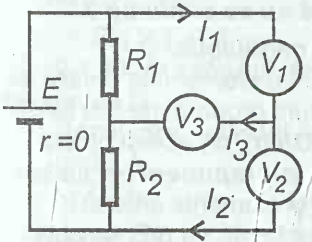


Fig.2.1.40

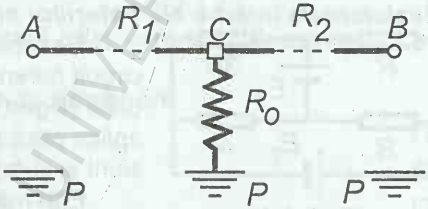


Fig.2.1.41

2.1.41. ***Un conductor de transmisie, din cauza unui defect de izolaţie, are o atingere cu pământul, care reprezintă o rezistenţă*** R_0, ***ca în figură . Aplicând între borna de intrare*** A ***şi pământ*** P ***o tensiune*** U_0 = 150 V , ***un voltmetru ideal conectat între borna de ieşire*** B ***şi pământ*** P ***arată*** U = 100 V , ***iar un ampermetru ideal conectat la ieşire arată*** I = 6,0 A . ***Dacă acum se aplică la ieşirea*** B - P ***tensiunea*** U_0 ***şi se conectează un voltmetru ideal la intrare, el arată*** U, ***ca înainte. Aflaţi : a) Distanţa*** AC = x ***până la locul defectului, cunoscând rezistenţa liniei pe unitatea de lungime*** R * = 1,00 Ω/km , ***b) Rezistenţa de punere la pământ*** R_0 .

Rezolvare. Aplicăm formula *divizorului de tensiune* şi *formula bifurcaţiei curentului* (v. *Breviar*): $U = U_0 \cdot R_0 : (R_0 + R_1)$, (1)
(aici R_2 nu intervine, voltmetrul fiind ideal) ,

$$I = \{U_0 : [R_1 + R_2 R_0 / (R_2 + R_0)]\} \cdot R_0 / (R_2 + R_0) , \qquad (2)$$

$U = U_0 \cdot R_0 : (R_0 + R_2)$, (aici R_1 nu intervine) . (3)

Din (1) şi (3) rezultă imediat $R_1 = R_2$, deci defectul s-a produs chiar la mijlocul liniei.

Acum ecuaţiile (1) şi (2) se scriu :

$$U = U_o : (1 + R_1 / R_o) , \quad I = U_o : [R_1(2 + R_1 / R_o)]. \qquad (4)$$

Eliminăm pe R_1 / R_o şi găsim : $R_1 / R_o = U_1 / U - 1$,

$$R_1 = R_2 = U_o U : [I (U_o + U)] = 10{,}0\ \Omega , \qquad (5)$$

$$R_o = R_1 : (U_o / U - 1) = U_o U_2 : [I (U_o^2 - U^2)] = 20{,}0\ \Omega . \qquad (6)$$

Distanţa la care are loc defectul :

$$x = R_1 : R^* = 10{,}0\ \text{km} . \qquad (7)$$

2.1.42. ***În montajul din figură tensiunea bateriei*** E_1 ***este mărită cu*** $\Delta E_1 = 4{,}0$ V ***. Cu cât trebuie mărită tensiunea bateriei*** E_2 ***pentru ca curentul prin bateria*** E_2 ***să nu se schimbe ? Rezistenţele interne ale bateriilor sunt neglijabile.***

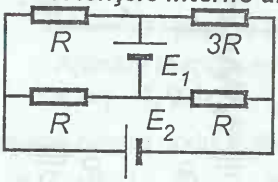


Fig.2.1.42

Rezolvare. La elementele ***liniare*** de circuit curenţii sunt *proporţionali* cu tensiunile (*legea lui* **Ohm**), de aceea putem aplica *principiul* ***suprapunerii*** pentru tensiuni şi curenţi (la elemente *liniare*) .

Prin mărirea t.e.m. cu ΔE_1 se obţine o schemă care reprezintă o suprapunere a schemei iniţiale cu schema (a) din figură, de unde rezultă ΔI_2 ,

$$I_o = \Delta E_1 : [R \cdot 3R / (R + 3R) + R / 2] = 4\Delta E_1 : (5R),$$

$$I_1 = I_o \cdot 3R : (R + 3R) , \quad I_2 = I_o \cdot R : (R + R) ,$$

$$\Delta I_2 = I_1 - I_2 = [4 / (5R)]\ \Delta E_1 \cdot (1/4) = \Delta E_1 / (5R) . \qquad (1)$$

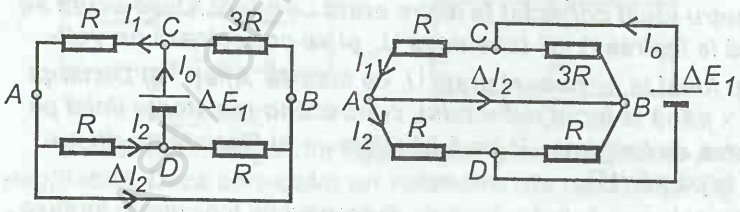


Fig.2.1.42 a

Dacă acum mărim tensiunea bateriei E_2, obţinem o schemă care reprezintă suprapunerea schemei iniţiale cu schema (b) din figură, de unde rezultă $\Delta I_2'$:

$$\Delta I_2' = \Delta E_2 : [R / 2 + 3R \cdot R / (3R + R)] = 4\Delta E_2 / (5R) . \qquad (2)$$

Aplicând din nou principiul *suprapunerii* şi punând condiţia cerută , obţinem $\Delta I_2 + \Delta I_2' = \Delta E_1 / (5R) - 4\Delta E_2 / (5R) = 0$,

$$\Delta E_2 = (1/4)\,\Delta E_1 = 1{,}0 \text{ V} . \quad (3)$$

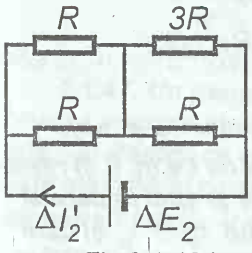


Fig.2.1.42 b

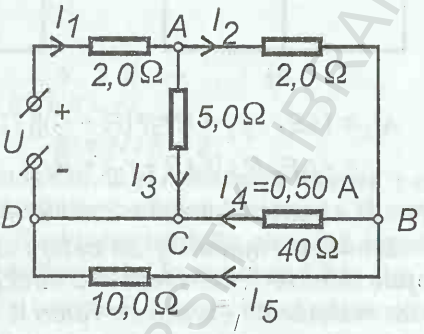


Fig.2.1.43

2.1.43. ***În schema din figură aflaţi intensităţile curenţilor şi tensiunea*** U .

Rezolvare. Aplicăm *legile lui* ***Kirchhoff*** :

nodul A : $I_1 = I_2 + I_3$, (1)

nodul B : $I_2 = I_4 + I_5$, (2)

ochiul UAC : $U = 2I_1 + 5I_3$, (3)

ochiul ABC : $2I_2 + 40I_4 - 5I_3 = 0$, (4)

ochiul BDC : $10I_5 - 40I_4 = 0$. (5)

Din ecuaţia (5) avem : $I_5 = 4I_4 = 2{,}0$ A ;

din (2) avem : $I_2 = 5I_4 = 2{,}5$ A ;

din (4) avem : $I_3 = 10I_4 = 5{,}0$ A ;

din (1) avem : $I_1 = 15I_4 = 7{,}5$ A ;

din (3) avem : $U = 80I_4 = 40$ V .

2.1.44. ***În schema din figură se cunosc*** $r_{1,2}$, R . ***La un moment dat t.e.m. a bateriei*** E_1 ***este mărită cu*** ΔE_1 . ***Aflaţi cu cât creşte curentul*** I_2 .

Rezolvare. La *rezistoarele* ***liniare*** curenţii sunt *proporţionali* cu tensiunile (*legea lui* ***Ohm***), de aceea se poate aplica *principiul* ***suprapunerii*** pentru tensiuni şi curenţi .

După mărirea t.e.m. schema care se obţine reprezintă o suprapunere a schemei iniţiale (a) cu schema (b) . Aplicăm *legea lui* ***Ohm*** şi formula *bifurcaţiei* curentului :

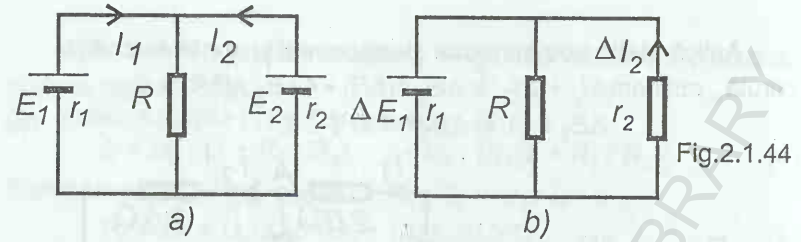


Fig.2.1.44

$$\Delta I_2 = \{\Delta E_1 : [r_1 + R r_2/(R + r_2)]\} \cdot [-R/(R + r_2)] =$$
$$= -\Delta E_1 R : [r_1(R + r_2) + R r_2] ,$$

semnul (-) apare datorită convenţiei alese pentru I_2 şi ΔI_2 .

2.1.45. ***Un număr*** n ***de baterii identice cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţele interne*** r ***sunt legate o dată în serie şi apoi în paralel pe un rezistor*** R . ***Pentru ce valori*** R ***curentul*** $I_s \geq I_p$ ***şi care este randamentul celor două legări în cazul*** $I_s = I_p$ ***?***

Rezolvare. $I_s = nE : (nr + R) \geq I_p = E : (r/n + R) = nE : (r + nR)$,

(1) sau $nr + R \leq r + nR \rightarrow R \geq r$. (2)

În cazul $I_s = I_p$ avem $R = r$ şi randamentele sunt :

$$\eta_s = R : (R + nr) = 1 : (n + 1) ,$$
$$\eta_p = R : (R + r/n) = n : (n + 1) = n\eta_s > \eta_s . \quad (3)$$

2.1.46. ***Avem la dispoziţie baterii identice cu*** E = 4,0 V ***şi*** r = 1,0 Ω . ***Trebuie alimentat un consumator cu*** U = 4,0 V ***şi*** I = = 4,0 A. ***Indicaţi schema de alimentare cu număr*** **minim** ***de baterii .***

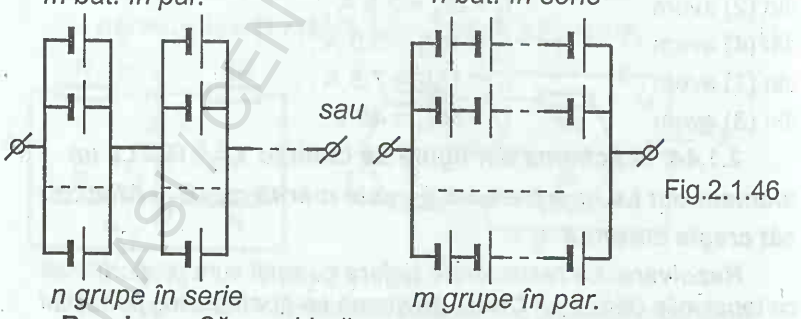


Fig.2.1.46

Rezolvare. Să considerăm un montaj *mixt* în care avem **fie** *n* grupe legate în serie, fiecare grup având *m* baterii în paralel, **fie** *m* grupe legate în paralel, fiecare grup având *n* baterii în serie.
Curentul debitat este *acelaşi* : $I = nE : (R + nr/m)$. (1)

Cum $R = U/I$, rezultă $nE = U + (n/m)rI$. (2)

Notând cu $N = n \cdot m$ numărul total de baterii, avem :

$nE = U + (n^2/N)rI$ sau $n^2 - [NE/(rI)]\,n + NU/(rI) = 0$,

$$n = \frac{NE}{2rI} \pm \sqrt{\frac{N}{rI}\left(\frac{NE^2}{4rI} - U\right)}, \quad (3)$$

de unde condiţia evidentă $\Delta \geq 0 \rightarrow$

$$N \geq 4Ur I : E^2 = 4 = N_{min}. \quad (4)$$

Atunci $n = NE : (2rI) = 2$, $m = N/n = 2$. (5)

2.1.47. ***Un generator cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţa internă*** r ***debitează energie pe un consumator care are rezistenţa*** R **variabilă.** ***a) Pentru ce valoare*** R ***puterea*** **utilă** ***(în circuitul exterior) este*** **maximă** ***şi care este randamentul în acest caz ? b) Demonstraţi relaţia*** $r = \sqrt{R_1 R_2}$ ***, unde*** $R_{1,2}$ ***sunt două valori ale rezistenţei consumatorului pentru care se obţine*** **aceeaşi** ***putere utilă . c) Reprezentaţi grafic*** P_u ***şi*** η ***în funcţie de*** R .

Rezolvare. a) $P_u = RI^2 = R[E : (r + R)]^2 =$

$$= E^2 : (r/\sqrt{R} + \sqrt{R})^2. \quad (1)$$

La numitor avem *suma* a doi termeni al căror *produs* este **constant** (independent de *R*), atunci *suma* este **minimă** când termenii sunt *egali* : $r/\sqrt{R} = \sqrt{R}$, $R = r$. (2)

Teorema adaptării (optimizării) . *Puterea utilă este* ***maximă*** *când rezistenţa consumatorului este egală cu rezistenţa* ***internă*** *a generatorului.*

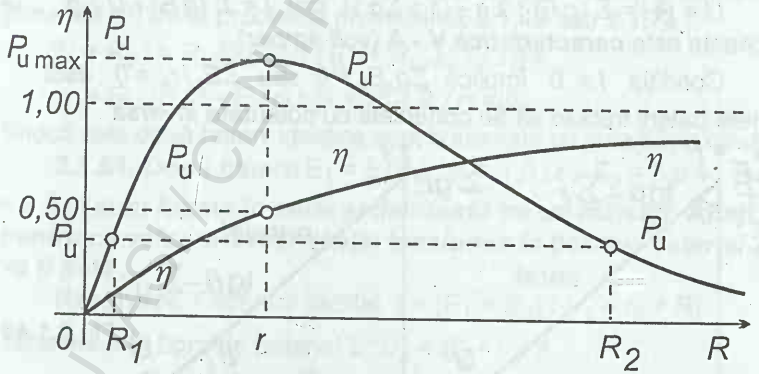


Fig.2.1.47

$P_{u\,max} = (1/4)E^2/r = (1/4)P_{sc}$, $P_{sc} = E^2/r$, (3)

unde P_{sc} este puterea la *scurt-circuit* .

$$I_{ad} = E : (2r) = I_{sc} : 2 , \quad (4)$$

unde I_{ad} este curentul la adaptare şi I_{sc} - curentul de scurt-circuit .

$$\eta_{ad} = R : (r + R) = 1/2 = 50\ \% , \ (R = r) . \quad (5)$$

b) $P_u = R_1[E : (r + R_1)]^2 = R_2[E : (r + R_2)]^2 \rightarrow r = \sqrt{R_1 R_2}$, (6)

$$\eta_1 = \frac{R_1}{\sqrt{R_1 R_2} + R_1} = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} , \ \eta_2 = \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} , \quad (7)$$

randamentul este mai mare pentru rezistenţa mai mare ; dacă $R_1 < R_2$, atunci $\eta_1 < 50\ \%$, $\eta_2 > 50\ \%$.

c) V. figura.

2.1.48. ***Mai multe baterii diferite sunt legate : a) în serie, b) în paralel . Deduceţi şi reprezentaţi grafic*** **caracteristica** V - A *(volt-amper)* ***a sistemului . Care este condiţia ca pentru orice sarcină curentul debitat să fie nul ?***

Rezolvare. a) $I = \Sigma E : (\Sigma r + R) \rightarrow R = (1/I)\,\Sigma E - \Sigma r$, (1)

$U = R I = \Sigma E - I \Sigma r$ sau $I = \Sigma E : \Sigma r - U : \Sigma r$, (2)

aceasta este ecuaţia ***caracteristicii*** **V - A** (*volt-amper*) .

Condiţia $I \equiv 0$ implică $\Sigma E = 0$, deci unele baterii trebuie sa fie conectate cu polaritate *inversă* .

b) $I = \Sigma (gE) : (1 + R \Sigma g) \rightarrow$

$R = (1 / I) \Sigma (gE) : \Sigma g - (1 : \Sigma g)$, (3)

unde $g = 1 / r$, $G = 1 / R$ sunt **conductanţele** (în $S = \Omega^{-1}$) .

$U = R I = \Sigma (gE) : \Sigma g - (1 : \Sigma g) I$ sau $I = \Sigma (gE) - U \Sigma g$, (4)

aceasta este ***caracteristica*** **V - A** (*volt-amper*).

Condiţia $I \equiv 0$ implică $\Sigma g_k E_k = 0$ sau $\Sigma E_k / r_k = 0$, deci unele baterii trebuie să fie conectate cu polaritate *inversă* .

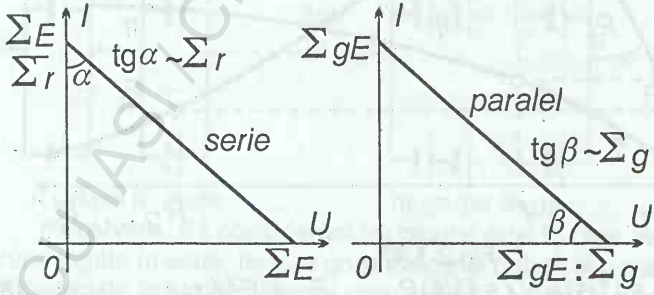


Fig.2.1.48

2.1.49. ***Un număr*** **n** ***de baterii identice , legate în paralel (fără inversiuni de polaritate), debitează pe un rezistor . Dacă***

inversăm polaritatea unei baterii, curentul prin rezistor se micşorează de k = 1,5 ori . ***Aflaţi*** n .

Rezolvare. În primul caz $I_o = E : (R + r/n)$. Bateriile fiind identice şi fără inversiuni de polaritate, fiecare baterie contribuie în mod egal cu $I_o/n = E : (nR + r)$ la curentul total debitat. În al doilea caz, una din baterii îşi inversează polaritatea , deci contribuţia sa schimbă semnul şi se anulează cu una din celelalte contribuţii , astfel încât curentul total debitat va fi $I' = (n - 2)E : (nR + r)$.(1)

Bineînţeles putem aplica formula *generală* pentru curentul debitat de baterii *oarecare* legate în paralel (v. problema 2.1.74) :

$$I_p = \Sigma(E_k / r_k) : [1 + R \Sigma (1/r_i)] . \qquad (2)$$

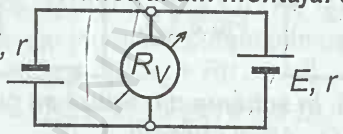
Condiţia din enunţ $I' = I_o / k$ dă :

$$n - 2 = n / k \rightarrow n = 2k : (k - 1) = 6 . \qquad (3)$$

Valorile k acceptabile sunt cele care dau n întreg .

2.1.50.*Ce tensiune arată voltmetrul din montajul din figură?*

Fig.2.1.50



Rezolvare. Avem două baterii identice legate în paralel cu polarităţi *opuse* şi debitând pe rezistenţa voltmetrului R_V . Este exact cazul din problema precedentă 2.1.49 pentru $n = 2$, deci curentul este zero şi voltmetrul arată zero. Putem folosi şi formula *generală* (2) de la problema precedentă 2.1.49 sau 2.1.74 :

$$U = R_V I = R_V \Sigma(E / r) : [(1 + R_V \Sigma(1 / r)] =$$

$$= R_V (E / r - E / r) : (1 + R_V \cdot 2 / r) = 0 ,$$

fiindcă cele două baterii identice sunt conectate cu polarităţile opuse.

2.1.51. ***Două baterii*** $E_1 = 5{,}0$ V , $r_1 = 1{,}0\ \Omega$; $E_2 = 3{,}0$ V, $r_2 = 2{,}0\ \Omega$ ***sunt legate în serie şi debitează pe un rezistor. Aflaţi pentru ce valoare a rezistenţei tensiunea la bornele bateriei 2 va fi nulă .***

Rezolvare. Curentul debitat $I = (E_1 + E_2) : (r_1 + r_2 + R)$. (1)

Tensiunea la bornele bateriei 2 : $U_2 = E_2 - r_2 I =$

$$= [E_2(r_1 + R) - E_1 r_2] : (r_1 + r_2 + R) . \qquad (2)$$

Condiţia cerută $U_2 = 0$ dă :

$$R = (E_1 r_2 - E_2 r_1) : E_2 = 2{,}3\ \Omega . \qquad (3)$$

2.1.52. ***În schema din figură se dau :*** $E_1 = 9{,}0$ V, $r_1 = 0{,}40\ \Omega$, $E_2 = 11{,}5$ V , $r_2 = 0{,}60\ \Omega$, $I_1 = 1{,}00$ A . ***Aflaţi*** R .

Rezolvare. Avem două baterii legate în paralel care debitează pe R :

$$I = (E_1 / r_1 + E_2 / r_2) : [1 + R(1/r_1 + 1/r_2)] =$$
$$= (E_1 r_2 + E_2 r_1) : [r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)] , \qquad (1)$$

$$E_1 = r_1 I_1 + R I , \quad R : (E_1 - r_1 I_1) = 1 : I =$$
$$= [r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)] : (E_1 r_2 + E_2 r_1) ,$$

$$R = [r_1 r_2 (E_1 - r_1 I_1) : [E_1 r_2 + E_2 r_1 - (r_1 + r_2)(E_1 - r_1 I_1)] =$$
$$= [r_2 (E_1 - r_1 I_1)] : [E_2 - E_1 + (r_1 + r_2) I_1] = 0{,}96\ \Omega . \qquad (2)$$

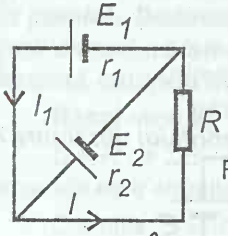


Fig.2.1.52

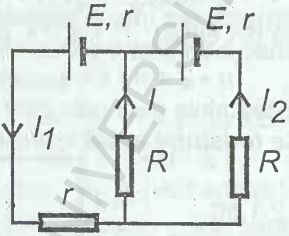


Fig.2.1.53

2.1.53. ***În schema din figură se cunosc :*** E = 16 V , R = 2,0 Ω , r = 1,0 Ω . ***Aflaţi curenţii*** $I , I_{1,2}$.

Rezolvare. Avem două baterii legate în *paralel* (cu polarităţi opuse), debitând curentul I pe R :

$$I = [E / (r + r) - E / (r + R)] : \{1 + R[1/(2r) + 1/(r + R)]\} =$$
$$= E (R - r) : (R_2 + 5Rr + 2r^2) = 1{,}00\ \text{A} . \qquad (1)$$

$$I_1 = (E - R I) : (2r) = E(3R + r) : (R_2 + 5Rr + 2r^2) = 7{,}0\ \text{A} , \qquad (2)$$

$$I_2 = -[-E - RI] : (R + r) = 2E (R + r) : (R_2 + 5Rr + 2r^2) = 6{,}0\ \text{A}. \qquad (3)$$

Putem scrie *ecuaţiile lui* ***Kirchhoff*** :

$$I + I_2 - I_1 = 0 , \quad E = 2rI_1 + RI , \quad E = (R + r) I_2 - RI . \qquad (4)$$

2.1.54. ***În schemă se dau :*** $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$ ***.Bateriile au rezistenţele interne neglijabile. Dacă*** $E_2 = 3{,}0$ V ***, atunci*** $I_2 = 0$ ***. Pentru ce valoare*** E_2 ***prin bateria*** E_1 ***nu va trece curent ?***

Rezolvare. În primul caz, dacă $I_2 = 0$, atunci $I_1 = I_3$ şi avem pentru cele două ochiuri de reţea :

$$E_1 = R_3 I_1 , \quad E_2 = R_3 I_1 \rightarrow E_1 = E_2 . \qquad (1)$$

În al doilea caz , dacă $I_1 = 0$, atunci $I_2' = I_3'$ şi pentru cele două ochiuri de reţea avem :

$E_1 (= E_2) = R_3 I_2'$, $E_2' = (R_2 + R_3) I_2' \rightarrow$ (2)

$E_2' = E_2 \cdot (R_2 + R_3) : R_3 = 4{,}5$ V . (3)

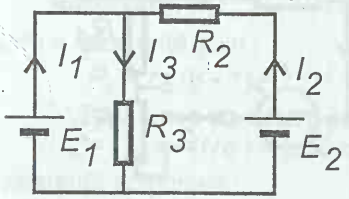


Fig.2.1.54

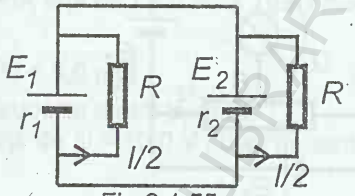


Fig.2.1.55

2.1.55. ***În montajul din figură se dau:*** $E_1 = 12$ V, $r_1 = 0{,}50\ \Omega$, $E_2 = 6{,}0$ V. ***Determinaţi valoarea rezistenţei*** R ***cu care se şuntează bateriile, astfel încât prin bateria*** 2 ***să nu treacă curent .***

Rezolvare. Observăm că cele două baterii sunt legate în paralel şi debitează pe cele două rezistoare legate în paralel , deci prin fiecare din ele va trece curentul :

$$I/2 = (1/2)\,(E_1/r_1 + E_2/r_2) : [1 + (R/2)(1/r_1 + 1/r_2)]. \quad (1)$$

Pentru ochiul din dreapta avem (nu avem curent prin baterie) :

$$E_2 = R\,I/2 = R\,(E_1 r_2 + E_2 r_1) : [2 r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)] ,$$

de unde rezultă : $R = 2E_2 r_1 : (E_1 - E_2) = 1{,}0\ \Omega$. (2)

2.1.56. ***În montajul din figură se dau:*** $R = 2{,}50\ \Omega$, $E_1 = 1{,}50$ V, $r_1 = 1{,}00\ \Omega$, $E_2 = 2{,}00$ V , $r_2 = 1{,}60\ \Omega$. ***Ce tensiune arată voltmetrul ideal conectat la mijlocul rezistoarelor*** R ***?***

Rezolvare. Prin reostatul superior şi bateria E_1 nu trece curent fiind circuit întrerupt (voltmetrul ideal are rezistenţa proprie *infinită*).

Pentru a afla ***diferenţa de potenţial*** *(tensiunea) între două puncte într-o reţea, mergem de la un punct la celălalt prin reţea şi sumăm tensiunile :*

$$U_{AB} = V_A - V_B = \Sigma R I - \Sigma E . \quad (1)$$

În cazul nostru, mergem de la A la B prin E_1 :

$$U = -(-E_1) + (R/2)\,I_2 = E_1 + (R/2) \cdot E_2/(r_2 + R) = 2{,}10\ \text{V} . \quad (2)$$

2.1.57. ***În montajul din figură*** $R_1 = 2{,}0\ \Omega$, $R_2 = 90\ \Omega$, R_s ***este o rezistenţă şunt foarte mică . În poziţia*** 1 ***a comutatorului scala miliampermetrului corespunde curentului*** $I_1 = 10{,}0$ A ***din circuitul principal, în poziţia*** 2 ***- curentului*** $I_2 = 100$ A . ***Aflaţi rezistenţa miliampermetrului .***

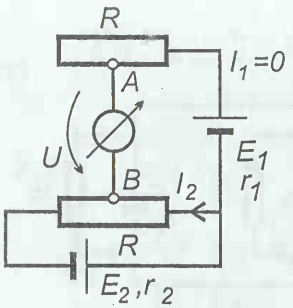


Fig.2.1.56

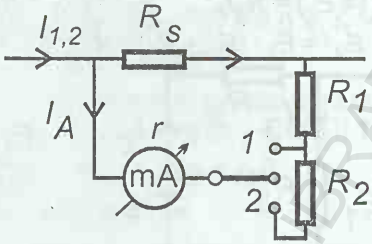


Fig.2.1.57

Rezolvare. Aplicăm formula *bifurcaţiei* curentului (v. *Breviar*):

$$I_A = I_1 \cdot R_s : (R_s + R_1 + r) \approx I_1 \cdot R_s : (R_1 + r),$$

$$I_A = I_2 \cdot R_s : (R_s + R_1 + R_2 + r) \approx I_2 \cdot R_s : (R_1 + R_2 + r). \quad (1)$$

Egalând cele două expresii rezultă : $I_1 : (R_1 + r) \cong I_2 : (R_1 + R_2 + r)$

$$\rightarrow \quad r \cong [I_1(R_1 + R_2) - I_2R_1] : (I_2 - I_1) = 8{,}0\ \Omega\ . \quad (2)$$

2.1.58. ***O rezistenţă şunt măreşte scala unui ampermetru de*** $n_1 = 10{,}0$ ***ori, o altă rezistenţă şunt măreşte de*** $n_2 = 20{,}0$ ***ori. De câte ori măresc (amplifică) scala cele două rezistenţe legate în serie, respectiv în paralel şi montate ca şunt ?***

Rezolvare. Aplicăm *formula şuntului* la ampermetru :

$$R_s = R_A : (n - 1) \quad \text{sau} \quad 1 : R_s = (n - 1) : R_A\ . \quad (1)$$

În primul caz avem :

$$R_s = R_A : (n_s - 1) = R_{s1} + R_{s2} = R_A : (n_1 - 1) + R_A : (n_2 - 1)$$

$$\rightarrow \quad n_s = (n_1 n_2 - 1) : (n_1 + n_2 - 2) = 7{,}1\ . \quad (2)$$

În al doilea caz avem : $\quad 1 : R_p = (n_p - 1) : R_A =$

$$= 1 : R_{s1} + 1 : R_{s2} = (n_1 - 1) : R_A + (n_2 - 1) : R_A$$

$$\rightarrow \quad n_p = n_1 + n_2 - 1 = 29\ . \quad (3)$$

2.1.59. ***Un voltmetru are scala pentru*** $U = 100$ V ***şi rezistenţa proprie*** $R_V = 10$ kΩ ***. Ce tensiune maximă se poate măsura dacă legăm o rezistenţă adiţională*** $R_{ad} = 90$ kΩ ***?***

Rezolvare. $R_{ad} = R_V(n - 1) = R_V(U'/U - 1)$

$$\rightarrow \quad U' = U(1 + R_{ad}/R_V) = 1000\ \text{V}\ .$$

2.1.60. ***Un aparat de măsură are scala cu*** $N = 100$ ***diviziuni, valoarea unei diviziuni fiind*** $\alpha = 5{,}0$ μA/div ***şi rezistenţa proprie*** $r = 5{,}0\ \Omega$ ***. Cum din acest aparat putem face un miliam-***

permetru pentru curenţi până la I = 0,50 A, *respectiv un voltmetru pentru tensiuni până la* U = 10,0 V *?*

Rezolvare. a) $I_A = \alpha N$ = 0,50 mA faţă de I = 0,50 A , deci punem o rezistenţă *şunt* :

$$R_s = r : (n - 1) = r : (I / I_A - 1) = 5{,}0 \text{ m}\Omega . \quad (1)$$

b) Tensiunea pe care o poate suporta direct aparatul :

$U_A = rI_A = r(N\alpha)$ = 2,50 mV faţă de U = 10,0 V , deci punem o rezistenţă *adiţională* :

$$R_{ad} = r(n - 1) = r[U / (rI_A) - 1] = 20 \text{ k}\Omega . \quad (2)$$

2.1.61. ***Un miliampermetru are scala cu*** N = 150 ***diviziuni, rezistenţa proprie*** r = 4,0 Ω ***şi măsoară curenţi până la*** I_A = 15,0 mA . ***Ce rezistenţă trebuie luată şi cum trebuie conectată pentru a măsura : a) Curenţi până la*** I = 0,30 A , ***b) Tensiuni până la*** U = 15 V *? c) Care va fi valoarea unei diviziuni ?*

Rezolvare. a) Rezistenţa *şunt* :

$$R_s = r : (I / I_A - 1) = 0{,}21 \ \Omega . \quad (1)$$

b) Rezistenţa adiţională :

$$R_{ad} = r [U : (rI_A) - 1] = 1{,}00 \text{ k}\Omega . \quad (2)$$

c) $\alpha_A = I_A : N$ = 0,10 mA/div , $\alpha = I : N$ = 2,0 mA/div ; (3)

$\beta = U : N$ = 0,10 V/div . (4)

2.1.62. ***Un ampermetru cu rezistenţa*** r , ***şuntat cu o rezistenţă*** R_s ***şi conectat cu o rezistenţă adiţională*** R_{ad} , ***este folosit ca voltmetru, valoarea unei diviziuni fiind*** β = 1,0 V/div . ***Ce rezistenţă adiţională suplimentară trebuie conectată pentru ca valoarea unei diviziuni să fie*** β' = 10 V/div *?*

Rezolvare. Observăm că valoarea unei diviziuni este :

$$\beta = U / N , \quad \beta' = U' / N , \quad \beta' / \beta = U' / U = n . \quad (1)$$

Aplicăm formula rezistenţei *adiţionale* la voltmetru :

$$R_{ad} = R_V(n - 1) = [R_{ad} + rR_s : (r + R_s)](\beta' : \beta - 1) . \quad (2)$$

2.1.63. ***Dacă şuntăm un ampermetru cu*** R_{s1} = 100 Ω, ***scala întreagă corespunde la curentul principal*** I_1 = 3,00 A. ***Dacă conectăm o rezistenţă adiţională*** R_{ad} = 300 Ω ***fără şunt, valoarea unei diviziuni creşte de*** n = 4,0 ori ***faţă de ampermetrul luat singur . Ce şunt trebuie luat pentru ca scala întreagă să corespundă la curentul principal*** I_2 = 7,5 A *?*

Rezolvare. Aplicăm formula *bifurcaţiei* curentului (v. *Breviar*):

$$I_A = I_1 \cdot R_{s1} : (R_{s1} + r) = I_2 \cdot R_{s2} : (R_{s2} + r) . \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem pentru *tensiuni* :

$$U_A = r\, I_A , \quad U_A' = (r + R_{ad})\, I_A = n\, U_A . \quad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$\text{din (1) :} \quad (I_1 / I_2)(1 + r / R_{s2}) = 1 + r / R_{s1} , \quad (3)$$

$$\text{din (2) :} \quad r + R_{ad} = n\, r \rightarrow r = R_{ad} : (n - 1) , \quad (4)$$

care introdus în (3) dă R_{s2} :

$$1 + R_{ad} : [(n - 1) R_{s2}] = (I_2 / I_1)\{1 + R_{ad} : [(n - 1) R_{s2}]\} ,$$

$$R_{s2} = \frac{R_{ad}}{(n-1)\left[\frac{I_2}{I_1}\left(1+\frac{R_{ad}}{(n-1)R_{s1}}\right)-1\right]} = 25\ \Omega . \quad (5)$$

2.1.64. ***Rezistenţa*** R ***este măsurată cu montajul din figură în care se citesc*** I , U ***şi se calculează*** $R_m = U / I$ ***. a) Considerând că voltmetrul are rezistenţă finită*** $R_V \gg R$, ***evaluaţi eroarea comisă considerându-l ideal în montajul (a). b) Considerând că ampermetrul are rezistenţă nenulă*** $R_A \ll R$, ***evaluaţi eroarea comisă considerându-l ideal în montajul (b).***

Rezolvare. a) Valoarea reală a rezistenţei :

$$R = U : (I - I_V) = U : (I - U / R_V) . \quad (1)$$

Eroarea *absolută* : $R - R_m = (U / I)\{1 : [1 - U / (R_V I)] - 1\} =$

$$= (U / I) \cdot U : (R_V I - U) . \quad (2)$$

Considerând $R_V \gg R \approx U / I \rightarrow R_V I \gg U$, avem

$$R - R_m \approx U^2 : (R_V I)^2 = R_m^2 : R_V . \quad (3)$$

Eroarea *relativă* :

$(R - R_m) : R \approx (R - R_m) : R_m \approx U : (R_V I) = R_m : R_V$, (4) care va fi cu atât mai mică cu cât $R_V \gg R_m$.

b) Valoarea reală a rezistenţei : $R = (U - R_A I) : I$. (5)

Eroarea absolută şi cea relativă : $R - R_m = - R_A$,

$$(R - R_m) : R \approx (R - R_m) : R_m = - R_A : R_m = - R_A I : U , \quad (6)$$

care va fi cu atât mai mică cu cât $R_A \ll R_m$.

Valoarea reală R a rezistenţei se exprimă prin cea măsurată R_m ($= U / I$) , în cele două variante de măsură, prin formulele :

$$R = R_m^{(a)} : (1 - R_m^{(a)} / R_V) \approx R_m^{(a)} (1 + R_m^{(a)} / R_V) , \quad (7)$$

$$R = R_m^{(b)} (1 - R_A / R_m^{(b)}) . \quad (8)$$

În general , R_V este de ordinul kiloohmilor , iar R_A de ordinul ohmilor . Pentru rezistenţe mici vom folosi varianta (a), iar pentru rezistenţe mari vom folosi varianta (b), aşa cum ne arată formulele (7), (8) .

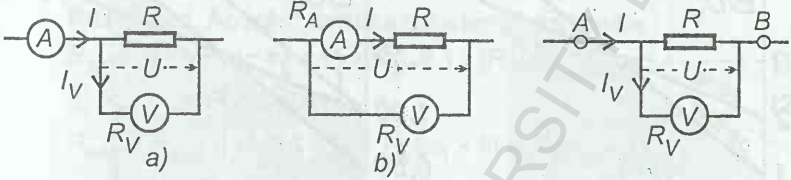


Fig.2.1.64 Fig.2.1.65

2.1.65. ***Ce rezistenţă*** R_V ***trebuie să aibă un voltmetru pentru a măsura cu o precizie*** $p = 1{,}0$ % ***tensiunea de pe rezistorul*** $R = 1{,}00$ kΩ ***, dacă între punctele*** A , B ***trece un curent practic constant ?***

Rezolvare. Valoarea măsurată şi valoarea reală a rezistenţei sunt : $R_m = U / I$,

$$R = U : (I - I_V) = U : (I - U / R_V) = R_m : (1 - R_m / R_V) , \quad (1)$$

de unde $$R_m = R : (1 + R / R_V) . \quad (2)$$

Eroarea relativă este : $p = (R - R_m) : R = 1 - 1 : (1 + R / R_V)$

$$\rightarrow R_V = R (1 - p) : p = 99 \text{ k}\Omega , \quad (R_V \approx R / p). \quad (3)$$

2.1.66. ***Pentru a măsura t.e.m.*** E ***şi rezistenţa internă*** r ***ale unei baterii, s-au montat două voltmetre identice o dată în serie şi apoi în paralel. Indicaţiile respective au fost*** $U_{s,p}$***. Aflaţi*** E ***şi*** r. ***Reprezentaţi în diagrama*** (E / U_V , r / R_V) ***regiunea valorilor*** E ***şi*** r ***determinabile, unde*** U_V ***este tensiunea maximă măsurabilă cu un voltmetru, iar*** R_V ***rezistenţa voltmetrului .***

Rezolvare. Tensiunile arătate de voltmetre în cele două cazuri sunt : $U_s = R_V I_s = R_V \cdot E : (r + 2R_V)$,

$$U_p = (R_V / 2) I_p = (1/2) R_V \cdot E : (1 + R_V / 2) . \quad (1)$$

Din aceste două ecuaţii rezultă :

$$r = R_V(2U_s - U_p) : (2U_p - U_s) , \qquad E = 3U_sU_p : (2U_p - U_s). \quad (2)$$

Dacă U_V este tensiunea *maximă* măsurabilă cu un voltmetru, atunci avem *restricţiile* :

$U_s \le U_V$, dar $E / U_s = 2 + r / R_V \rightarrow E / U_V \le 2 + r / R_V$, (3)

$U_p \le U_V$, dar $E / U_p = 1 + 2r / R_V \rightarrow E / U_V \le 1 + 2r / R_V$. (4)

Cele două inecuaţii (3), (4) sunt reprezentate în figură , unde regiunea haşurată reprezintă perechile (r , E) măsurabile prin metoda celor două voltmetre din enunţ .

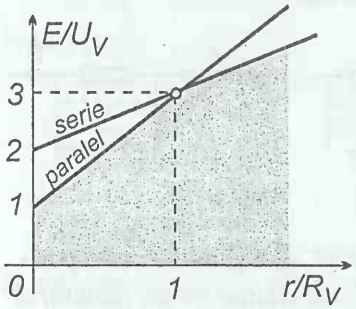


Fig.2.1.66

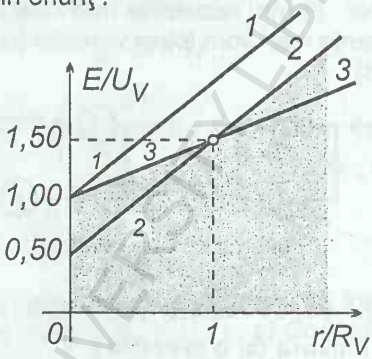


Fig.2.1.67

2.1.67. ***Se dau două baterii identice cu*** E ***şi*** r ***necunoscute şi un voltmetru cu rezistenţa*** R_V ***şi domeniul de măsură*** U_V ***. Care montaje de măsură trebuie folosite pentru a acoperi*** E ***şi*** r ***cât mai mari ? Reprezentaţi regiunile valorilor*** E , r ***măsurabile în diagrama*** (E / U_V , r / R_V) .

Rezolvare. Sunt posibile trei scheme : a) o singură baterie , b) bateriile în serie, c) bateriile în paralel .

a) $U_1 = R_V I_V = R_V \cdot E : (r + R_V) < U_V \rightarrow$

$E / U_V < 1 + r / R_V$. (1)

b) $U_2 = R_V I_V' = R_V \cdot 2E : (2r + R_V) < U_V \rightarrow$

$E / U_V < 1/2 + r / R_V$. (2)

c) $U_3 = R_V I_V'' = R_V \cdot E : (R / 2 + R_V) < U_V \rightarrow$

$E / U_V < 1 + r / (2R_V)$. (3)

Pentru a afla două necunoscute E şi r ne trebuie două din cele trei ecuaţii de mai sus .

Cele trei inecuaţii sunt reprezentate în figură. Se vede că pentru $r / R_V < 1$, domeniul cel mai larg de măsură este acoperit de alegerea schemelor (a) şi (c), atunci din (1) şi (3) rezultă :

$E = U_1 U_3 : (2U_1 - U_3)$, $r = R \cdot 2(U_3 - U_1) : (2U_1 - U_3)$. (4)

Pentru $r / R_V > 1$, domeniul cel mai larg de măsură este acoperit de alegerea schemelor (a) şi (b), atunci din (1) şi (2) rezultă :

$$E = U_1U_2 : [2(U_2 - U_1)] , \quad r = R \cdot (2U_1 - U_2) : [2(U_2 - U_1)] . \qquad (5)$$

2.1.68. ***O rezistenţă adiţională montată la un voltmetru amplifică scala acestuia de*** $n_1 = 10{,}0$ ori. ***O altă rezistenţă adiţională amplifică scala de*** $n_2 = 20{,}0$ ori. ***De câte ori va amplifica scala voltmetrului o rezistenţă adiţională constituită prin legarea a) în serie, respectiv b) în paralel a celor două rezistenţe adiţionale iniţiale ?***

Rezolvare. Aplicăm formula rezistenţei adiţionale :

$$R_{ad} = R_V(n - 1) \quad \text{sau} \quad 1 : R_{ad} = 1 : [R_V(n - 1)] . \qquad (1)$$

$$\text{a) } R_{ad\,1,2} = R_V(n_{1,2} - 1) , \qquad (2)$$

$$R_{ad1} + R_{ad2} = R_V(n_s - 1) = R_V(n_1 - 1) + R_V(n_2 - 1) ,$$

$$n_s = n_1 + n_2 - 1 = 19{,}0 . \qquad (3)$$

$$\text{b) } 1 : R_{ad1} + 1 : R_{ad2} = 1 : [R_V(n_p - 1)] = 1 : [R_V(n_1 - 1)] +$$

$$+1 : [R_V(n_2 - 1)], \quad n_p = (n_1n_2 - 1) : (n_1 + n_2 - 2) = 7{,}11 . \qquad (4)$$

2.1.69. ***Pentru a determina rezistenţa unui ampermetru acesta a fost legat în serie cu un reostat şi i s-a aplicat sistemului o anumită tensiune . Şuntând ampermetrul cu o rezistenţă*** $R_s = 1{,}00\ \Omega$ ***, pentru a obţine aceeaşi deviaţie a acului, rezistenţa reostatului trebuie micşorată de*** $n = 4{,}0$ ori . ***Aflaţi rezistenţa ampermetrului .***

Rezolvare. Curentul prin ampermetru trebuie să fie *acelaşi* în cele două cazuri : $I_A = U : (R + r) =$

$$= \{U : [R / n + rR_s / (r + R_s)]\} \cdot R_s / (r + R_s) , \qquad (1)$$

$$r = R_s(n - 1) = 3{,}00\ \Omega . \qquad (2)$$

2.1.70. ***Stabiliţi formulele de transformare a unui montaj*** **triunghi** ***într-un montaj*** **stea** ***echivalent .***

Rezolvare. Pentru ca montajele să fie **echivalente** trebuie ca diferenţele de potenţial între punctele A, B, C să fie *aceleaşi* în cele două montaje sau rezistenţele echivalente între aceste puncte să fie *aceleaşi* :

$$R_{AB} = R_3(R_1 + R_2) : (R_1 + R_2 + R_3) = r_1 + r_2 , \qquad (1)$$

$$R_{BC} = R_1(R_2 + R_3) : (R_1 + R_2 + R_3) = r_2 + r_3 , \qquad (2)$$

$$R_{CA} = R_2(R_3 + R_1) : (R_1 + R_2 + R_3) = r_3 + r_1 , \qquad (3)$$

ecuaţiile se obţin, dealtfel, una din alta prin *permutări circulare* . Sistemul fiind *simetric* , adunăm ecuaţiile membru cu membru :

$$(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) : (R_1 + R_2 + R_3) = r_1 + r_2 + r_3, \quad (4)$$

Scăzând din această ecuaţie, pe rând, ecuaţiile (1),(2),(3),obţinem:

$$r_1 = R_2R_3 : (R_1 + R_2 + R_3)\,, \quad r_2 = R_3R_1 : (R_1 + R_2 + R_3)\,,$$

$$r_3 = R_1R_2 : (R_1 + R_2 + R_3)\,, \quad (5)$$

care, de asemenea, se obţin una din alta prin *permutări circulare* .

Dacă înmulţim fiecare din ultimele relaţii , respectiv cu $R_{1,2,3}$, obţinem: $r_1R_1 = r_2R_2 = r_3R_3 = R_1R_2R_3 : (R_1 + R_2 + R_3)$. (6)

Tot din formulele (5) obţinem :

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = R_1R_2R_3 : (R_1 + R_2 + R_3)\,. \quad (7)$$

Acum din (6) şi (7) rezultă imediat formulele *inverse* :

$$R_1 = (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) : r_1 = r_2 + r_3 + r_2r_3 : r_1\,,$$

$$R_2 = (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) : r_2 = r_1 + r_3 + r_1r_3 : r_2\,, \quad (8)$$

$$R_3 = (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) : r_3 = r_1 + r_2 + r_1r_2 : r_3\,,$$

care, de asemenea, se obţin una din alta prin *permutări circulare*.

Dacă folosim **conductanţele** $G = 1 : R$, $g = 1 : r$, găsim :

$$g_1 = (G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_1) : G_1 = G_2 + G_3 + G_2G_3 : G_1 \text{ etc.} \quad (9)$$

$$G_1 = g_2g_3 : (g_1 + g_2 + g_3) \text{ etc.} \quad (10)$$

Observaţi "reciprocitatea" acestor formule cu (8) , (5).

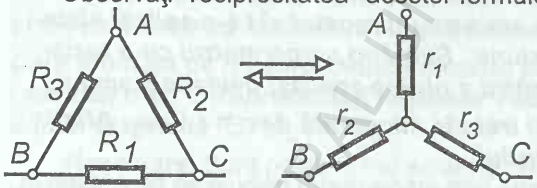


Fig.2.1.70

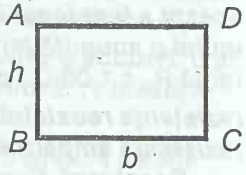


Fig.2.1.71

2.1.71. ***Un cadru dreptunghiular, construit dintr-o sârmă, are laturile*** b , h . ***Aflaţi raportul rezistenţelor măsurate între punctele*** A, B (R_h) ***şi punctele*** B, C (R_b) .

Rezolvare. $R_h = R_{AB}(R_{AD} + R_{DC} + R_{CB})$:

$$: (R_{AB} + R_{AD} + R_{DC} + R_{CB}) = R_{AB} \cdot (2b + h) : [2(b + h)]\,. \quad (1)$$

$$R_b = R_{BC}(R_{BA} + R_{AD} + R_{DC}) : (R_{BC} + R_{BA} + R_{AD} + R_{DC}) =$$

$$= R_{BC} \cdot (2h + b) : [2(b + h)]\,. \quad (2)$$

$$R_h : R_b = (R_{AB} : R_{BC}) \cdot (2b + h) : (2h + b) =$$

$$= h(2b + h) : [b(2h + b)]\,. \quad (3)$$

2.1.72. ***La sfârşitul încărcării unui acumulator , la un curent de încărcare*** $I_1 = 2{,}0$ A ***tensiunea la bornele acumulatorului era*** $U_1 = 12{,}2$ V . ***Folosindu-l după aceea la alimentarea***

unui aparat, la un curent $I_2 = 3{,}0$ A ***, tensiunea la bornele acumulatorului este*** $U_2 = 11{,}7$ V ***. Aflaţi t.e.m. şi rezistenţa internă ale acumulatorului.***

Rezolvare. În regim de *încărcare* acumulatorul este un **consumator** şi curentul prin el este de sens *invers* tensiunii electromotoare, astfel încât : $U_1 = E + r I_1$. (1)

În regim de *descărcare*, când acumulatorul debitează energie în circuitul exterior, avem : $U_2 = E - r I_2$. (2)

Din aceste ecuaţii rezultă :

$E = (U_1 I_2 + U_2 I_1) : (I_1 + I_2) = 12{,}0$ V,

$r = (U_1 - U_2) : (I_1 + I_2) = 0{,}10\ \Omega$. (3)

(*) **2.1.73.** ***Mai multe baterii diferite cu t.e.m.*** E_i ***şi rezistenţele interne*** r_i , i = 1, ··· , ***sunt conectate în serie şi debitează pe un rezistor*** R. ***Aflaţi curentul debitat. Pentru ce valoare a rezistenţei*** R ***a consumatorului, puterea*** utilă ***debitată acestuia va fi maximă şi cu ce randament ? Arătaţi că în acest caz curentul este jumătate din curentul de scurt-circuit, iar puterea utilă maximă este un sfert din puterea la scurt-circuit.***

Rezolvare. $I = \Sigma E_i : (\Sigma r_k + R)$,

$P_u = R I^2 = R [\Sigma E_i : (\Sigma r_k + R)]^2 = f(R)$. (1)

Puterea *utilă* debitată este funcţie de rezistenţa consumatorului R . *Condiţia de* ***extremum este anularea derivatei*** :

$f'(R) = [\Sigma E_i : (\Sigma r_k + R)]^2 + R \cdot 2[\Sigma E_i : (\Sigma r_k + R)][- \Sigma E_i : (\Sigma r_k + R)^2] =$

$= [(\Sigma E_i)^2 : (\Sigma r_k + R)^3] (\Sigma r_k - R) = 0$, de unde $R = \Sigma r_k$. (2)

Natura extremului este dată de *semnul* derivatei a *doua* :

$f''(R) = [(\Sigma E_i)^2 : (\Sigma r_k + R)^4] (3R - 4 \Sigma r_k)$. (3)

Pentru rădăcina (2) a primei derivate, derivata a doua (3) este *negativă*, deci avem un **maxim** al puterii *utile* .

Teorema adaptării (sau *optimizării*) : *Puterea utilă este* ***maximă*** *când rezistenţa consumatorului este egală cu suma rezistenţelor interne ale generatoarelor legate în* ***serie*** : $R = \Sigma r_k$.

Rezultatul se obţine imediat şi fără derivate, dacă scriem astfel : $P_u = \left[\sum E_i : \left(\frac{1}{\sqrt{R}} \sum r_k + \sqrt{R}\right)\right]^2$. (4)

La numitor avem o sumă de doi termeni al căror produs este *constant*, atunci suma este *minimă* când termenii sunt *egali* :

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \sum r_k = \sqrt{R} , \quad R = \sum r_k . \tag{5}$$

Numitorul fiind minim , fracţia, deci puterea utilă, va fi *maximă* :

$$P_{u\,max} = (1/4)\,(\Sigma E_i)^2 : \Sigma\, r_k . \tag{6}$$

La *scurt-circuit* , $R = 0$, curentul şi puterea *totală* vor fi :

$$I_{sc} = \Sigma E_i : \Sigma\, r_k , \qquad P_{sc} = (\Sigma\, r_k) I_{sc}^2 = (\Sigma E_i)^2 : \Sigma\, r_k , \tag{7}$$

deci

$$P_{u\,max} = (1/4)\, P_{sc} . \tag{8}$$

În cazul adaptării :

$$I_{ad} = (1/2)\, \Sigma E_i : \Sigma\, r_k = (1/2)\, I_{sc} . \tag{9}$$

Randamentul în cazul adaptării :

$$\eta_{ad} = R_{ad} : (\Sigma\, r_k + R_{ad}) = 1/2 = 50\ \% . \tag{10}$$

(*) 2.1.74. ***Mai multe baterii diferite cu t.e.m.*** E_i ***şi rezistenţele interne*** r_i ***, sunt conectate în paralel şi debitează pe un rezistor*** R ***. Aflaţi : a) curentul debitat, tensiunea la bornele rezistorului*** R ***şi curenţii prin baterii , b) cât devine tensiunea la bornele sistemului de baterii după deconectarea rezistorului*** R***?, c) puterea la scurt-circuit , d) puterea utilă maximă , e) demonstraţi relaţiile :*** $P_{u\,max} \le (1/4) P_{sc}$ ***, la adaptare*** $P_{tot\,ad} = P_{sc} - 2P_{u\,max} \ge 2P_{u\,max}$, $\eta_{ad} \le 0{,}50$ ***, semnul egal se obţine în cazul când t.e.m.*** E_i ***sunt egale între ele .***

Rezolvare. a) $I = \Sigma\, I_k$, $\qquad E_k = R I + r_k I_k$, (1)

de unde rezultă :

$$I = \Sigma(E_k / r_k) : [1 + R\, \Sigma(1/r_i)] =$$

$$= \Sigma(E_k g_k) : [1 + (1/G)\Sigma g_i) , \tag{2}$$

unde

$$g_k = 1 / r_k , \quad G = 1 / R \tag{3}$$

sunt ***conductanţele*** respective (în unităţile : $1\ \Omega^{-1} = 1$ S) .

Tensiunea la bornele sistemului de baterii : $U = R I =$

$= \Sigma(E_k / r_k) : [1/R + \Sigma(1/r_i)] = \Sigma(E_k g_k) : (G + \Sigma g_i)$ (4) şi **curenţii** prin ramuri (prin baterii) :

$$I_k = (E_k - U) : r_k , \quad k = 1, ..., \ U \text{ fiind (4)} . \tag{5}$$

b) Dacă deconectăm consumatorul R (asta înseamnă $R \to \infty$):

$$U_o = \Sigma(E_k / r_k) : \Sigma(1/r_i) = \Sigma(E_k g_k) : \Sigma g_i . \tag{6}$$

c) La **scurt-circuit** , $R = 0$, curenţii şi puterea sunt :

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$I_{k\,sc} = E_k / r_k$, $I_{sc} = \Sigma(E_k / r_k) = \Sigma(E_k g_k)$,

$P_{sc} = \Sigma(E_k^2 / r_k) = \Sigma(E_k^2 g_k)$. (7)

d) **Puterea utilă** debitată : $P_u = RI^2 =$

$= R[\Sigma(E_k / r_k)]^2 : [1 + R\Sigma(1 / r_i)]^2 = f(R)$. (8)

Condiţia de extremum este anularea ***derivatei*** :

$f'(R) = [1 - R\Sigma(1/r_i)]\,[\Sigma(E_k / r_k)]^2 : [1 + R\Sigma(1/r_i)]^3 = 0$, (9)

de unde $1/R = \Sigma(1/r_i)$ sau $G = \Sigma g_i$. (10)

Natura extremului rezultă din semnul derivatei a doua :

$f''(R) = \Sigma(E_i g_i)^2[2R(\Sigma g_k)^2 - 4\Sigma g_i] : [1 + R\Sigma g_k]^4$, (11)

care pentru rădăcina (10) este negativă, deci puterea utilă are un **maxim** .

Teorema adaptării (sau *optimizării*) . *Puterea utilă este* ***maximă*** *când conductanţa consumatorului este egală cu suma conductanţelor generatoarelor legate în* ***paralel*** : $G = \Sigma g_i$.

Rezultatul se obţine imediat şi fără derivate dacă scriem astfel :

$$P_u = \left(\sum \frac{E_k}{r_k}\right)^2 : \left[\frac{1}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\sum \frac{1}{r_i}\right]^2 . \quad (12)$$

La numitor avem suma a doi termeni al căror *produs* este *constant*. de aceea suma este *minimă* când termenii sunt *egali* :

$$\frac{1}{\sqrt{R}} = \sqrt{R}\sum \frac{1}{r_i} , \quad \text{de unde} \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r_i} .$$

Numitorul fiind *minim*, fracţia, deci puterea utilă, va fi *maximă* :

$P_{u\,max} = (1/4)\,[\Sigma(E_k / r_k)]^2 : \Sigma(1/r_i) = (1/4)[\Sigma(E_k g_k)]^2 : \Sigma g_i$ (13)

e) Curentul de **scurt-circuit** ($R = 0$) :

$I_{sc} = \Sigma(E_k / r_k)$, $I_{ad} = (1/2)\,\Sigma(E_k / r_k) = (1/2)\,I_{sc}$. (14)

Vom folosi inegalitatea : $(\Sigma x_i^2)(\Sigma y_k^2) \geq (\Sigma x_i y_i)^2$ (15)

(semnul = are loc când "vectorii" sunt *proporţionali*: $x_k = \text{const} \cdot y_k$), în care vom alege $x_k = \sqrt{g_k}$, $y_k = E_k\sqrt{g_k}$, atunci

$$(\Sigma g_i)\,\Sigma(E_k^2 g_k) \geq \left[\sum\left(\sqrt{g_k} \cdot E_k\sqrt{g_k}\right)\right]^2 = [\Sigma(E_k g_k)]^2 \quad (16)$$

(semnul = are loc când t.e.m. sunt egale între ele) sau

$P_{u\,max} = (1/4)\,[\Sigma(E_k g_k)]^2 : \Sigma g_i \leq (1/4)\,P_{sc} = (1/4)\,\Sigma(E_k^2 g_k)$. (17)

ROMANIAN PHYSICS LIBRARY

Avem , de asemenea, $U_{ad} = (1/2)\,[\Sigma(E_k g_k)] : \Sigma g_i$,

$$I_{k\,ad} = g_k\{E_k - (1/2)\,[\Sigma(E_i g_i)] : \Sigma g_s\}\,, \tag{18}$$

$$P_{tot\,ad} = \Sigma(E_k I_{k\,ad}) = \Sigma(E_k^2 g_k) - (1/2)\,[\Sigma(E_i g_i)]^2 : \Sigma g_s =$$

$$= P_{sc} - 2P_{u\,max}\,, \tag{19}$$

dar din (17) avem : $P_{sc} \geq 4P_{u\,max}$ sau $P_{u\,max} \leq (1/4)P_{sc}$,

deci $P_{tot\,ad} \geq 2P_{u\,max}$, $P_{u\,max} \leq (1/2)P_{tot\,ad}$, (20)

deci $\eta_{ad} = P_{u\,max} : P_{tot\,ad} \leq 1/2 = 50\ \%$, (21)

semnul = se obţine dacă t.e.m. sunt egale între ele .

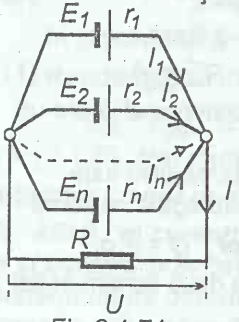


Fig.2.1.74

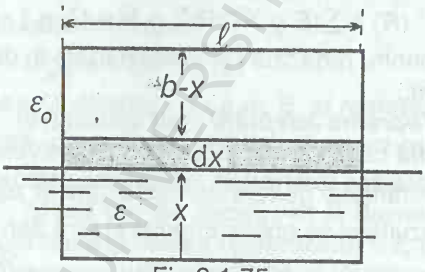


Fig.2.1.75

* **2.1.75.** ***Un condensator plan-paralel cu distanţa dintre armături*** d ***, supus la o tensiune constantă*** U ***, este cufundat cu viteza*** v ***, vertical , cu latura*** ℓ ***, într-un lichid dielectric cu permitivitatea*** ε ***. Aflaţi intensitatea curentului electric care trece prin condensator .***

Rezolvare. Capacitatea condensatorului parţial cufundat , la un moment dat, este (sunt două condensatoare în paralel ; neglijăm ***efectele de margine***): $C(x) = \varepsilon \ell x : d + \varepsilon_o \ell (b - x) : d$. (1)

Sarcina pe condensator :

$$q(x) = UC(x) = (U\ell / d)\,[\varepsilon x + \varepsilon_o (b - x)]\,. \tag{2}$$

Curentul care va trece prin condensator : $i = dq / dt =$

$$= (dq / dx)(dx / dt) = (dq / dx) \cdot v = (U\ell / d)(\varepsilon - \varepsilon_o)\, v =$$

$$= (U\ell / d)\, \varepsilon_o (\varepsilon_r - 1)\, v\,. \tag{3}$$

(* *) **2.1.76.** ***Pe o bară conductoare omogenă şi uniformă de rezistenţă*** R ***cade perpendicular un fascicul de electroni, uniform de-a lungul barei . Cunoscând curentul*** I ***, aflaţi căderea de potenţial între centrul şi un capăt al barei .***

PUBLIC DOMAIN UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. Curentul va curge de la centrul O spre A-C , respectiv de la centrul O spre B-C şi va creşte ***liniar*** de la zero la $\ell/2$, deoarece în conductor intră uniform, noi şi noi purtători, când ne deplasăm de la O la A (respectiv, de la O la B) .

Să considerăm un ***element*** de conductor de rezistenţă dr prin care trece un curent i . Atunci căderea de potenţial pe acest element va fi $i\,dr = dU$, căderile de potenţial se compun de la O la A fiind circuit *serie*, deci

$$U = \int_0^{R/2} i\,dr = \int_0^{R/2} \frac{I}{2}\frac{r}{R/2}\,dr = \frac{I}{R}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{R/2} = \frac{RI}{8}\,. \qquad (1)$$

Se poate judeca şi elementar cu ajutorul valorilor *medii* :

$$U = (R/2)\,\langle i\rangle = (R/2)\cdot(1/2)\,(I/2) = RI/8\,, \qquad (2)$$

unde, conform graficului , i creşte ***liniar*** de la zero la $I/2$, deci valoarea sa *medie* este media *aritmetică* $(0 + I/2) : 2 = I/4$.

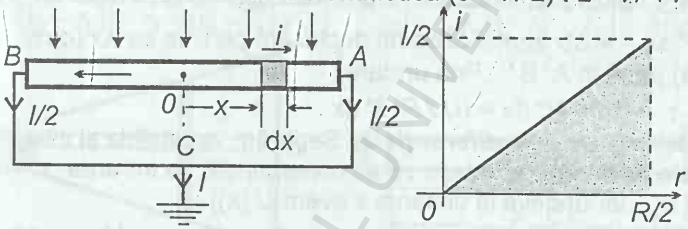


Fig.2.1.76

* * **2.1.77.** ***O linie bifilară are rezistenţa*** r* [Ω/m] ***pe unitatea de lungime şi din cauza izolaţiei imperfecte are o conductanţă*** G* [S/m] ***între fire pe unitatea de lungime (sau o rezistenţă*** $1/G^* = R^*$ [Ω · m] ***la unitatea de lungime) . Considerând linia foarte lungă , aflaţi rezistenţa echivalentă la bornele de intrare şi distanţa la care tensiunea şi curentul se reduc la jumătate.***

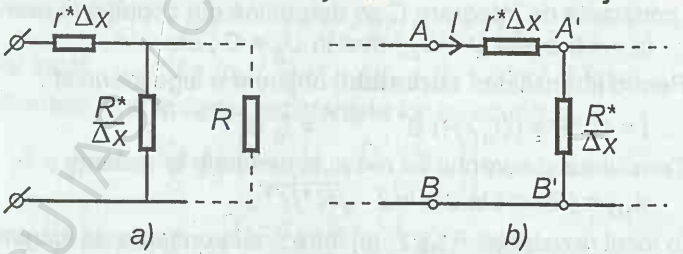


Fig.2.1.77

Rezolvare. Să împărţim linia în celule de lungime foarte mică Δx , ca în figură . La legarea în paralel a n rezistenţe identice R ,

rezistenţa echivalentă este R / n . În cazul nostru pe unitatea de lungime revin $1/\Delta x$ rezistenţe identice, deci fiecare rezistenţă care revine celulei trebuie să fie $R^* / \Delta x$. Dacă adăugăm în faţa liniei încă o celulă , rezistenţa totală a liniei nu se schimbă , linia fiind foarte *lungă* , şi deci o celulă *infinitezimală* în plus sau în minus n-are nici o importanţă (bineînţeles vom face trecerea la limită corespunzătoare şi toate relaţiile vor fi riguroase) :

$$r^*\Delta x + (R \cdot R^*/\Delta x) : (R + R^*/\Delta x) = R$$

sau $$R^2 - r^*\Delta x \cdot R - r^* R^* = 0 , \qquad (1)$$

de unde $$R = \frac{1}{2} r^* \Delta x \pm \sqrt{\frac{1}{4} r^{*2} \Delta x^2 + r^* R^*} . \qquad (2)$$

Trecând la limita $\Delta x \to 0$, obţinem : $R = \sqrt{r^* R^*}$, (3)
ceea ce se poate obţine şi direct prin trecere la limită în (1).

Să considerăm undeva pe linie, la distanţa x de la bornele de intrare o celulă elementară . Tensiunea $U_{AB} = U(x)$ scade cu $I(x) r^* \Delta x = -\Delta U$ atunci când ne deplasăm pe linie cu Δx (cu o celulă) până în A'B' . Prin urmare,

$$-dU = I r^* dx = (U / R) r^* dx . \qquad (4)$$

Am obţinut o *ecuaţie* ***diferenţială*** . Separăm variabilele şi integrăm (limitele de integrare trebuie să se corespundă : la intrarea $x = 0$ avem U_o , iar undeva la distanţa x avem $U(x)$) :

$$\frac{dU}{U} = -\frac{r^*}{R} dx , \quad \int_{U_o}^{U} \frac{dU}{U} = -\int_0^x \frac{r^*}{R} dx \text{ sau } \ln \frac{U}{U_o} = -\frac{r^*}{R} x ,$$

$$U(x) = U_o e^{-r^* x / R} . \qquad (5)$$

Se poate integra şi *nedefinit* : $$\int \frac{dU}{U} = -\int \frac{r^*}{R} dx$$

sau $$\ln U = -(r^*/R) x + C ,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia la* ***margine*** : la $x = 0$ avem $U = U_o$, deci $\ln U_o = C$, etc .

Pentru intensitatea **curentului** obţinem o lege *identică* :

$$I = U / R = (U_o / R) e^{-r^* x / R} = I_o e^{-r^* x / R} . \qquad (6)$$

Tensiunea şi curentul se reduc la *jumătate* la distanţa :

$$x_{1/2} = (R / r^*) \ln 2 = \ln 2 \cdot \sqrt{R^* / r^*} . \qquad (7)$$

În locul rezistenţei R^* [$\Omega \cdot$ m] între fire la unitatea de lungime se poate folosi *conductanţa* $G^* = 1 / R^*$ [S/m] între fire pe unitatea de lungime .

** 2.1.78. ***Calculaţi rezistenţa electrică a unui pinion tronconic de raze* $r_{1,2}$ *, lungime* ℓ *şi rezistivitate* ρ *.*

Rezolvare. Conform figurii , ***elementul*** evidenţiat (haşurat) are rezistenţa electrică : $dR = \rho\, dx / S = \rho\, dx / (\pi r^2)$, (1)

unde evident $r = r_1 + [(r_2 - r_1) : \ell\,]\, x$, (2)

astfel încât $dR = r dx : \{\pi\,[r_1 + (r_2 - r_1)\, x : \ell\,]^2\}$. (3)

Elementele fiind în serie, rezistenţele lor se adună :

$$R = \int dR = \int_0^{\ell} \frac{\rho}{\pi}\, dx : [r_1 + (r_2 - r_1)\, x / \ell\,]^2 =$$

$$= \frac{\rho\ell}{\pi(r_2 - r_1)} \int [r_1 + (r_2 - r_1)\, x / \ell\,]^{-2} \cdot d[(r_2 - r_1)\, x / \ell\,] =$$

$$= \frac{\rho\ell}{\pi(r_2 - r_1)} \left[-\frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) x/\ell} \right]_0^{\ell} = \frac{\rho\ell}{\pi(r_2 - r_1)} \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{\rho\ell}{\pi r_1 r_2} \cdot \quad (4)$$

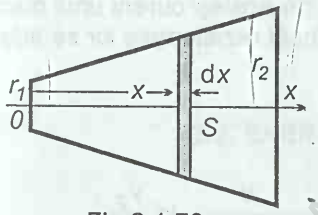


Fig.2.1.78

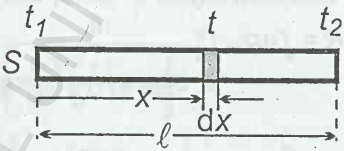


Fig.2.1.79

** 2.1.79. ***Temperatura unui conductor variază* liniar *de la un capăt la celălalt. Calculaţi rezistenţa acestui conductor ştiind rezistenţa sa* $R_{1,2}$ *la cele două temperaturi extreme.*

Rezolvare. Rezistenţa unui ***element*** de conductor este :

$$dR = \rho\, dx / S\,, \quad (1)$$

dar $\rho = \rho_o (1 + At)$, $t = t_1 + [(t_2 - t_1) / \ell\,]\, x$, (2)

astfel încât $dR = (\rho_o / S)\, \{1 + A[t_1 + (t_2 - t_1)\, x / \ell\,]\}\, dx$. (3)

Elementele fiind în *serie*, rezistenţele lor se adună :

$$R = \int dR = \frac{\rho_o}{S} \int_0^{\ell} \left[1 + A\left(t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\ell} x \right) \right] dx =$$

$$= \frac{\rho_o}{S} \left[\ell + At_1\ell + A\frac{t_2 - t_1}{\ell} \frac{\ell^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(R_1 + R_2 \right) . \quad (4)$$

** 2.1.80. ***Dielectricul dintre armăturile plan-paralele de arie* S *ale unui condensator, cu distanţa dintre armături* d *, nu este*

ideal, ci are o conductivitate care variază liniar ***de la*** γ_1 ***lângă o armătură , la*** γ_2 ***lângă cealaltă armătură . Calculaţi rezistenţa electrică între armăturile condensatorului .***

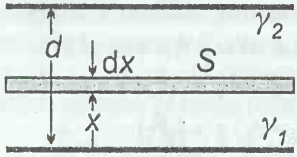


Fig.2.1.80

Rezolvare. Luăm un strat *infinitezimal*, paralel cu armături , de grosime infinit mică dx , situat la distanţa x de o armătură, ca în figură . Rezistenţa sa este $\ell : (\gamma S)$, unde ℓ este dx , deci

$$dR = dx : (\gamma S) . \qquad (1)$$

Dar γ variază ***liniar*** de la o armătură la cealaltă :

$$\gamma = \gamma_1 + [(\gamma_2 - \gamma_1) / d] x . \qquad (2)$$

Atunci $$dR = dx : \{ S [\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) x / d] \} . \qquad (3)$$

Straturile considerate sunt străbătute de *acelaşi* curent unul după altul, deci sunt legate în *serie*, astfel încât rezistenţele lor se adună:

$$R = \int dR = \int_0^d \frac{dx}{S\left[\gamma_1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{d} x\right]} =$$

$$= \frac{d}{S(\gamma_2 - \gamma_1)} \ln \left[\gamma_1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{d} x\right]_0^d = \frac{d}{S(\gamma_2 - \gamma_1)} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} . \qquad (4)$$

În particular, dacă conductivitatea dielectricului este *constantă*, trecând la limită $\gamma_2 \to \gamma_1$ şi aplicând *regula lui* ***L 'Hôspital,*** regăsim rezultatul simplu $R = d : (\gamma S)$.

*** * 2.1.81.** ***Un condensator plan-paralel are un dielectric de permitivitate*** ε ***, care însă nu este ideal. Încărcat fiind, condensatorul se descarcă până la o tensiune de*** r ori ***mai mică într-un timp*** τ ***. Calculaţi conductivitatea dielectricului.***

Rezolvare. Pe de o parte $i = u / R$, pe de altă parte :

$$i = dq / dt = d(Cu) / dt = C\, du / dt . \qquad (1)$$

Rezultă : $$i = u / R = - C\, du / dt , \qquad (2)$$

unde semnul minus provine din faptul că la noi sarcina condensatorului scade (el se descarcă), $dq < 0$.

Separăm variabilele şi integrăm : $du / u = - dt / (RC)$,

$$\int \frac{du}{u} = \ln u = -\int \frac{dt}{RC} = -\frac{t}{RC} + K,$$

unde constanta de integrare K se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $u = U_0$: $\ln U_0 = K$, deci $\ln(u / U_0) = -t / (RC)$,

$$u = U_0 e^{-t/(RC)} = U_0 e^{-t/\tau}, \qquad (3)$$

unde τ este ***constanta de timp***, care arată în cât timp tensiunea se micşorează de e ori. După aceeaşi lege scade şi sarcina $q = Cu$:

$$q = q_0 e^{-t/(RC)} = q_0 e^{-t/\tau}. \qquad (4)$$

Mai sus se putea integra şi *definit*. Limitele de integrare se corespund : la $t = 0$ avem $u = U_0$, iar la t oarecare avem u corespunzător :

$$\int_{U_0}^{u} \frac{du}{u} = \ln \frac{u}{U_0} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt = -\frac{t}{RC}, \quad \text{etc.}$$

În cazul nostru: $R = \rho d / S = d / (\gamma S)$, $C = \varepsilon S / d$, $\tau = RC = \varepsilon / \gamma$, (5)

prin urmare, $$u = U_0 e^{-\gamma t/\varepsilon} \qquad (6)$$

sau $$\ln(u/U_0) = -(\gamma/\varepsilon)t, \quad \gamma = (\varepsilon/t)\ln(U_0/u) = (\varepsilon/t)\ln r. \qquad (7)$$

2.2. ENERGIE ŞI PUTERE

2.2.1. ***Două becuri de putere nominală*** $P_1 = 40$ W ***şi*** $P_2 = 60$ W ***sunt conectate în serie la reţea . Care vor fi puterile lor în această situaţie ? (considerăm rezistenţele lor practic neschimbate). Dar dacă*** $P_1 = 15$ W ***şi*** $P_2 = 150$ W ***?***

Rezolvare. Rezistenţele nominale ale becurilor sunt :

$$R_{1,2} = U^2 : P_{1,2}. \qquad (1)$$

Legându-le în *serie* puterile vor fi : $P_1' = R_1 I^2 = R_1 U^2 : (R_1 + R_2) =$
$= 1 : [P_1(1/P_1 + 1/P_2)^2] = P_1[P_2 : (P_1 + P_2)]^2 = 40 \cdot 0{,}36$ W $= 14{,}4$ W,

$$P_2' = P_2[P_1 : (P_1 + P_2)]^2 = 60 \cdot 0{,}16 \text{ W} = 9{,}6 \text{ W}. \qquad (2)$$

În cazul celorlalte valori avem :

$$P_1' = 15 \cdot 0{,}83 = 12{,}4 \text{ W}, \quad P_2' = 150 \cdot 0{,}008 = 1{,}2 \text{ W}. \qquad (3)$$

Observaţi că becul *slab* arde aproape *normal*, iar cel puternic nu va lumina practic deloc (are rezistenţă mult mai mică decât celălalt).

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.2.2. ***O plită electrică are două rezistenţe care se pot conecta fiecare separat şi atunci puterea plitei este*** $P_1 = 400$ W , ***respectiv*** $P_2 = 800$ W ***sau se pot lega în serie sau în paralel. Aflaţi puterea plitei în ultimele două cazuri .***

Rezolvare. Pentru legarea în **paralel** avem evident :

$$P_p = P_1 + P_2 = 1200 \text{ W} . \quad (1)$$

Pentru legarea în **serie** avem : $P_s = U^2 : (R_1 + R_2) =$

$= U^2 : (U^2 / P_1 + U^2 / P_2) = P_1 P_2 : (P_1 + P_2) = 270$ W . (2)

2.2.3. ***Un fier de călcat de putere*** $P_1 = 600$ W ***şi un radiator de putere*** $P_2 = 1100$ W, ***ambele de tensiune nominală*** $U_n = 120$ V ***sunt legate în serie la tensiunea reţelei*** $U = 220$ V. ***Ce putere dezvoltă fiecare aparat ? Ce tensiune va fi la bornele fiecărui aparat ?***

Rezolvare. $P_1' = R_1 I^2 = (U_n^2 / P_1) \cdot U^2 : (R_1 + R_2)^2 =$

$= (U_n^2 / P_1) \cdot U^2 : [(1/P_1 + 1/P_2)^2 U_n^4] =$

$= P_1 [P_2 : (P_1 + P_2)]^2 (U / U_n)^2 = 844$ W , (1)

$P_2' = P_2 [P_1 : (P_1 + P_2)]^2 (U / U_n)^2 = 460$ W . (2)

Observaţi creşterea puterii consumate de fierul de călcat şi scăderea apreciabilă a puterii radiatorului.

$U_1' = R_1 \cdot U : (R_1 + R_2) = (U_n^2 / P_1) \cdot U : (U_n^2 / P_1 + U_n^2 / P_2) =$

$= U \cdot P_2 : (P_1 + P_2) = 142$ V, $U_2' = U \cdot P_1 : (P_1 + P_2) = 77$ V. (3)

Observaţi că consumatorul mai *slab* este *supra*tensionat, iar cel puternic - subtensionat (fiindcă se stabileşte un curent intermediar între cele două valori nominale).

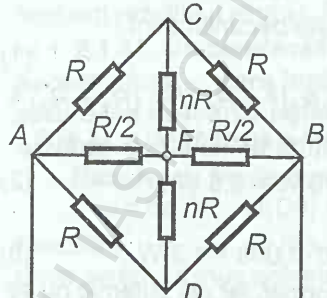


Fig.2.2.4

2.2.4. ***În montajul din figură se dau :*** $U = 100$ V , $R = 0{,}25$ kΩ. ***Aflaţi puterea dezvoltată pe laturi şi pe diagonale .***

Rezolvare. În virtutea *simetriei* punctele C , F , D sunt la *acelaşi* potenţial şi anume :

$U_{AC} = U_{CB} = U/2$, $U_{AF} = U_{FB} =$

$= U/2$, $U_{AD} = U_{DB} = U/2$. (1)

Atunci toate laturile sunt sub aceeaşi tensiune $U/2$: $P_{AC} = ...$

$= (1/R)(U/2)^2 = U^2/(4R) = 10$ W, (2)

$P_{CD} = 0$, $P_{AB} = U^2 : (R/2 + R/2) = U^2 / R = 40$ W . (3)

2.2.5. ***O baterie cu t.e.m.*** $E = 10{,}0$ V ***şi rezistenţa internă*** $r = 1{,}00\ \Omega$ ***dezvoltă pe un rezistor o putere*** $P = 9{,}0$ W ***. Aflaţi tensiunea la bornele bateriei .***

Rezolvare. $U = RI = R \cdot E : (r + R)$, dar $P = U^2 / R$, $R = U^2/P$,

$$U^2 - EU + rP = 0,\ U = \frac{1}{2}\left(E \pm \sqrt{E^2 - 4rP}\right) = 9{,}0 \text{ V şi } 1{,}00 \text{ V}. \quad (1)$$

La aceste tensiuni corespund rezistenţele :

$$R = U^2 : P = 9{,}0\ \Omega \text{ , resp. } 0{,}11\ \Omega . \quad (2)$$

Soluţia a doua este nepractică (*randament* foarte mic).

2.2.6. ***O baterie lucrează cu randamentul*** $\eta_1 = 90$ % ***, o a doua baterie lucrează cu randamentul*** $\eta_2 = 80$ % ***pe aceeaşi sarcină . Care va fi randamentul celor două baterii legate în serie şi debitând pe aceeaşi sarcină ?***

Rezolvare. $\eta_{1,2} = R : (r_{1,2} + R) = 1 : (1 + r_{1,2}/R) \rightarrow$

$$r_{1,2} / R = 1 / \eta_{1,2} - 1 ; \quad (1)$$

$$\eta = R : (r_1 + r_2 + R) = 1 : (r_1 / R + r_2 / R + 1) =$$

$$= 1 : (1/\eta_1 + 1/\eta_2 - 1) = \eta_1\eta_2 : (\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2) = 73\ \% . \quad (2)$$

2.2.7. ***Un acumulator cu t.e.m.*** $E = 12$ V ***este încărcat de la o sursă cu tensiunea*** $U = 18$ V ***printr-un bec care consumă în timpul încărcării o putere*** $P = 24$ W ***. Capacitatea acumulatorului*** $C = 40$ Ah *(amper-ore)*. ***În cât timp se încarcă acumulatorul ? Rezistenţa internă a acumulatorului este neglijabilă .***

Rezolvare. Tensiunea la bornele acumulatorului în timpul încărcării este $U_a = E + rI$, (1)

atunci $P = (U - U_a) I = (U - E - rI) I \approx (U - E) I \rightarrow$

$$I \cong P : (U - E) . \quad (2)$$

Timpul de încărcare : $t = C : I \cong C(U - E) : P = 10$ h . (3)

2.2.8. ***O baterie debitează o putere*** $P = 100$ W ***pe un rezistor*** $R = 2{,}00\ \Omega$ ***. Dacă în paralel pe*** R ***se montează un rezistor identic, atunci în cele două rezistoare se degajă în total*** aceeaşi ***putere. Aflaţi t.e.m. şi rezistenţa internă ale bateriei .***

Rezolvare. Egalăm puterile în cele două cazuri :

$$P = RI_1^2 = R\,[E : (r + R)]^2 =$$

$$= (R/2) I_2^2 = (R/2)\,[E : (r + R/2)]^2 \rightarrow$$

$$r = R/\sqrt{2} = 1{,}41\ \Omega\ ; \qquad (1)$$

$$E = (r + R)\sqrt{P/R} = \sqrt{PR}\ (1 + 1/\sqrt{2}\ ) = 24{,}1\ \text{V}\ . \qquad (2)$$

2.2.9. ***În montajul din figură se dau :*** $E = 120$ V, $r = 2{,}00\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 28\ \Omega$, $I = 2{,}00$ A. ***Aflaţi puterea*** P_1 ***dezvoltată în rezistorul*** R_1 .

Rezolvare. Avem succesiv : $P_1 = U_1 I_1 =$

$$= (E - rI - R_3 I)(I - I_2) = [E - (r + R_3) I]\ (I - U_1 / R_2) =$$

$$= [E - (r + R_3) I]\{I - [E - (r + R_3) I] : R_2\} = 60\ \text{W}\ .$$

2.2.10. ***În montajul din figură se dau :*** $E = 100$ V, $r = 2{,}0\ \Omega$, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_3 = 78\ \Omega$, $P_1 = 16$ W . ***Aflaţi curentul*** I.

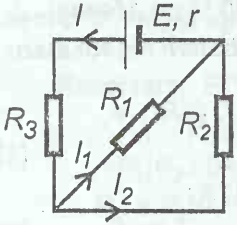


Fig.2.2.9

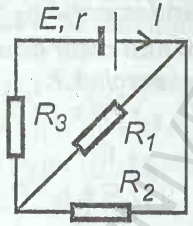


Fig.2.2.10

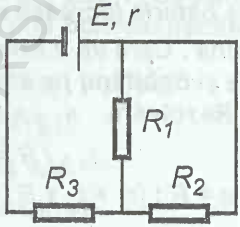


Fig.2.2.11

Rezolvare. Tensiunea la bornele rezistorului R_1 (şi R_2) este :

$$P_1 = U_1^2 / R_1 \ \rightarrow\ U_1 = \sqrt{R_1 P_1}\ , \qquad (1)$$

dar $U_1 = E - rI - R_3 I = E - (r + R_3)\ I$,

rezultă $I = (E - U_1) : (r + R_3) = (E - \sqrt{R_1 P_1}\ ) : (r + R_3) = 1{,}00$ A . (2)

2.2.11. ***În montajul din figură se dau :*** $R_1 = 100\ \Omega$, $P_1 = 16$ W, $U_3 = 40$ V, ***randamentul bateriei*** $\eta = 80\ \%$. ***Aflaţi t.e.m.*** E .

Rezolvare. Tensiunea la bornele rezistorului R_1 (şi R_2) este :

$$P_1 = U_1^2 / R_1 \ \rightarrow\ U_1 = \sqrt{R_1 P_1}\ . \qquad (1)$$

Randamentul este :

$$\eta = (U_3 + U_1) : E \ \rightarrow\ E = (U_3 + \sqrt{R_1 P_1}\ ) : \eta = 100\ \text{V}\ . \qquad (2)$$

2.2.12. ***Două rezistoare*** $R_1 = 10{,}0\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 40{,}0\ \text{k}\Omega$ ***şi de aceeaşi putere (disipată) maximă*** **permisă** $P_m = 1{,}00$ W ***, sunt legate în serie . Ce tensiune maximă este permisă pentru acest sistem ?***

Rezolvare. $U_{m1} = \sqrt{R_1 P_m} = 100$ V, $U_{m2} = \sqrt{R_2 P_m} = 200$ V.(1)

Legându-le în serie, tensiunile pe rezistoare vor fi :

$$U_1 = U \cdot R_1 : (R_1 + R_2)\,, \quad U_2 = U \cdot R_2 : (R_1 + R_2)\,. \quad (2)$$

Pe măsură ce tensiunea globală aplicată creşte, cresc şi tensiunile pe rezistoare. Tensiunile maxime individuale se ating pentru :

$$U = U_1(R_1 + R_2) : R_1 \rightarrow U_m' = U_{m1}(R_1 + R_2) : R_1 =$$

$$= \sqrt{P_m}\,\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_1}}\,, \quad U_m'' = U_{m2}(R_1 + R_2) : R_2 = \sqrt{P_m}\,\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_2}}\,. \quad (3)$$

Dacă $R_1 < R_2$, tensiunea maximă individuală se atinge întâi pe R_2, deci

$$U_m = \sqrt{P_m}\,\frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_2}} = 250 \text{ V}\,, \quad (4)$$

care se distribuie pe $R_{1,2}$ astfel :

$$U_1 = 50 \text{ V} < U_{m1}\,, \quad U_2 = U_{m2} = 200 \text{ V}\,.$$

2.2.13. ***Un acumulator cu rezistenţa internă*** $r = 0{,}10\ \Omega$ ***este pus la încărcat astfel încât curentul de încărcare este*** $I = 2{,}0$ A ***şi tensiunea la bornele sale*** $U = 12{,}2$ V ***. Aflaţi puterea calorică degajată în acumulator şi randamentul cu care este încărcat acumulatorul .***

Rezolvare. *Puterea calorică* degajată în acumulator este evident : $P_q = r I^2 = 0{,}40$ W . (1)

Deoarece acumulatorul este aici *consumator* şi nu furnizor de energie, şi deci curentul trece în sens invers tensiunii e.m. , avem :

$U = E + rI$ (în loc de $U = E - rI$) , $E = U - rI = 12{,}0$ V . (2)

Puterea *utilă* pe care o înmagazinează acumulatorul în energie chimică este : $P_u = E I = (U - rI) I = 24{,}0$ W . (3)

Puterea totală furnizată acumulatorului de către sursa de încărcare : $P = U I = E I + r I^2 = 24{,}4$ W . (4)

Randamentul încărcării :

$\eta = E I : (U I) = E : U = (U - rI) : U = 98\ \%$. (5)

2.2.14. ***În montajul din figură se degajă aceeaşi căldură în circuitul exterior, indiferent de închiderea sau deschiderea întrerupătorului. Se dau :*** $R_1 = 3{,}0\ \Omega$, $R_2 = 1{,}0\ \Omega$. ***Aflaţi rezistenţa internă a bateriei.***

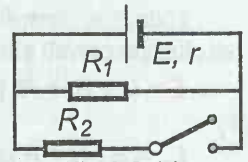


Fig.2.2.14

Rezolvare. O *aceeaşi* putere *utilă* (în circuitul exterior) se obţine pentru două valori ale rezistenţei consumatorului, aşa cum este dealtfel şi în enunţul problemei . Să arătăm că $r = \sqrt{R_1 R_2}$, unde $R_{1,2}$ sunt cele două valori . În adevăr,

$P_1 = R_1[E : (r + R_1)]^2 = P_2 = R_2[E : (r + R_2)]^2 \rightarrow r = \sqrt{R_1 R_2}$. (1)

Reţinem acest rezultat pentru a-l folosi şi la alte probleme .

Revenim la cazul nostru :

$$r = \sqrt{R_1 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} = 1{,}5\ \Omega\ . \qquad (2)$$

2.2.15. ***Puterea totală dezvoltată pe două rezistoare*** R_1=8,0 Ω ***şi*** R_2 = 2,0 Ω ***este aceeaşi, fie că le legăm în serie, fie că le legăm în paralel la o sursă . Aflaţi rezistenţa internă a sursei .***

Rezolvare. Aplicăm rezultatul (1) de la problema precedentă 2.2.14 :

$$r = \sqrt{(R_1 + R_2) \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{R_1 R_2} = 4{,}0\ \Omega\ .$$

2.2.16. ***Un ceainic electric are două rezistoare identice*** R = = 4,0 Ω ***fiecare. Dacă îl alimentăm de la o baterie cu t.e.m.*** E = = 12 V, ***apa ajunge la fierbere în acelaşi timp, indiferent dacă rezistoarele sunt conectate în serie sau în paralel. Aflaţi curentul de scurt-circuit al bateriei.***

Rezolvare. Conform problemei 2.2.14 pentru o putere utilă dată există ***două*** valori ale rezistenţei consumatorului, astfel încât $r = \sqrt{R_1 R_2}$. În cazul nostru $r = \sqrt{2R \cdot \frac{R}{2}} = R$. (1)

Curentul de *scurt-circuit* al bateriei: $I_{sc} = E : r = E : R = 3{,}0$ A. (2)

2.2.17. ***Un consumator este alimentat la distanţă de un generator. Consumatorul consumă o aceeaşi putere*** P = 900 W, ***fie că rezistenţa sa este*** R_1 = 9,0 Ω , ***fie că este*** R_2 = 25 Ω . ***Ce curent va trece prin liniile de alimentare a consumatorului dacă se produce un scurt-circuit la consumator ?***

Rezolvare. $P = R_1[E : (r + R_l + R_1)]^2 = R_2[E : (r + R_l + R_2)]^2$

$$\rightarrow r + R_l = \sqrt{R_1 R_2}\ , \qquad (1)$$

rezultat pe care îl ştim de la problema 2.2.14.

$$E = (r + R_l + R_1)\sqrt{P/R_1} = \left(\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1}\right)\sqrt{P}\ . \qquad (2)$$

$$I_{sc} = E : (r + R_l) = \frac{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 R_2}}\sqrt{P} = 16\ \text{A}\ . \qquad (3)$$

2.2.18. ***Două rezistoare identice sunt legate o dată în serie, apoi în paralel, la o baterie cu rezistenţa internă*** r . ***În ce caz puterea în circuitul exterior este mai mare ?***

Rezolvare. $P_s = 2R[E:(r+2R)]^2$, $P_p = (R/2)[E:(r+R/2)]^2$,(1)

$$P_s : P_p = [(2r+R):(r+2R)]^2 > 1 \rightarrow r > R, \quad (2)$$

deci dacă $R < r$ atunci $P_s > P_p$, dacă $R > r$, atunci $P_s < P_p$ şi dacă $R = r$, atunci $P_s = P_p$.

2.2.19. ***O baterie debitează pe două rezistoare legate în paralel (sau în serie). Ştiind că prin baterie trece un curent*** $I = 1{,}00$ A ***şi că pe rezistoarele*** $R_{1,2}$ ***se degajă căldură de*** $k_1 = 3{,}0$ ori, ***respectiv*** $k_2 = 6{,}0$ ori ***mai multă decât pe rezistenţa internă a bateriei, aflaţi curentul de scurt-circuit al bateriei.***

Rezolvare. Fie R_e rezistenţa echivalentă a celor două rezistoare legate în paralel (sau în serie), atunci conform enunţului :

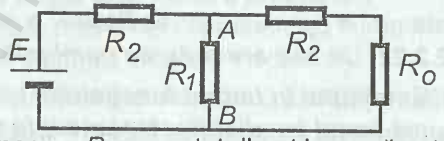
$$(R_e I^2) : (rI^2) = k_1 + k_2 \rightarrow R_e = (k_1 + k_2)r. \quad (1)$$

$$I = E : (r + R_e) = E : [r + (k_1 + k_2)r] = E : [r(1 + k_1 + k_2)], \quad (2)$$

$$I_{sc} = E : r = (1 + k_1 + k_2)I = 10{,}0 \text{ A}. \quad (3)$$

2.2.20. ***În schema din figură rezistenţa*** $R_o = 3{,}0\ \Omega$ ***şi t.e.m. a sursei*** $E = 2{,}7$ V ***(cu rezistenţa internă neglijabilă). Rezistenţele*** $R_{1,2}$ ***sunt astfel alese încât tensiunea pe*** R_o ***este de*** $n = 10$ ori ***mai mică decât tensiunea pe acelaşi*** R_o ***conectat direct la bornele sursei, iar puterea dezvoltată de sursă este aceeaşi ca în cazul conectării directe a lui*** R_o. ***Aflaţi*** $R_{1,2}$ ***şi puterea*** P' ***dezvoltată dacă se deconectează*** R_o.

Fig.2.2.20



Rezolvare. Tensiunea pe R_o conectat direct la sursă este chiar t.e.m. E, deoarece sursa are rezistenţa internă neglijabilă. În cazul schemei date aplicăm formula *divizorului de tensiune* :

$$U_{AB} = U_1 = E : \{1 + R_2[1/R_1 + 1/(R_2 + R_o)]\},$$

$$U_o = U_1 \cdot R_o : (R_o + R_2). \quad (1)$$

Condiţia din enunţ pentru **tensiuni** se scrie :

$$E = \left[nE : \{1 + R_2[1/R_1 + 1/(R_2 + R_o)]\}\right] \cdot R_o : (R_o + R_2) \quad (2)$$

$$\rightarrow R_1(R_2 + R_o) + R_2(R_2 + R_o + R_1) = n R_1 R_o. \quad (3)$$

Condiţia din enunţ pentru **putere** se scrie :

$$E^2 : [R_2 + R_1(R_2 + R_o) / (R_1 + R_2 + R_o)] = E^2 : R_o \rightarrow$$
$$R_2 (R_1 + R_2 + R_o) + R_1(R_2 + R_o) = R_o(R_1 + R_2 + R_o) . \quad (4)$$

Scăzând membru cu membru (3) şi (4) , obţinem :

$$nR_1 = R_1 + R_2 + R_o \quad (5)$$

şi apoi din (4) : $R_2 \cdot nR_1 + R_1(R_2 + R_o) = R_o \cdot nR_1 \rightarrow$

$$nR_1(R_2 - R_o) + R_1(R_2 + R_o) = 0 . \quad (6)$$

Din ultima ecuaţie avem :

$$n(R_2 - R_o) + R_2 + R_o = 0 \rightarrow R_2 = R_o \cdot (n - 1) : (n + 1) = 2{,}45\ \Omega \quad (7)$$

şi din (5) : $R_1 = (R_2 + R_o) : (n - 1) = R_o \cdot 2n : (n^2 - 1) = 0{,}61\ \Omega$.(8)

Puterea cerută (R_2 din dreapta nu intervine, rămâne în circuit deschis) : $P' = E^2 : (R_2 + R_1) =$

$$= (E^2 : R_o) \cdot (n^2 - 1) : (n^2 + 1) = 2{,}38\ \text{W} . \quad (9)$$

2.2.21. ***Aflaţi căldura degajată pe unitatea de timp şi pe unitatea de volum într-un conductor de cupru în care avem*** **densitatea *de* curent** $j = 300\ \text{kA/m}^2$.

Rezolvare. *Densitatea de curent* reprezintă sarcina care trece prin unitatea de *arie* transversală în unitatea de timp :

$$j = Q : (S_\perp \Delta t) = I : S_\perp , \quad \text{A/m}^2 , \quad (1)$$

este de fapt o mărime ***vectorială*** orientată după viteza de drift a purtătorilor de sarcină .

$$q^* = RI^2 : (S\ell) = [\rho\ell : (S^2\ell)]\, j^2S^2 = \rho j^2 = 1{,}5\ \text{kW/m}^3 . \quad (2)$$

Aceasta , $q^* = \rho j^2$, este forma "locală" a *legii lui* ***Joule*** $P = RI^2$.

2.2.22. ***Un bec are puterea nominală*** $P_n = 40$ W ***şi temperatura filamentului în timpul funcţionării*** $t = 2200^oC$ ***. Ce putere consumă becul imediat (instantaneu) în momentul conectării, dacă coeficientul termic al wolframului este*** $A = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$ ***?***

Rezolvare. Fie R_o rezistenţa filamentului la 0°C. Atunci

$$P_n = U^2 : [R_o(1 + At)] , \quad P_o = U^2 : [R_o(1 + At_c)] , \quad (1)$$

unde $t_c \approx 20^oC$ este temperatura filamentului rece (la temperatura camerei) . Din cele două ecuaţii rezultă :

$$P_o = P_n (1 + At) : (1 + At_c) = 400\ \text{W} \ !\ ! \quad (2)$$

de *zece* ori mai mare decât puterea nominală ! de aceea becurile se ard de regulă în momentul aprinderii .

2.2.23. ***La conectarea unui consumator de putere*** $P_1 = 1{,}00$ kW ***, firul siguranţei fuzibile se încălzeşte de la temperatura camerei*** $t_o = 20^oC$ ***până la*** $t_1 = 120^oC$ ***. Ştiind coeficientul termic al rezistivităţii firului*** $A = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$ ***şi temperatura de topire*** $t_t = 320^oC$ ***, evaluaţi puterea consumatorului la care se topeşte siguranţa . Pierderile de căldură către mediu sunt proporţionale cu diferenţa de temperatură (legea lui*** Newton***).***

Rezolvare. În primul caz (R_o - rezistenţa firului fuzibil la 0^oC) :

$$R_1 I_1^2 = R_o[(1 + At_1) : (1 + At_o)]\ (P_1/U)^2 =$$

$$= mc(t_1 - t_o) + K(t_1 - t_o) \qquad (1)$$

şi în al doilea caz : $R_2 I_2^2 = R_o[(1 + At_t) : (1 + At_o)]\ (P_2/U)^2 =$

$$= mc(t_t - t_o) + K(t_t - t_o)\ . \qquad (2)$$

Prin împărţirea ecuaţiilor membru la membru rezultă :

$$[(1 + At_1) : (1 + At_t)]\ [P_1^2 / P_2^2] = (t_1 - t_o) : (t_t - t_o) \rightarrow$$

$$P_2 = P_1 \sqrt{\frac{1 + At_1}{1 + At_t} \frac{t_t - t_o}{t_1 - t_o}} = 1{,}4 \text{ kW}\ . \qquad (3)$$

Puterea P_2 trebuie să fie ceva mai mare pentru a asigura căldura latentă necesară demarării topirii firului .

2.2.24. ***Jumătate din sârma spiralată a unui reşou pus la priză este răcită (de exemplu, cu ulei). Cum se schimbă curentul şi căldura degajată totală şi în fiecare jumătate ?***

Rezolvare. Prin răcire rezistenţa scade, atunci curentul ($I = U : R$) creşte şi puterea totală creşte ($P = U^2 : R$) .

Fie $R_{1,2}$ rezistenţele iniţiale ale celor două jumătăţi şi $R_1 - \varepsilon$, $R_2 + \eta$ rezistenţele lor finale , fiindcă ca urmare a răcirii primei jumătăţi R_1 scade, iar R_2 creşte deoarece creşte curentul şi temperatura acesteia . $P_1 = R_1 I_1^2 = R_1[U : (R_1 + R_2)]^2$,

$$P_1^* = (R_1 - \varepsilon)\ [U : (R_1 - \varepsilon + R_2 + \eta)^2\ , \qquad (1)$$

$$P_1^* : P_1 = [(R_1 - \varepsilon) : R_1](R_1 + R_2)^2 : (R_1 + R_2 - \varepsilon + \eta)^2 =$$

$$= (1 - \varepsilon/R_1) : [1 - (\varepsilon - \eta) / (R_1 + R_2)]^2 \approx 1 - \varepsilon/R_1 < 1\ , \qquad (2)$$

(considerăm că $2(\varepsilon - \eta) / (R_1 + R_2) < \varepsilon / R_1$), deci căldura degajată în jumătatea răcită scade, iar în cea nerăcită creşte .

2.2.25. ***Un aparat este alimentat prin conductoare de cupru*** (1) ***de secţiune*** $S_1 = 3{,}0\ mm^2$ ***având în serie şi o siguranţă fuzibilă din plumb*** (2) ***de secţiune*** $S_2 = 1{,}00\ mm^2$ ***cu temperatura iniţială*** $t_o = 17°C$. ***Cu cât va creşte temperatura conductoarelor de cupru în cazul unui scurt-circuit la aparat, considerând că întreaga căldură degajată merge la încălzirea conductoarelor ?***

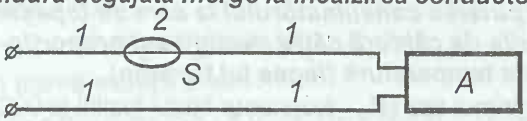


Fig.2.225

Rezolvare. Scriem succesiv pentru căldurile degajate :

$$Q_1 : Q_2 = m_1 c_1 \Delta t_1 : [m_2 c_2 (t_t - t_o) + m\lambda] =$$

$$= \delta_1 S_1 \ell_1 c_1 \Delta t_1 : \{\delta_2 S_2 \ell_2 [c_2 (t_t - t_o) + \lambda]\} =$$

$$= R_1 I^2 : (R_2 I^2) = [\rho_1 \ell_1) : S_1]\ [S_2 : (\rho_2 \ell_2)]\ , \qquad (1)$$

unde $\delta_{1,2}$ sunt densităţile, $c_{1,2}$ - căldurile specifice şi t_t - temperatura de topire a plumbului . Din (1)rezultă :

$$\Delta t_1 = (\rho_1 / \rho_2)(\delta_2 / \delta_1)(S_2 / S_1)^2\ [c_2 (t_t - t_o) + \lambda] : c_1 = 1{,}8\ grd\ . \qquad (2)$$

2.2.26. ***În montajul din figură se dau :*** $E = 120\ V$, $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $I = 2{,}00\ A$, ***randamentul încălzitorului*** $\eta = 76\ \%$, ***masa apei*** $m = 0{,}50\ kg$ ***cu temperatura iniţială*** $t_o = 4{,}0°C$. ***În cât timp ajunge apa la fierbere ?***

Rezolvare. $\eta W = \eta U_2 I \tau = \eta (E - R_1 I) I \tau = Q = mc(t_f - t_o)$, (1)

$$\tau = mc(t_f - t_o) : [\eta (E - R_1 I) I] = 22\ min\ . \qquad (2)$$

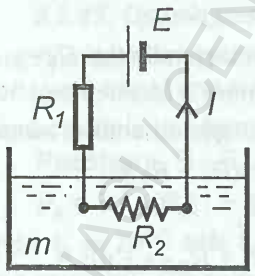


Fig.2.2.26

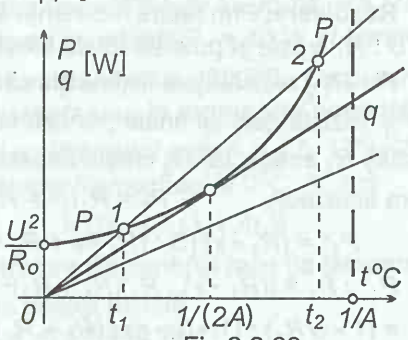


Fig.2.2.29

2.2.27. ***Aflaţi costul*** K ***al energiei electrice consumate într-o lună cu*** Z = 30 zile, ***ştiind că zilnic timp de*** $\tau = 4{,}5\ h$ ***ard două becuri de putere*** P= 40 W ***fiecare şi sunt aduse la fierbere***

V = 1,50 L ***apă cu temperatura iniţială*** t_o = 10°C ***pe un fierbător de randament*** η = 80 % . ***Preţul energiei electrice este*** k = 100 lei/kWh .

Rezolvare. $K = kZ[2P\tau + mc(t_f - t_o) : \eta] = 100\,000$ lei.

Atenţie la poziţia randamentului η : noi plătim întreaga energie luată de la reţea, chiar dacă din aceasta folosim *util* numai o parte .

2.2.28. ***În cât timp este*** **vaporizată** ***apa de volum*** V = 0,60 L ***şi temperatura iniţială*** t_o = 9,0°C ***într-un ceainic electric de randament*** η = 60 % ***şi rezistenţă*** R = 60 Ω , ***tensiunea reţelei fiind*** U = 220 V ***?***

Rezolvare. $\eta W = \eta U^2\tau / R = Q = mc(t_f - t_o) + m\lambda$, (1)

$$\tau = [R : (\eta U^2)]\, m[c(t_f - t_o) + \lambda\,] = 55 \text{ min} . \quad (2)$$

Nu uitaţi *căldura* ***latentă*** pentru vaporizarea apei !

2.2.29. ***Rezistenţa unui rezistor variază după legea*** $R = R_o(1 - At)$. ***Rezistorul este pus la o tensiune*** U ***şi se cufundă într-un fluid cu temperatura de*** 0°C . ***Ştiind că pierderea de căldură, pe unitatea de timp, de la rezistor către fluid este dată de*** **formula lui Newton** $q = B\Delta t$, ***aflaţi temperatura de echilibru.*** *Discuţie, considerând* R_o , A *şi* B *cunoscute.*

Rezolvare. Puterea dezvoltată în rezistor şi căldura pierdută pe unitatea de timp sunt : $P = U^2 : R = U^2 : [R_o(1 - At)]$, (1)

$$q = Bt . \quad (2)$$

Aceste mărimi sunt reprezentate grafic în figură. La echilibru $P = q$, deci temperaturile de echilibru corespund punctelor de intersecţie .

$$U^2 : [R_o(1 - At)] = Bt \rightarrow t = \frac{1}{2A}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4AU^2/(BR_o)}\right] . \quad (3)$$

Discuţia se face în raport cu semnul discriminantului. Dacă

$$\Delta > 0 , \quad U < \sqrt{BR_o/(4A)} , \quad (4)$$

avem două soluţii din care cea mai *mică* t_1 (cu minus radical) este *stabilă*, iar cealaltă t_2 - instabilă (la o scădere a temperaturii $q > P$ deci rezistorul se va răci şi mai mult şi temperatura va scădea ; la o creştere a temperaturii $P > q$ şi rezistorul se va încălzi şi mai mult până la topire).

Dacă $U = \sqrt{BR_o/(4A)}$, $t = 1 : (2A)$, (5)

dar este *instabilă* spre dreapta , la o creştere a temperaturii $P > q$ şi rezistorul se va încălzi şi mai mult şi temperatura va creşte până la topirea rezistorului .

Dacă $U > \sqrt{BR_o/(4A)}$, (6)

nu se atinge o temperatură de echilibru, permanent $P > q$, temperatura creşte continuu până la topirea rezistorului.

2.2.30. ***Un radiator de putere*** P=1000 W ***şi tensiune*** U = = 220 V ***este conectat prin conductoare de cupru de secţiune*** S = 4,0 mm^2 . ***Cu câte grade se încălzesc conductoarele în timpul*** τ = 1,00 min ***dacă*** f = 50 % ***din căldura degajată este preluată de conductoare, restul fiind cedat mediului ?***

Rezolvare. $fW = fRI^2\tau = f(\rho\ell : S)(P : U)^2\tau = mc\Delta t =$

$= \delta S\ell c\Delta t \rightarrow \Delta t = f\rho P^2\tau : (U^2S^2c\delta) \cong 0{,}2$ grd

(δ - densitatea cuprului şi c - căldura specifică).

2.2.31. ***Temperatura apei dintr-un acvariu cu apă curentă poate fi menţinută*** constantă ***cu ajutorul a două încălzitoare identice, fiecare de putere*** P = 100 W. ***În regim normal temperatura apei reci este*** t_1 =10°C ***şi se amestecă repede cu apa din acvariu de temperatură*** t_2 = 27°C . ***Dacă se conectează în paralel ambele încălzitoare, debitul apei trebuie mărit de*** n = 3,0 ori ***faţă de cazul unui singur încălzitor. Aflaţi debitul*** m * ***în cazul unui singur încălzitor şi în cazul legării lor în serie .***

Rezolvare. Temperatura acvariului fiind menţinută *constantă*, pierderile de căldură spre exterior , pe unitatea de timp, sunt *constante*, conform *formulei lui* ***Newton*** $q = \alpha\, S\Delta t$ (α - **coeficientul de schimb de căldură**).

În cazul unui **singur** încălzitor (m^* - debitul masic al apei), notând cu q_{ext} pierderile de căldură spre exterior *pe unitatea de timp* :

$$P = m^* c\Delta t + q_{ext} . \quad (1)$$

La legarea în **paralel** a încălzitoarelor :

$$2P = n \cdot m^* c\Delta t + q_{ext} . \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă : $q_{ext} = P \cdot (n - 2) : (n - 1)$ (3)

şi apoi din (1) $m^* = P : [(n - 1)c\Delta t] = 0{,}70$ g/s . (4)

La legarea în **serie** : $U^2 : (2R) = (1/2)\, P =$

$= m_s^* c\Delta t + q_{ext} = m_s^* c\Delta t + P \cdot (n - 2) : (n - 1)$, (5)

$$m_s^* = [P : (c\Delta t)]\,(3 - n) : [2(n - 1)] = 0. \quad (6)$$

(încălzitoarele compensează exact pierderile de căldură spre exterior).

2.2.32. ***Două baterii cu t.e.m.*** $E_1 = 6{,}0$ V ***şi*** E_2 ***, cu rezistenţe interne neglijabile, sunt conectate în serie pe un rezistor. Dacă inversăm polaritatea unei baterii, puterea calorică dezvoltată în rezistor scade de*** $n = 9{,}0$ ***ori . Aflaţi*** E_2 **.**

Rezolvare. $P_1 = (E_1 + E_2)^2 : R$, $P_2 = (E_1 - E_2)^2 : R = P_1 : n$,(1)

$$(E_1 + E_2)^2 = n\,(E_1 - E_2)^2 \,. \qquad (2)$$

Avem două posibilităţi : $E_1 + E_2 = \sqrt{n}\,(E_1 - E_2) \rightarrow$

$$E_2 = E_1\,(\sqrt{n} - 1) : (\sqrt{n} + 1) = 3{,}0 \text{ V} \qquad (3)$$

sau $E_1 + E_2 = \sqrt{n}\,(E_2 - E_1) \rightarrow$

$$E_2 = E_1\,(\sqrt{n} + 1) : (\sqrt{n} - 1) = 12 \text{ V} \,. \qquad (4)$$

2.2.33. ***Atât la legarea în serie, cât şi la legarea în paralel, a*** $n = 3$ ***baterii identice se dezvoltă o aceeaşi putere*** $P = 9{,}0$ W ***pe un rezistor. Ce putere va dezvolta pe acest rezistor o singură baterie ?***

Rezolvare. $P = R[nE : (R + nr)]^2 = R[E : (R + r/n)]^2 \rightarrow R = r$, (1)

$$P = R[nE : (R + nR)]^2 = (E^2 / R)\,[n : (n + 1)^2 \,, \qquad (2)$$

$$P_1 = R[E : (R + R)]^2 = E^2 : (4R) = (P/4)[(n + 1) : n]^2 = 4{,}0 \text{ W} \,. (3)$$

2.2.34. ***Pentru a asigura funcţionarea normală a unui bec cu tensiunea*** $U = 2{,}0$ V ***şi puterea*** $P = 25$ W ***, se folosesc baterii identice cu t.e.m.*** $E = 10$ V ***şi*** $r = 4{,}0\ \Omega$ ***şi o rezistenţă şunt pentru bec. Ce număr*** minim ***de baterii trebuie conectate în paralel şi care este valoarea şuntului ?***

Rezolvare. Baterii identice legate în paralel sunt echivalente cu o singură baterie cu t.e.m. E şi cu rezistenţa internă r/n . Putem aplica formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*), şi anume tensiunea pe bec legat în paralel cu şuntul este

$$U = E : [1 + (r/n)(1/R + 1/R_s)] = E : [1 + (r/n)(P/U^2 + 1/R_s)], \quad (1)$$

de unde $R_s = 1 : [(E/U - 1)(n/r - P/U^2]$. (2)

Condiţia $R_s \geq 0$ implică $n \geq r\,(P/U^2) : (E/U - 1) = 6{,}25$, (3)

deci n minim este $n = 7$ şi atunci :

$$R_s = 1 : [(E/U - 1)(n/r - P/U^2] = 1{,}33\ \Omega \,. \qquad (4)$$

2.2.35. ***Mai multe baterii identice, având fiecare rezistenţa internă*** r ***, sunt legate în serie. Ştiind că sistemul dezvoltă aceeaşi putere pentru două valori diferite*** $R_{1,2}$ ***ale rezistenţei de sarcină, aflaţi numărul de baterii .***

Rezolvare. $R_1[nE : (nr + R_1)]^2 = R_2[nE : (nr + R_2)]^2 \rightarrow$

$$n = \sqrt{R_1 R_2} : r . \qquad (1)$$

Dacă $\sqrt{R_1 R_2} : r$ este număr *natural*, atunci acesta este numărul de baterii căutat, altfel problema nu are soluţie *riguroasă*.

2.2.36. ***Dacă un ceainic electric cu rezistenţa*** $r = 90\ \Omega$ ***este conectat la reţea în serie cu un reostat de rezistenţă*** $R = 30\ \Omega$, ***apa ajunge la fierbere în timpul*** $\tau = 8{,}0$ min. ***Ce rezistenţă*** r' ***trebuie să aibă ceainicul pentru ca apa să ajungă la fierbere în*** $\tau' = 4{,}0$ min ***dacă rezistenţa reostatului se reduce la jumătate ?***

Rezolvare. $Q = \eta W = \eta r[U : (r + R)]^2\tau =$

$$= \eta r'[U : (r' + R/2)]^2\tau' , \qquad (1)$$

de unde rezultă ecuaţia :

$$r'^2 - 50r' + 225 = 0 , \quad r' = 45\ \Omega \ \text{ sau } \ 5{,}0\ \Omega . \qquad (2)$$

Randamentul montajului în cele două cazuri :

$$\eta_m = r' : (r' + R/2) = 75\ \%\ , \text{resp. } 25\ \%\ , \qquad (3)$$

deci este preferabilă valoarea $r' = 45\ \Omega$.

2.2.37. ***Un termostat menţine o temperatură (înaltă) practic constantă cu ajutorul unui încălzitor electric, conectându-se la reţea periodic pentru un interval*** $\tau_c = 1{,}0$ min ***, când tensiunea reţelei este nominală . Dacă însă tensiunea reţelei scade până la o fracţiune*** $f = 90\ \%$ ***din tensiunea nominală, acest timp de conectare periodică devine*** $\tau_c' = 2{,}0$ min. ***Ce tensiune minimă, procentuală, este admisibilă pentru ca termostatul să asigure temperatura cerută ?***

Rezolvare. Termostatul pierde căldură spre exterior, pe care o compensează încălzitorul electric .Conform *legii lui* ***Newton*** căldura pierdută pe unitatea de timp este $q = \alpha S\Delta t$, unde S este aria prin care se face schimbul de căldură şi Δt diferenţa de temperatu-ră dintre corp şi mediu (α -coeficientul de schimb de căldură).

Prin urmare, în cazul nostru $q = \text{const}$. Intervalul de timp τ_d cât termostatul stă deconectat este constant, indiferent de tensiunea reţelei, fiind dat de pierderile de căldură în timpul deconectării : $q\tau_d = \alpha S(\Delta t)_{cr}$, care duc la scaderea critică constantă de temperatură faţă de cea nominală .

Atunci pentru o perioadă (ciclu) de funcţionare avem bilanţul (pierderile de căldură se produc permanent, şi în timpul conectării):

$$(U^2/R)\tau_c = q(\tau_d + \tau_c) , \ [(fU)^2/R]\,\tau_c' = q(\tau_d + \tau_c') . \qquad (1)$$

La limita asigurării temperaturii cerute , termostatul va fi conectat *permanent*, $\tau_c \to \infty$:

$$(f\,U)^2 : R = q(\tau_d : \tau_c + 1) \quad \to \quad (f'\,U)^2 : R = q\,. \qquad (2)$$
$$\tau_c \to \infty$$

Introducând (2) în (1) , obţinem

$$(1 : f'^2)\,\tau_c = \tau_d + \tau_c\,, \quad (f^2 : f'^2)\,\tau_c' = \tau_d + \tau_c'\,, \qquad (3)$$

de unde prin scăderea membru cu membru rezultă :

$$f' = \sqrt{\left(f^2\tau_c' - \tau_c\right)\Big/\left(\tau_c' - \tau_c\right)} = 79\ \%\,. \qquad (4)$$

Dacă $U = 220$ V , $U' = f\,U = 198$ V , atunci

$$U_{min} = \sqrt{\left(U'^2\,\tau_c' - U^2\tau_c\right)\Big/\left(\tau_c' - \tau_c\right)} = 173\ \text{V}\,. \qquad (5)$$

2.2.38. ***De la un generator, de tensiune*** U = 220 V ***şi rezistenţă internă neglijabilă, trebuie transmisă la distanţa*** ℓ = 1,0 km ***o putere la consumator*** P = 10 kW ***prin conductoare de aluminiu. Ce secţiune trebuie să aibă conductoarele dacă pierderile de tensiune pe linie trebuie să fie*** $U_\ell \le 20$ V ***?***

Rezolvare. Avem succesiv : $P = (U - U_\ell)\,I$,

$$U_\ell : I = R_\ell = \rho \cdot 2\ell : S = (U_\ell : P)\,(U - U_\ell)\,, \qquad (1)$$

$$S = 2\ell\rho\,P : [U_\ell(U - U_\ell)] = 1{,}4\ \text{cm}^2\,. \qquad (2)$$

2.2.39. ***Un generator cu tensiunea*** U = 2,4 kV ***transmite o putere*** P = 60 kW ***la consumator . Aflaţi rezistenţa conductoarelor de transmisie, dacă pierderile de tensiune pe linie reprezintă*** f = 8 % ***din tensiunea generatorului .***

Rezolvare. $P = (U - U_\ell)\,I = (U - f\,U)\,I \quad \to \quad I = P : [(1 - f)U]$,(1)

$$R_c = U_\ell : I = f\,U : I = (f\,U : P)(1 - f)U] = f(1 - f)U^2 : P = 7{,}0\ \Omega. \qquad (2)$$

2.2.40. ***Un generator cu tensiunea*** U = 500 V ***(cu rezistenţa internă neglijabilă) transmite la distanţă o putere*** P = 100 kW ***la consumator. Care sunt pierderile de putere pe linie dacă rezistenţa conductoarelor*** R_c = 0,48 Ω ***?***

Rezolvare. Puterea *totală* dezvoltată de generator este:

$$U\,I = R_c I^2 + P \quad \to \quad I = \frac{1}{2R_c}\left(U - \sqrt{U^2 - 4R_c P}\right) = 270\ \text{A}\,. \qquad (1)$$

Tensiunea la consumator : $P : I = 370$ V , (2)

$$\Delta P = R_c I^2 = 35\ \text{kW}\,. \qquad (3)$$

2.2.41. ***Un generator cu t.e.m.*** E = 220 V ***(rezistenţă internă neglijabilă) transmite la un consumator o putere*** P = 10,0 kW **.**

BCU MIHAIL KOGĂLNICEANU LIBRARY

Care trebuie să fie rezistenţa conductoarelor (liniei de transmisie) pentru ca pierderile de putere pe linie să nu depăşească f = 10 % ***din puterea dezvoltată de generator ?***

Rezolvare. Pierderile de putere pe linie sunt $R_c I^2$ şi ele nu trebuie să depăşească f=10 % din puterea dezvoltată de generator EI:

$$R_c I^2 = f E I \quad \rightarrow R_c I = f E \ , \qquad (1)$$

deci procentajul pierderilor de *putere* este acelaşi cu procentajul pierderilor de *tensiune*.

$$P = U I = (1 - f) E I = (1 - f) E \cdot f E : R_c \ ,$$

$$R_c = f(1 - f) E^2 : P = 0{,}44\ \Omega \ . \qquad (2)$$

2.2.42. ***Un generator de tensiune*** U = 300 V ***transmite la distanţa*** ℓ = 1,00 km ***o putere*** P = 10 kW ***(la consumator) . Ce secţiune trebuie să aibă conductoarele de cupru ale liniei de transmisie pentru ca pierderile de tensiune pe linie să nu depăşească*** f = 5,0 % ***din tensiunea generatorului ?***

Rezolvare. $R_\ell = \rho \cdot 2\ell / S = U_\ell / I = fU/I \ , \quad P = (1 - f) U I \ , \qquad (1)$

$$S = \rho \cdot 2\ell / R_l = 2\ell\rho : (fU/I) = \{2\ell\rho : [fU(1 - f)U]\}\ P = 80\ \text{mm}^2. \qquad (2)$$

2.2.43. ***Un generator dezvoltă o putere*** P = 60 kW ***sub tensiunea*** U = 2,4 kV ***pe care o transmite unui consumator, aflat la distanţa*** ℓ = 5,0 km ***. Pierderile de tensiune pe linie constituie o fracţiune*** f = 0,080 ***din tensiunea generatorului . Aflaţi masa de cupru a conductoarelor liniei de transmisie.***

Rezolvare. $P = U I \ , \quad R_c = fU : I = fU^2 : P = \rho \cdot 2\ell : S \ , \qquad (1)$

$$m = \delta \cdot 2\ell S = \delta \cdot 2\ell \cdot \rho \cdot 2\ell P : (fU^2) = 4\delta\rho\ell^2 P : (fU^2) = 1{,}97\ \text{t} \ . \qquad (2)$$

Vom vedea (v. de exemplu, problema 2.2.45) că dacă se *măreşte* tensiunea generatorului , la aceeaşi putere transmisă, secţiunea şi masa conductoarelor vor fi mult mai mici .

2.2.44. ***De la un generator, de tensiune*** U=750 V, ***trebuie transmisă la destinatar o putere*** P = 5,00 kW ***. Ce rezistenţă maximă poate avea linia de transmisie, astfel ca pierderile de putere pe linie să nu depăşească*** f = 10 % ***din puterea ajunsă la destinatar ?***

Rezolvare. Puterea care pleacă de la generator $U I$ se compune din puterea pierdută pe linie fP şi puterea sosită la consumator:

$$U I = fP + P = (1 + f)P \ \rightarrow \ I = (1 + f)P : U \ , \qquad (1)$$

dar $R_c I^2 = fP \ \rightarrow \ R_c = fP : I^2 = fU^2 : [(1 + f)^2 P] = 9{,}3\ \Omega \ . \qquad (2)$

2.2.45. ***Un generator cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţa internă*** r ***dezvoltă o anumită putere, din care o parte se pierde (disipă) pe***

rezistenţa internă şi pe conductoarele liniei de transmisie, iar restul ajunge la beneficiar (consumator). Dacă generatorul dezvoltă aceeaşi putere totală, dar cu o t.e.m. de n ***ori mai*** mare ***, de câte ori se micşorează pierderile de energie pe rezistenţa internă şi pe conductoarele liniei de transmisie ?***

Rezolvare. Puterea dezvoltată de generator :

$$P = E^2 : (r + R_\ell + R_1) = (nE)^2 : (r + R_\ell + R_2) \rightarrow$$

$$(r + R_\ell + R_2) : (r + R_\ell + R_1) = n^2 . \qquad (1)$$

Puterea disipată inutil : $P_d = (r + R_\ell)[E : (r + R_\ell + R)]^2$,

$$P_{d1} : P_{d2} = (1/n^2)[(r + R_\ell + R_2) : (r + R_\ell + R_1)]^2 = n^2 . \qquad (2)$$

Dacă tensiunea generatorului creşte de n ***ori, pierderile de energie se micşorează de*** n^2 ***ori .***

De exemplu, dacă mărim tensiunea unui generator de la 220 V la 220 kV (aşa cum se procedează în industrie) , pierderile de energie pe liniile de transmisie s-ar micşora de un milion de ori, ceea ce ne permite să micşorăm secţiunea conductoarelor şi să facem o economie ***imensă*** (inclusiv de *cupru* care este scump).

2.2.46. ***De câte ori creşte randamentul de transmitere a unei puteri electrice*** P = 10 MW ***(la generator) printr-o linie de rezistenţă*** R_c = 400 Ω ***, dacă mărim tensiunea generatorului de la*** U_1 = 100 kV ***la*** U_2 = 200 kV ***?***

Rezolvare. $P = U I$, $\eta = (P - R_c I^2) : P = 1 - (R_c / P)(P/U)^2 =$

$$= 1 - R_c P : U^2 . \qquad (1)$$

$$\eta_2 : \eta_1 = (1 - R_c P : U_2^2) : (1 - R_c P : U_1^2) = 1{,}50 , \qquad (2)$$

randamentul a crescut de 1,50 ori sau cu 50 % prin dublarea tensiunii generatorului din problemă .

2.2.47. ***Un generator dezvoltă puterea*** P = 1,00 MW ***pe care o transmite cu pierderi pe linie unui consumator. Contorul la ieşirea din generator şi cel de la intrarea la consumator arată în*** Δt = 24 h ***o diferenţă de energie*** ΔW = 216 kWh ***. De câte ori trebule mărită tensiunea generatorului pentru ca pierderile pe linie să scadă sub*** f = 0,10 % ***din puterea dezvoltată ?***

Rezolvare. Pierderile de putere pe linie în primul caz sunt :

$$P_\ell = \Delta W : \Delta t = 9{,}0 \text{ kW} , \quad P_\ell : P = 0{,}9 \% . \qquad (1)$$

$$P = U I = U' I' , \quad P_\ell : P_\ell' = R_\ell I^2 : (R_\ell I'^2) = (U' : U)^2 , \qquad (2)$$

$$U'/U = \sqrt{P_\ell / P_\ell'} = \sqrt{P_\ell / (fP)} = 3{,}0 . \qquad (3)$$

2.2.48. ***Se dă montajul din figură în care se cunosc valorile rezistenţelor şi ale t.e.m. Aflaţi curentul prin*** R_3 ***şi prin baterii.***

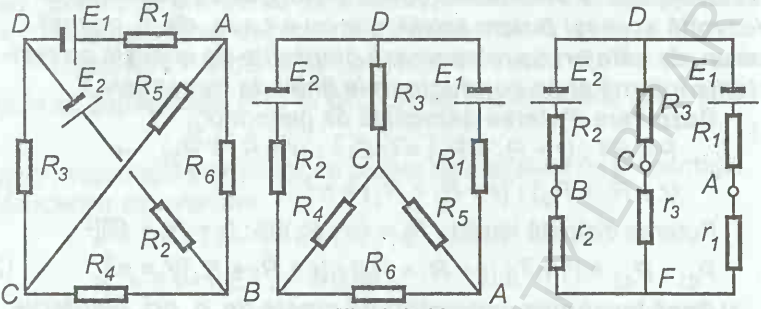


Fig.2.2.48

Rezolvare. Transcriem montajul sub o formă echivalentă, dar mai convenabilă .Observăm că apare un montaj *triunghi* ABC din rezistoarele $R_{4,5,6}$. Îl transformăm în montaj *stea* conform formulelor cunoscute : $r_1 = R_5R_6 : (R_4 + R_5 + R_6)$,

$r_2 = R_4R_6 : (R_4 + R_5 + R_6)$, $r_3 = R_4R_5 : (R_4 + R_5 + R_6)$. (1)

Obţinem astfel un montaj de două baterii legate în paralel şi debitând pe R_3 , r_3 in serie . Aplicăm formulele cunoscute :

$$I_3 = [E_1 / (R_1 + r_1) + E_2 / (R_2 + r_2)] : \\ : \{1 + (R_3 + r_3)[1 / (R_1 + r_1) + 1 / (R_2 + r_2)]\} ; \quad (2)$$

$$U_{FD} = U = (R_3 + r_3)I_3 = [E_1 / (R_1 + r_1) + E_2 / (R_2 + r_2)] : \\ : [1/(R_3 + r_3) + 1/(R_1 + r_1) + 1/(R_2 + r_2)] ; \quad (3)$$

$$E_1 = (R_1 + r_1)I_1 + (R_3 + r_3)I_3 = (R_1 + r_1)I_1 + U ,$$

$$I_1 = (E_1 - U) : (R_1 + r_1) , \quad I_2 = (E_2 - U) : (R_2 + r_2) . \quad (4)$$

2.2.49. ***Aflaţi masa atomului de aluminiu cunoscând echivalentul său electrochimic*** $K = 93\ \mu g/C$ ***şi valoarea sarcinii elementare*** $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$.

Rezolvare. Dacă prin electrolit trece un singur ion de aluminiu (trivalent), atunci sarcina care a trecut este $ze = 3e$ şi masa depusă este chiar masa atomului, conform primei legi a electrolizei:

$$m = Kq, \qquad m_0 = Kze = 4{,}46 \cdot 10^{-26}\ kg .$$

2.2.50. ***Într-un tub capilar închis, de diametru interior*** $d = 0{,}30$ mm***, se află mercur având la mijloc o picătură de soluţie*** HI_2***. Tubul este conectat în serie cu un rezistor*** $R = 390\ k\Omega$ ***şi o baterie cu*** $E = 10$ V***. După cât timp picătura se deplasează cu*** $\ell = 10$ mm ***?***

Rezolvare. Prin *electroliză* ionii Hg^{++} sunt transportaţi de la anod la catod, explicând astfel deplasarea inversă a picăturii :

$$m = (1/F)(A/z)It = \delta(\pi d^2/4)\ell \ , \ I \cong E/R \ , \qquad (1)$$

$$t = \pi d^2 \ell \delta FzR : (4AE) = 100 \text{ h} \ . \qquad (2)$$

Fig.2.2.50

(*) **2.2.51.** ***O baterie dezvoltă o putere utilă maximă*** $P_m = 9{,}0$ W ***la un curent*** $I_m = 3{,}0$ A. ***Aflaţi t.e.m. a bateriei şi rezistenţa sa internă.***

Rezolvare. Puterea utilă este $P = RI^2 =$

$$= R\,[E : (r + R)]^2 = f(R) \ . \qquad (1)$$

Condiţia de extremum este anularea ***derivatei*** :

$$f'(R) = [E : (r + R)]^2 - R \cdot 2[E : (r + R)]\,[E : (r + R)^2] =$$

$$= [E^2 : (r + R)^3]\,(r - R) = 0 \ , \qquad (2) \text{ deci}$$

$$R = r \qquad (3)$$

(*teorema* ***adaptării***) . Natura extremului se poate afla din semnul derivatei a doua : $f''(R) = 2[E^2 : (r + R)^4]\,(R - 2r)$, (4) care pentru rădăcina (3) a derivatei întâia este negativă , deci avem un *maxim.*

Rezultatul se obţine imediat şi fără derivate, dacă scriem astfel :

$$P = E^2 : \left(\frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R} \right) . \qquad (5)$$

La numitor avem suma a doi termeni al căror produs este *constant*, deci suma este *minimă* când termenii sunt egali : $r/\sqrt{R} = \sqrt{R}$, adică $R = r$. Numitorul fiind minim, fracţia, deci puterea utilă, va fi maximă .

Teorema adaptării : *Puterea utilă este* ***maximă*** *atunci când rezistenţa consumatorului este egală cu rezistenţa* ***internă*** *a generatorului .*

Avem mai departe : $I_m = E : (2r)$, $P_m = rI_m^2 = (1/2)\,EI_m$,(5)

de unde $E = 2P_m : I_m = 6{,}0$ V şi $r = P_m : I_m^2 = 1{,}00\ \Omega$.(6)

(*) **2.2.52.** ***O baterie cu t.e.m.*** $E = 6{,}0$ V ***poate debita un curent maxim*** $I_{max} = 3{,}0$ A . ***Aflaţi puterea*** utilă ***maximă pe care o poate da bateria, rezistenţa de sarcină şi randamentul în acest caz .***

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI FIZICĂ

Rezolvare. Analog problemei precedente 2.2.51 :

$$P = RI^2 = R\,[E^2 : (r + R)^2] = f(R)\,. \qquad (1)$$

Condiţia de extremum este anularea ***derivatei*** : $f'(R) =$

$= E^2\,[1 : (r + R)^2 - R \cdot 2 : (r + R)^3] = [E^2 : (r + R)^3]\,(r - R) = 0$, (2)

deci $R = r$ (3)

(*teorema* ***adaptării***) . Natura extremului se poate afla din semnul derivatei a doua : $f''(R) = 2[E^2 : (r + R)^4]\,(R - 2r)$, (4)

care pentru rădăcina (3) a derivatei întâia este negativ , deci avem un *maxim.*

Rezultatul se obţine imediat şi fără derivate, dacă scriem astfel : $P = E^2 : \left(\frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2$. (5)

La numitor avem suma a doi termeni al căror produs este *constant*, deci suma este *minimă* când termenii sunt egali : $r/\sqrt{R} = \sqrt{R}$, adică $R = r$. Numitorul fiind minim, fracţia, deci puterea utilă, va fi maximă : $P_{max} = E^2 : (4r)$, (6)

Curentul maxim este curentul de ***scurt-circuit*** (nu confundaţi curentul *maxim* cu curentul la *adaptare* care dă puterea **utilă** maximă) : $I_{max} = I_{sc} = E : r$, de unde $r = E : I_{max}$, (7)

deci $P_{max} = (1/4)\,EI_{max} = 4{,}5$ W , $(P_{sc} = EI_{max})$, (8)

$R = r = E : I_{max} = 2{,}0\ \Omega$ şi $\eta = 0{,}50 = 50$ % . (9)

Am regăsit în particular rezultatele de la problema 2.1.73.

(*) 2.2.53. ***Un generator cu rezistenţa internă neglijabilă alimentează prin nişte conductoare un consumator. Ştiind că puterea la consumator este*** **maximă** ***posibilă în aceste condiţii, aflaţi ce fracţiune*** **f** ***din puterea generatorului se disipă pe conductoarele de linie . Ce fracţiune*** **f'** ***din puterea generatorului se va disipa pe conductoarele de linie dacă rezistenţa acestora se reduce de*** **n = 4,0** **ori** ***?***

Rezolvare. $P = RI^2 = R\,[E : (R_c + R)]^2 = f(R)$. (1)

Puterea fiind maximă , *derivata* $f'(R) = 0$:

$f'(R) = [E^2 : (R_c + R)^3]\,(R_c - R) = 0$, deci $R_c = R$ (2)

(*teorema* ***adaptării***). Rezultatul găsit (2) se obţine imediat şi fără derivate dacă scriem astfel : $P = E^2 : \left(\frac{R_c}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2$. (3)

La numitor avem suma a doi termeni al căror produs este *constant*, deci suma este *minimă* când termenii sunt egali : $R_c/\sqrt{R} = \sqrt{R}$,

de unde $R = R_c$. $P_{max} = E^2 : (4R_c)$,

$$f = 1 - \eta = 1 - R : (R_c + R) = 1/2 = 50\ \%\ . \qquad (4)$$

$$f' = 1 - \eta' = 1 - R : (R_c / n + R) = 1 - R_c : (R_c / n + R) =$$
$$= 1 : (n + 1) = 20\ \%\ . \qquad (5)$$

2.3. ELECTROCINETICA ŞI ELECTROSTATICA

2.3.1. ***Un condensator plan de capacitate*** C = 100 μF, ***cu distanţa dintre armături*** d = 0,10 mm, ***cu dielectricul de permitivitate*** ε_r = 2,5 ***şi rezistivitate*** ρ = 20 MΩ · m, ***este conectat la o baterie cu t.e.m.*** E = 100 V ***şi rezistenţa internă*** r = 1,0 Ω. ***Aflaţi intensitatea câmpului electric din condensator.***

Rezolvare. Dielectricul ideal este un **izolant** (izolator) *perfect*, total neconductor de curent electric (rezistenţă infinită). Un dielectric *real* prezintă o rezistenţă *finită* şi atunci un condensator *real*, cu dielectric real, este echivalent cu un condensator ideal **şuntat** de o rezistenţă care reprezintă chiar rezistenţa dielectricului dintre armături.

$$E = U_{AB} : d\ , \quad U_{AB} = RI = R \cdot E : (r + R)\ , \qquad (1)$$

$$R = \rho\, d / S\ , \quad C = \varepsilon\, S / d\ , \qquad (2)$$

$$E = (E / d) : (1 + r / R) = (E / d) : [1 + rS / (\rho d)] =$$
$$= (E / d) : [1 + rC / (\rho \varepsilon)] = 0{,}81\ \text{MV/m}\ . \qquad (3)$$

Dacă n-am ţine seama de rezistenţa dielectricului, ar fi

$$E = E / d = 1{,}00\ \text{MV/m}\ . \qquad (4)$$

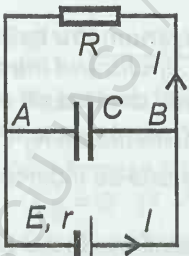


Fig.2.3.1

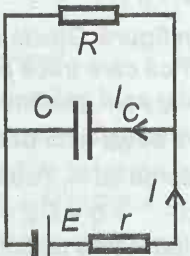


Fig.2.3.2

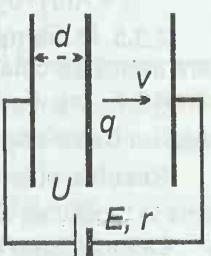


Fig.2.3.3

BCU "ASTRA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.2. ***În schema din figură*** $r = 10\ G\Omega$, $R = 10\ G\Omega$, $E = 1{,}3$ kV, ***volumul aerului dintre armăturile condensatorului plan-paralel*** $V = 250\ cm^3$. ***O sursă de raze*** X ***ionizează aerul dintre armături producând*** $n = 1{,}0 \cdot 10^9\ 1/(cm^3 \cdot s)$ ***perechi de ioni monovalenţi, care ajung pe armături, fără să aibă timp să se recombine. Aflaţi curentul prin baterie.***

Rezolvare. *Curentul* care trece printr-un conductor este prin definiţie sarcina electrică care traversează o secţiune a conductorului în unitatea de timp. În cazul condensatorului sarcina care trece printr-o armătură a condensatorului în unitatea de timp este egală cu sarcina care ia naştere în unitatea de timp în volumul aerului dintre armături, deci

$$I_C = n e V = 40\ nA, \qquad (1)$$

atunci pentru ochiul exterior de reţea avem :

$$E = rI + (I - I_C)R, \quad I = (E + RI_C) : (r + R) = 85\ nA. \qquad (2)$$

2.3.3. ***În montajul din figură se dau*** E, r, d, v = const, q. ***Aflaţi tensiunea*** U.

Rezolvare. Mişcarea uniformă a plăcii încărcate reprezintă un *curent* :

$$I = q/t = q : (d/v) = qv : d. \qquad (1)$$

Pentru $q > 0$ şi sensul vitezei din figură :

$$U = E - rI = E - rqv : d. \qquad (2)$$

2.3.4. ***Un rezistor*** $R = 10\ \Omega$ ***şi un condensator sunt legate o dată în serie şi apoi în paralel pe un acumulator. Sarcina cu care se încarcă condensatorul este în primul caz*** $q_1 = 11\ \mu C$ ***şi în al doilea caz*** $q_2 = 10\ \mu C$. ***Aflaţi rezistenţa internă a acumulatorului.***

Rezolvare. În primul caz condensatorul se încarcă până la o tensiune egală cu t.e.m. E (v. problema 1.2.7), iar în al doilea caz până la tensiunea $RI = R \cdot E : (r + R)$, prin urmare,

$$q_1 = CE, \quad q_2 = C\,R\,E : (r + R) = q_1 \cdot E : (r + R), \qquad (1)$$

$$r = R(q_1/q_2 - 1) = 1{,}0\ \Omega. \qquad (2)$$

2.3.5. ***În montajul din figură*** G ***este un galvanometru balistic care indică sarcina electrică care trece prin el. Închizând întrerupătorul*** K_1 ***(cu*** K_2 ***deschis) acul galvanometrului deviază cu unghiul*** α. ***Cu ce unghi*** β ***va devia acul dacă apoi închidem*** K_2 ***?***

Rezolvare. La închiderea lui K_1, condensatorul se încarcă până la tensiunea E, deci

$$q = CE = k\alpha. \qquad (1)$$

La închiderea lui K_2 tensiunea pe condensator scade la $U = RI = RE : (r + R)$, deci condensatorul se *descarcă parţial* :

$$\Delta q = CRE : (r + R) - CE = -CEr : (r + R) =$$
$$= -q \cdot r : (r + R) = -k\alpha \cdot r : (r + R) = k\beta ,$$
$$\beta = -\alpha \cdot r : (r + R) . \qquad (2)$$

Acul va devia în sens invers cu $|\beta| < \alpha$.

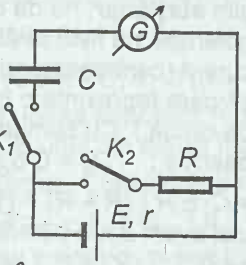


Fig.2.3.5

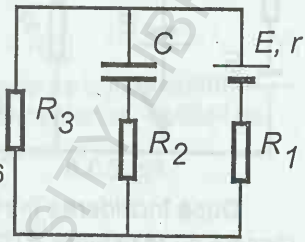


Fig.2.3.6

2.3.6. ***În montajul din figură se dau :*** E = 4,8 V, r = 1,0 Ω , R_1 = 2,0 Ω , R_2 = 3,0 Ω , R_3 = 5,0 Ω , C = 2,0 μF . ***Cu ce sarcină se încarcă condensatorul ?***

Rezolvare. Rezistenţa R_2 fiind în ***serie*** cu condensatorul influenţează numai *durata* încărcării şi nu valoarea sarcinii condensatorului, întrucât pe acest rezistor nu avem în final cădere de potenţial. Atunci: $Q = CR_3 I = CR_3 \cdot E : (r + R_1 + R_3) = 6{,}0$ μC .

2.3.7. ***În montajul din figură se dau :*** C = 23 μF, R = 20 Ω , E =12 V , r = 2,0 Ω . ***Aflaţi sarcina de pe condensator .***

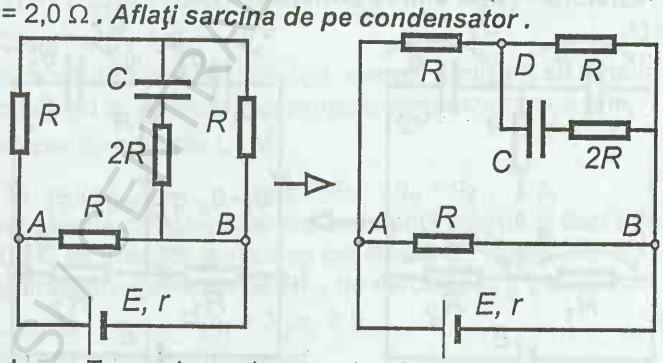


Fig.2.3.7

Rezolvare. Transcriem schema sub o formă mai comodă . Tensiunea pe condensator este U_{DB} care este jumătate din U_{AB} . Aplicăm formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*) :

$$U_{AB} = E : \{1 + r[1/R + 1/(2R)]\} = E \cdot 2R : (2R + 3r) , \qquad (1)$$
$$Q = C \cdot (1/2)\, U_{AB} = CER : (2R + 3r) = 120\ \mu C . \qquad (2)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.8. ***În montajul din figură sarcina de pe condensator este*** $Q_o = 3{,}0\ \mu C$ ***. Ce sarcină va fi pe condensator după închiderea întrerupătorului ?***

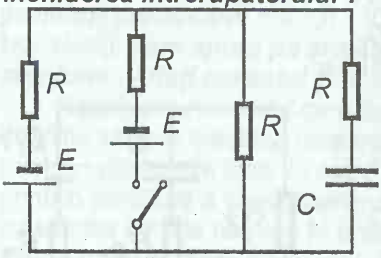


Fig.2.3.8

Rezolvare. O rezistenţă în *serie* cu un condensator, în regim **staţionar**, nu dă cădere de potenţial, ne fiind străbătută de curent (condensatorul după încărcare reprezintă o întrerupere de circuit). Cu comutatorul deschis : $Q_o = C U_o =$

$= C \cdot E R : (R + R) = (1/2)\, CE.$ (1)

După închiderea întrerupătorului avem două baterii identice (fiecare cu rezistenţa R) debitând pe R : $Q = C \cdot U = CRI =$

$= CR \cdot E : (R + R/2) = CE \cdot 2/3 = (4/3)\, Q_o = 4{,}0\ \mu C$. (2)

2.3.9. ***În montajul din figură rezistenţa internă a bateriei este neglijabilă , se cunosc*** E , $C_{1,2}$, $R_{1,2}$ ***. Aflaţi : a) Diferenţa de potenţial dintre punctele*** A, B ***, b) Sarcina care va trece prin rezistorul*** R ***, dacă unim punctele*** A, B ***, c) Variaţia energiei totale a condensatoarelor prin unirea punctelor*** A, B ***, d) Sarcina suplimentară care va trece prin baterie şi căldura degajată în rezistorul*** R ***prin unirea punctelor*** A, B .

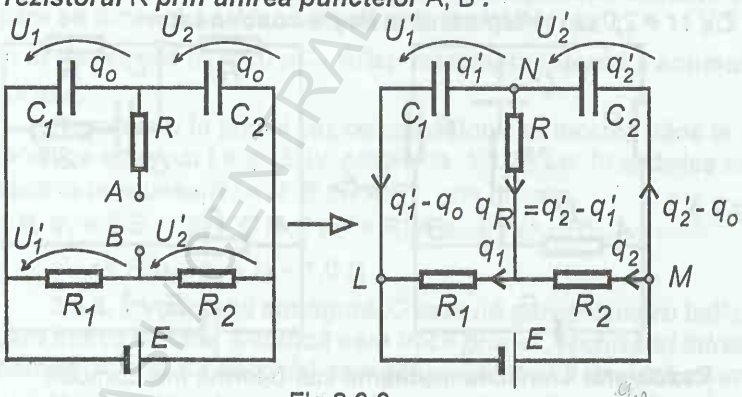


Fig.2.3.9

Rezolvare. a) Tensiunile pe condensatoarele $C_{1,2}$ şi pe rezistoarele $R_{1,2}$ se obţin imediat cu formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*) :

$$U_{1,2} = E\, C_{2,1} : (C_1 + C_2)\ ,$$

$$U'_{1,2} = E\, R_{1,2} : (R_1 + R_2)\ . \quad (1)$$

Tensiunea U_{AB} între două puncte într-o reţea se obţine cu formula cunoscută : $U_{AB} = \sum RI - \sum E + \sum (q/C)$. (2)

În cazul nostru, mergând pe drumul $R\text{-}C_{1,2}\text{-}R_{1,2}$ avem :

$$U_{AB} = U_1 - U_1' = - U_2 + U_2' =$$

$$= (C_2R_2 - C_1R_1) : [(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)] . \quad (3)$$

b) Prin unirea punctelor A, B , tensiunile pe condensatoare devin $U'_{1,2}$ şi unul din ele se încarcă suplimentar, iar celălalt se descarcă parţial . Considerând nodul N , avem :

$$q_R = q_2' - q_o - (q_1' - q_o) = q_2' - q_1' ,$$

unde sarcina iniţială q_o şi sarcinile finale sunt :

$$q_o = C_1U_1 = C_2U_2 = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)] E ,$$

$$q'_{1,2} = C_{1,2}E \cdot R_{1,2} : (R_1 + R_2) , \quad (4)$$

$$q_R = q_2' - q_1' = (C_2R_2 - C_1R_1) E : (R_1 + R_2) . \quad (5)$$

c) Variaţia energiei sistemului de condensatoare :

$$\Delta W_C = W' - W_o = (1/2)C_1U_1'^2 + (1/2)C_2U_2'^2 -$$

$$- (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)] E^2 =$$

$$= (1/2) E^2 (C_2R_2 - C_1R_1)^2 : [(C_1 + C_2) (R_1 + R_2)^2] =$$

$$= (1/2) q_R^2 : (C_1 + C_2) > 0 . \quad (6)$$

Condensatoarele în ansamblu câştigă energie furnizată de baterie .

d) Notând cu $q_{1,2}$ sarcinile suplimentare care vor trece prin $R_{1,2}$, avem pentru nodurile L , M :

$$q_E = q_1' - q_o + q_1 , \qquad q_E = q_2' - q_o + q_2 . \quad (7)$$

Ţinând seama că bateria nu are rezistenţă internă şi deci între punctele L , M se menţine tensiunea constantă E , rezultă că tensiunile suplimentare generate pe $R_{1,2}$ de sarcinile $q_{1,2}$ trebuie să dea zero , adică $R_1q_1 + R_2q_2 = 0$. (8)

Din ecuaţiile (6) , (7) rezultă imediat :

$$q_E = [R_1q_1' + R_2q_2' - q_o(R_1 + R_2)] : (R_1 + R_2) =$$

$$= E (C_2R_2 - C_1R_1)^2 : [(C_1 + C_2) (R_1 + R_2)^2] > 0 , \quad (9)$$

$$q_1 = q_R \cdot R_2 : (R_1 + R_2) , \quad q_2 = - q_R \cdot R_1 : (R_1 + R_2) \quad (10)$$

(ultimele formule corespund cu regula *bifurcaţiei* curentului prin $R_{1,2}$, v. *Breviar*).

Energia suplimentară dezvoltată de *baterie* este $\Delta W_{bat} =$

$= q_E E = E^2 (C_2R_2 - C_1R_1)^2 : [(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)^2] = 2\Delta W_C$. (11)

Jumătate din energia suplimentară dezvoltată de baterie o preiau condensatoarele, iar cealaltă *jumătate* se disipă sub formă de căldură în rezistoare. Şi anume prin rezistorul R trece sarcina q_R sub o diferenţă de potenţial (tensiune) care iniţial este U_{AB} (3), dar prin unirea punctelor A, B scade şi se anulează , deci

$$Q_R = q_R \cdot (1/2)\, U_{AB} = (1/2)\, \Delta W_{bat} = \Delta W_C \,. \qquad (12)$$

Pe rezistoarele $R_{1,2}$ căldura suplimentară totală degajată este zero, printr-un rezistor curentul creşte şi se dezvoltă căldură în plus, prin celălalt curentul scade şi se dezvoltă căldură în minus :

$$Q_{R_1} = q_1(1/2)\, U_1' = q_R\, [R_2 : (R_1 + R_2)] \cdot (1/2)\, E \cdot R_1 : (R_1 + R_2) =$$

$$= (1/2)\, [R_1R_2 : (R_1 + R_2)^3]\, E^2\, (C_2R_2 - C_1R_1)\,,$$

$$Q_{R_2} = q_2(1/2)\, U_2' = -\,(1/2)\, [R_1R_2 : (R_1 + R_2)^3]\, E^2\, (C_2R_2 - C_1R_1) =$$

$$= -\, Q_{R_1} \,. \qquad (13)$$

2.3.10. ***În montajul din figură se cunosc*** E, r, E_o , r_o , R , R_o. ***Aflaţi sarcina cu care se încarcă condensatorul*** C .

Rezolvare. După încărcarea condensatorului prin ramura acestuia nu mai circulă curent, deci vom avea două baterii în paralel a căror tensiune la borne va fi conform formulei cunoscute (v. pro-blema 2.1.74) :

$$U_{AB} = [E/(r + R) + E_o/(r_o + R_o)] : [1/(r + R) + 1/(r_o + R_o)] =$$

$$= [E(r_o + R_o) + E_o(r + R)] : (r_o + R_o + r + R) \,. \qquad (1)$$

Cum $U_{AB} = U - (-E)$, rezultă :

$$Q = CU = C(U_{AB} - E) = C\,(E_o - E)(r + R) : (r_o + r + R_o + R). \quad (2)$$

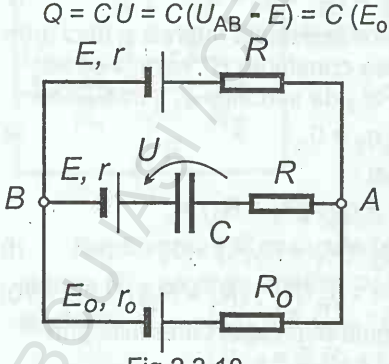


Fig.2.3.10

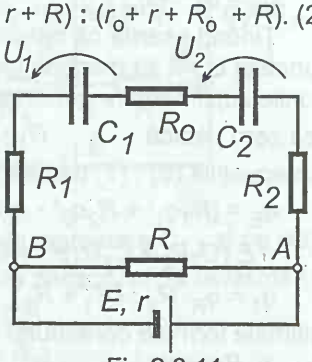


Fig.2.3.11

2.3.11. ***În montajul din figură se cunosc*** $C_{1,2}$, E . ***Dacă scurt-circuităm bateria, curentul prin baterie creşte de*** n ori . ***Aflaţi tensiunile pe condensatoare.***

Rezolvare. Rezistenţele în *serie* cu condensatoare nu dau căderi de potenţial la echilibru electrostatic (condensatoarele reprezintă o întrerupere de circuit în curent continuu) . Curentul ce trece prin baterie este $I = E : (r + R)$, dar $I_{sc} = E : r$. (1)

Punem condiţia $I_{sc} = n\, I$:

$$E : r = n\, E : (r + R) \;\Rightarrow\; R / r = n - 1 ; \qquad (2)$$

$$U_{AB} = RI = R\, E : (r + R) = E\,(n - 1) / n . \qquad (3)$$

Putem aplica formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*) :

$$U_{1,2} = U_{AB}\, C_{2,1} : (C_1 + C_2) = E\,[(n - 1) / n]\, C_{2,1} : (C_1 + C_2). \qquad (4)$$

2.3.12. ***În montajul din figură*** C = 3,0 μF , E = 2,0 V , ***rezistenţa internă a bateriilor este neglijabilă. Aflaţi sarcina condensatorului.***

Rezolvare. În ramura din mijloc, unde este condensatorul, nu circulă curent, de aceea pentru ochiul de reţea exterior avem :

$$2E - E = RI + 2RI \;\rightarrow\; E = 3RI . \qquad (1)$$

Pe de altă parte, $U_{AB} = 2RI + E = U + E \;\rightarrow\; U = 2RI$, (2)

$$Q = CU = C \cdot 2RI = C \cdot (2/3)\, E = 4{,}0\ \mu C . \qquad (3)$$

Se putea judeca şi altfel : avem două baterii în paralel cu tensiunea la borne :

$$U_{AB} = [E / (2R) + 2E / R] : [1 / (2R) + 1 / R] = (5/3)\, E , \qquad (4)$$

apoi $U_{AB} = U + E \;\rightarrow\; U = U_{AB} - E = (2/3)\, E$,

$$Q = CU = (2/3)\, CE . \qquad (5)$$

Fig.2.3.12

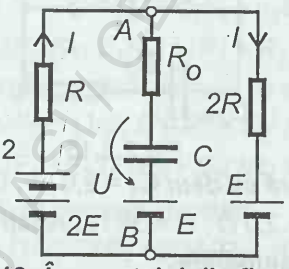
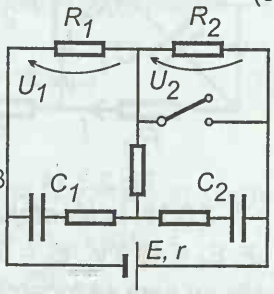


Fig.2.3.13



2.3.13. ***În montajul din figură se dau :*** r = 100 Ω , R_1 = 300 Ω, R_2 =100 Ω, C_1 = 1,00 μ , C_2 = 2,50 μ, Q_2 = 4,0 μC . ***Ce sarcină va fi pe condensatorul*** C_1 ***după închiderea întrerupătorului ?***

Rezolvare. Tensiunile de pe condensatoare sunt egale cu cele de pe rezistoarele $R_{1,2}$. Aplicăm formula *divizorului de tensiune* :

$$U_{1,2} = E \cdot R_{1,2} : (r + R_1 + R_2) , \quad (1)$$

$$Q_{1,2} = C_{1,2}U_{1,2} = C_{1,2}E \cdot R_{1,2} : (r + R_1 + R_2) . \quad (2)$$

După închiderea întrerupătorului condensatorul C_2 este scurt-circuitat , iar C_1 se va încărca până la tensiunea U_1' de pe R_1 :

$$U_1' = E \cdot R_1 : (r + R_1) \rightarrow Q_1' = C_1U_1' = C_1ER_1 : (r + R_1) . \quad (3)$$

Introducând pe E scos din (2) :

$$Q_1' = C_1 R_1 : (r + R_1) \cdot Q_2(r + R_1 + R_2) : (C_2R_2) =$$

$$= Q_2(C_1 / C_2)(R_1 / R_2)(r + R_1 + R_2) : (r + R_1) = 2{,}5 \ \mu C . \quad (4)$$

2.3.14. ***În montajul din figură se dă :*** $R_1 : R_2 = 0{,}50$ ***. Aflaţi raportul tensiunilor de pe condensatoare .***

Rezolvare. Condensatoarele reprezintă o întrerupere de circuit (în curent continuu), de aceea curentul va circula ca în figură :

$$I = E : (r + R_1 + R_2 + R_3) , \quad (1)$$

iar tensiunile pe condensatoare vor fi atunci :

$$U_1 = (R_1 + R_2) I , \qquad U_2 = R_2 I \quad (2)$$

($R_{4,5,6}$ nu dau căderi de potenţial în electrostatică) .

$$U_1 / U_2 = (R_1 + R_2) / R_2 = 1 + R_1 / R_2 = 1{,}50 . \quad (3)$$

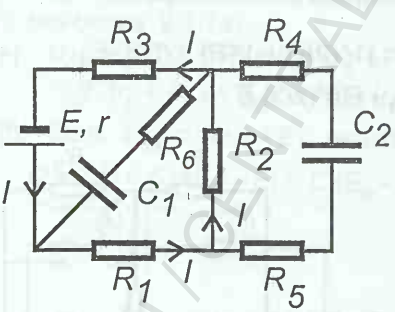


Fig.2.3.14

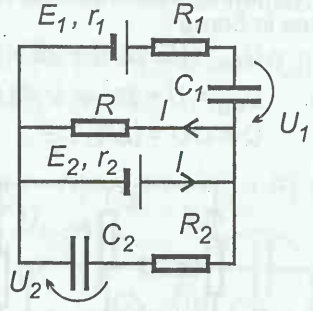


Fig.2.3.15

2.3.15. ***În montajul din figură se dau:*** $C_1 = 2{,}0$ μF, $C_2 = 5{,}0$ μF, $E_1 = 10{,}0$ V , $E_2 = 5{,}0$ V , $r_2 = 2{,}0\ \Omega$, $R = 38\ \Omega$ ***. Aflaţi sarcinile cu care se încarcă condensatoarele .***

Rezolvare. Condensatoarele reprezintă o întrerupere de circuit (pentru curent **continuu**), deci curentul va circula ca în figură :

$$I = E_2 : (r_2 + R) . \quad (1)$$

Pentru ochiul de reţea superior :

$$E_1 = U_1 + RI \rightarrow U_1 = E_1 - R \cdot E_2 : (r_2 + R) , \quad (2)$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_1 [E_1 - E_2 R : (r_2 + R)] = 10{,}0 \ \mu C . \quad (3)$$

Pentru ochiul de reţea inferior :

$$E_2 = r_2 I + U_2 \rightarrow U_2' = E_2 - r_2 I = E_2 R : (r_2 + R) , \quad (4)$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = C_2 E_2 R : (r_2 + R) = 24 \ \mu C . \quad (5)$$

2.3.16. ***În montajul din figură se dau :*** $R_1 = 10{,}0$ kΩ , $R_2 =$ $= 15{,}0$ kΩ , $C = 1{,}00$ μF , $E_1 = 34$ V , $E_2 = 16$ V . ***La un moment dat se închide întrerupătorul . Aflaţi : a) Cu cât creşte tensiunea pe condensator, b) Căldura degajată în sistem .***

Rezolvare. a) Iniţial condensatorul se încarcă până la t.e.m. E_2 , deci $q_o = C E_2 = 16 \ \mu C .$ (1)

După închiderea întrerupătorului, tensiunea $U' = U_{AB}$ este tensiunea la bornele celor două baterii legate în paralel :

$$U' = U_{AB} = (E_2 / R_2 - E_1 / R_1) : (1/R_2 + 1/R_1) =$$

$$= (E_2 R_1 - E_1 R_2) : (R_1 + R_2) = -14 \text{ V}, \quad q' = C U' = -14 \ \mu C , (2)$$

$q_R = q' - q = C(U' - E_2) = -C(E_1 + E_2) \cdot R_2 : (R_1 + R_2) = -30 \ \mu C , (3)$ condensatorul se descarcă şi se reîncarcă invers .

b) Ţinând seama de *principiul suprapunerii* şi de formula bifurcaţiei curentului (v. *Breviar*) , avem condiţia :

$$q_{1,2} = - q_R \cdot R_{2,1} : (R_1 + R_2) , \quad (4)$$

unde $q_{1,2}$ sunt sarcinile *suplimentare* care vor trece după închiderea întrerupătorului . Atunci energia suplimentară dezvoltată de baterii va fi : $W_{bat} = q_1 E_1 - q_2 E_2 =$

$$= q_R (E_2 R_1 - E_1 R_2) : (R_1 + R_2) = q_R U' = 420 \ \mu J . \quad (5)$$

Energia condensatorului se schimbă cu

$$\Delta W_C = (1/2) \, C \, (U'^2 - E_2^2) =$$

$$= (1/2) \, C \, (E_1 + E_2)[E_1 R_2 - E_2 (2R_1 + R_2)] R_2 : (R_1 + R_2)^2 = -30 \ \mu J . (6)$$

Căldura disipată în sistem : $Q_J = W_{bat} - \Delta W_C =$

$$= (1/2) \, C (E_1 + E_2)^2 \, [R_2 : (R_1 + R_2)]^2 = 450 \ \mu J . \quad (7)$$

2.3.17. ***Se dă montajul din figură în care :*** $C = 4{,}0$ μF , $C_o =$ $= 2{,}00$ μF , $R_1 = 100$ Ω , $R_2 = 300$ Ω , $E_1 = 10{,}0$ V , $E_2 = 15{,}0$ V. ***Aflaţi sarcinile condensatoarelor şi polarităţile armăturilor.***

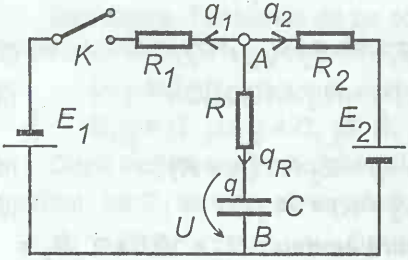


Fig.2.3.16

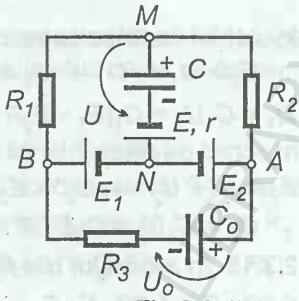


Fig.2.3.17

Rezolvare. Sunt de bănuit polarităţile menţionate pe figură, fapt care se verifică prin calcul. Tensiunea pe condensatorul C_o este

$$U_o = U_{AB} = -(-E_2) - E_1 = E_2 - E_1 , \quad (1)$$

$$q_o = C_o U_o = C_o(E_2 - E_1) = 10\ \mu C . \quad (2)$$

Cele două baterii $E_{1,2}$ sunt legate în paralel şi tensiunea la bornele lor este : $U_{MN} = (E_1 / R_1 + E_2 / R_2) : (1/R_1 + 1/R_2) =$

$$= (E_1 R_2 + E_2 R_1) : (R_1 + R_2) . \quad (3)$$

Tensiunea la bornele condensatorului C rezultă din

$$U_{MN} = U - E \rightarrow U = U_{MN} + E , \quad (4)$$

$$q = CU = C(U_{MN} + E) = C[(E_1 R_2 + E_2 R_1) : (R_1 + R_2) + E] =$$

$$= 65\ \mu C . \quad (5)$$

2.3.18. ***În montajul din figură se cunosc :*** $C_{1,2}$, E . ***Dacă se scurt-circuitează bateria , curentul prin baterie creşte de*** n ori. ***Aflaţi tensiunile pe condensatoare.***

Rezolvare. Curentul circulă numai prin E şi R :

$$I = E : (r + R) , \quad I_{sc} = E : r , \quad (1)$$

$$I_{sc} = n I \rightarrow R / r = n - 1 . \quad (2)$$

Putem aplica formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*) :

$$U_{1,2} = U_{AB} \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) = RI \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) =$$

$$= [RE : (r + R)]\ C_{2,1} : (C_1 + C_2) = E\ [(n - 1) : n]\ [C_{2,1} : (C_1 + C_2)]. \quad (3)$$

2.3.19. ***În montajul din figură se dau :*** E , $R_{1,2,3}$. ***Aflaţi intensitatea curentului prin baterie imediat după închiderea întrerupătorului, cât şi după un timp suficient de*** **lung .**

Rezolvare. Un condensator conectat într-un circuit, atâta timp cât rămâne ***neîncărcat*** , nu prezintă între armături o diferenţă de potenţial, deoarece pentru un condensator avem $U = Q : C$, deci

armăturile sale pot fi unite în acel moment, prin aceasta nu se schimbă distribuţia potenţialului, prin urmare, în primul moment când condensatorul este încă *neîncărcat*, el constituie un scurt-circuit, dar **imediat** după aceasta va prezenta o diferenţă de potenţial între armături pe măsură ce se încarcă : $u = q : C$.

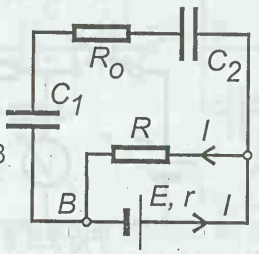


Fig.2.3.18

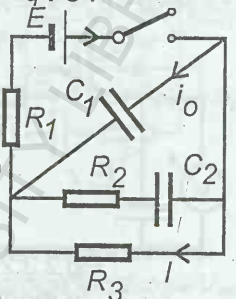


Fig.2.3.19

Revenim la problemă. Imediat la închiderea întrerupătorului condensatoarele $C_{1,2}$ constituie un scurt-circuit, din care C_2 iese din joc fiind scurt-circuitat de C_1 , prin urmare vom avea curent doar prin baterie şi R_1 : $i_o = E : R_1$. (1)

Cum începe să se încarce C_1 , va începe să se încarce şi C_2 şi în final curentul va trece doar prin E , $R_{3,1}$: $I = E : (R_3 + R_1)$. (2)

(La *echilibru* electrostatic sau în c.c. condensatoarele reprezintă o întrerupere de circuit.)

2.3.20. ***În montajul din figură se dau:*** R_1 =1,00 Ω, R_2 = 3,00 Ω. ***Imediat după închiderea întrerupătorului voltmetrul (ideal) arată*** u_o = 6,00 V, ***iar după un timp mai îndelungat*** U = 9,6 V . ***Aflaţi indicaţia voltmetrului cu întrerupătorul deschis, precum şi rezistenţa internă a bateriei .***

Rezolvare. Cu întrerupătorul deschis voltmetrul (ideal) arată tensiunea la bornele bateriei în circuit exterior deschis, deci E . Imediat cum închidem întrerupătorul, pe condensator tensiunea fiind zero (condensator iniţial neîncărcat), el reprezintă în acest moment un scurt-circuit şi curentul va trece prin E , R_1 , C (şi nu prin R_2) : $i_o = E : (r + R_1)$, $u_o = E - i_o r = R_1 i_o = E R_1 : (r + R_1)$. (1)

După trecerea unui timp mai îndelungat condensatorul se încarcă şi atunci constituie o întrerupere de circuit şi curentul va trece prin E , $R_{1,2}$: $I = E : (r + R_1 + R_2)$,

$U = (R_1 + R_2) I = E (R_1 + R_2) : (r + R_1 + R_2)$. (2)

Din (1) , (2) rezultă :

$$r + R_1 = E\,R_1 : u_o\,, \quad r + R_1 + R_2 = E\,(R_1 + R_2) : U\,,$$

$$R_2 = E\,[(R_1 + R_2) : U - R_1 : u_o] \rightarrow E = R_2 : [(R_1 + R_2) : U - R_1 : u_o] =$$

$$= u_o U R_2 : [u_o(R_1 + R_2) - U R_1] = 12{,}0 \text{ V}\,. \qquad (3)$$

$$r = R_1(E : u_o - 1) = R_1(R_1 + R_2)(U - u_o) : [(R_1 + R_2)u_o - R_1 U] = \qquad (4)$$

$$= 1{,}00\ \Omega.$$

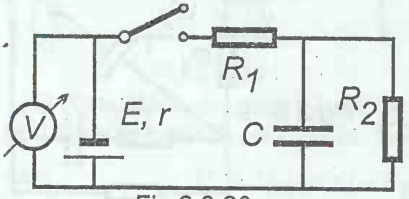


Fig.2.3.20

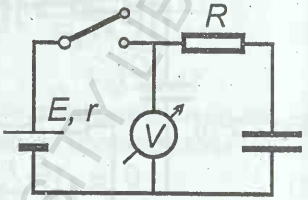


Fig.2.3.21

2.3.21. ***În montajul din figură se cunosc :*** $R = 4{,}00$ kΩ ***şi*** $R_V = 6{,}00$ kΩ ***(rezistenţa voltmetrului). Imediat după închiderea întrerupătorului voltmetrul indică*** $u_o = 10{,}0$ V***, iar după un timp mai lung indică*** $U = 20{,}0$ V ***. Aflaţi t.e.m.*** E ***şi rezistenţa internă*** r ***ale bateriei .***

Rezolvare. Imediat după închiderea întrerupătorului condensatorul se prezintă ca un scurt-circuit, el ne fiind încărcat ($u = q / C$). Aplicăm formula *divizorului de tensiune* (v. Breviar) :

$$u_o = E : [1 + r\,(1/R + 1/R_V)\,]. \qquad (1)$$

După trecerea unui timp mai lung condensatorul se încarcă şi reprezintă atunci o întrerupere de circuit :

$$U = E : (1 + r/R_V)\,. \qquad (2)$$

Din aceste două ecuaţii rezultă :

$$1 + r\,(1/R + 1/R_V) = E/u_o\,,\ 1 + r/R_V = E/U\,, \qquad (3)$$

$$r = RR_V(U - u_o) : [(R + R_V)u_o - RU\,] = 12\ \Omega\,,$$

$$E = u_o U R_V : [u_o(R + R_V) - U\,R] = 60 \text{ V}\,. \qquad (4)$$

2.3.22. ***Trei condensatoare identice, fiecare de capacitate*** C ***, sunt legate în serie şi încărcate la o tensiune*** U ***. După încărcarea lor se conectează simultan două rezistoare identice, fiecare de rezistenţă*** R ***. Câtă căldură se degajă pe fiecare rezistor ? Ce curent va trece prin rezistoare în momentul când tensiunea la bornele condensatorului mijlociu este*** $U_m = U/n$, $(n > 9)$ ***?***

Rezolvare. După închiderea întrerupătoarelor condensatoarele exterioare se vor descărca peste cel mijlociu, care se va descăr-

ca şi reîncărca până la o tensiune U' comună celor 3 condensatoare . Legea *conservării sarcinii* pentru nodul A dă :

$$2q_o - q_o = q_o = C \cdot U/3 = 3q' = 3CU' \rightarrow U' = U/9 . \quad (1)$$

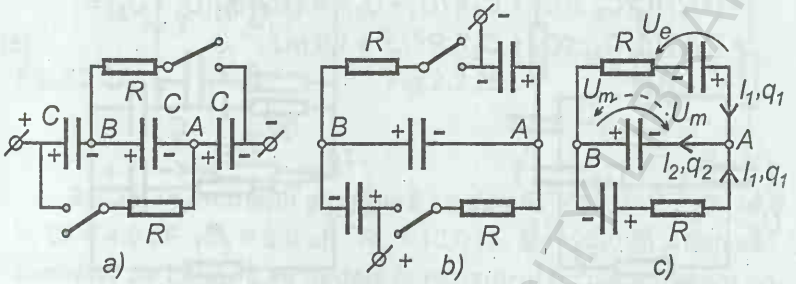


Fig.2.3.22

Condensatorul mijlociu se descarcă (de la tensiunea $U/3$) şi se reîncarcă până la tensiunea $U' = U/9$, deci atinge tensiunea U_m de două ori (cu semne opuse). Conform figurii, pentru ochiul de reţea superior avem : $\quad R I - U_e \mp U_m = 0 , \quad (1)$

Iar pentru nodul A conservarea sarcinii electrice dă :

$$2CU_e \mp CU_m = q_o = CU/3 \text{ sau } U_e \mp (1/2)U_m = U/6 . \quad (2)$$

Adunând ultima ecuaţie cu (1) obţinem : $\quad RI \mp (3/2)U_m = U/6 ,$

$$I = (1/R)(U/6 \pm (3/2)U_m] = [U/(2R)]\,(n \pm 9)/(3n) . \quad (3)$$

2.3.23. ***În montajul din figură*** $C_1 = 20\ \mu F$, $C_2 = 60\ \mu F$, $R = 80\ \Omega$. ***În momentul închiderii întrerupătorului curentul este*** $i_o = 0{,}20$ A. ***Aflaţi : a) Sarcina care trece prin rezistorul*** R, ***b) Căldura degajată în rezistor.***

Rezolvare. a) În momentul închiderii întrerupătorului avem :

$$U_2 + R I_o - U_1 = 0 \rightarrow I_o = (1/R)(U_1 - U_2), \quad (1)$$

$$q_1 = C_1U_1 , \qquad q_2 = C_2U_2 . \quad (2)$$

Condensatoarele se descarcă, unul pe celălalt, până ajung la o tensiune comună U'. *Conservarea sarcinii* electrice se scrie :

$$q_1 + q_2 = C_1U_1 + C_2U_2 = C_1U' + C_2U' \rightarrow$$

$$U' = (C_1U_1 + C_2U_2) : (C_1 + C_2) . \quad (3)$$

Sarcina care trece prin rezistor : $\quad q_R = q_1 - q_1' =$

$$= C_1(U_1 - U') = [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(U_1 - U_2) =$$

$$= [C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,R\,I_o = 0{,}24 \text{ mC} . \quad (4)$$

b) **Căldura** degajată rezultă din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$Q_J = W_o - W' = (1/2)\,C_1U_1^2 + (1/2)\,C_2U_2^2 - (1/2)(C_1 + C_2)U'^2 =$$

$$= (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,(U_1 - U_2)^2 = (1/2)\,q_R\,(U_1 - U_2) =$$

$$= (1/2)\,[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\,R^2 I_o^2 = 1{,}9 \text{ mJ} . \qquad (5)$$

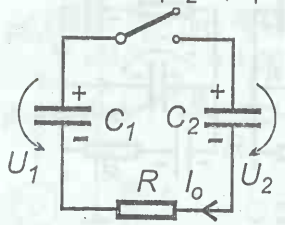


Fig.2.3.23

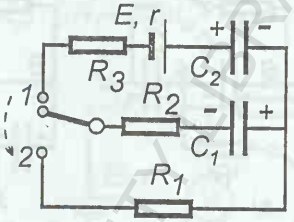


Fig.2.3.24

2.3.24. ***În montajul din figură se cunosc :*** $C_1 = 5{,}0\ \mu F$, $C_2 = 10{,}0\ \mu F$, $E = 300$ V, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$. ***Câtă căldură se degajă în rezistorul*** R_1 ***după comutarea comutatorului ?***

Rezolvare. În poziţia iniţială *1* cele două condensatoare în serie se încarcă la tensiunea *E* (rezistenţele în serie $R_{2,3}$ nu mai dau cădere de potenţial). Aplicăm formula *divizorului de tensiune* :

$$U_{1,2} = E \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) , \qquad W_1 = (1/2)C_1U_1^2 . \qquad (1)$$

Prin comutarea pe poziţia *2* condensatorul C_1 se va descărca prin rezistoarele $R_{1,2}$. Deoarece în fiecare moment prin rezistoarele $R_{1,2}$ legate în **serie** trece acelaşi curent de descărcare, puterile şi căldurile degajate sunt proporţionale cu rezistenţele (Ri^2), deci

$$Q_{J1} = W_1 \cdot R_1 : (R_1 + R_2) = (1/2)\,C_1U_1^2\,R_1 : (R_1 + R_2) =$$

$$= (1/2)\,C_1E^2[C_2 : (C_1 + C_2)]^2\,[R_1 : (R_1 + R_2)] = 40 \text{ mJ} . \qquad (3)$$

2.3.25. ***În montajul din figură se dau :*** $C = 10\ \mu F$ ***, sarcina pe condensator*** $q = 100\ \mu C$ ***. În rezistorul*** R ***se degajă o putere*** $P = 100$ W ***, iar curentul de scurt-circuit al bateriei este*** $I_{sc} = 20$ A ***. Aflaţi t.e.m. a bateriei .***

Rezolvare. Prin ramura cu condensator nu circulă curent :

$$I = E : (r + R) , \quad U = R\,I = E\,R : (r + R) , \qquad (1)$$

$$q = CU , \quad P = U^2 : R , \quad R = U^2 : P = q^2 : (C^2P) , \qquad (2)$$

$$I_{sc} = E : r \ \rightarrow \ r = E : I_{sc} , \qquad (3)$$

$$P = UI = (q/C)\,E : [E/I_{sc} + q^2/(C^2P)] \ \rightarrow$$

$$E = q^2 I_{sc} : [C(qI_{sc} - CP)] = 20 \text{ V} . \qquad (4)$$

Fig.2.3.25

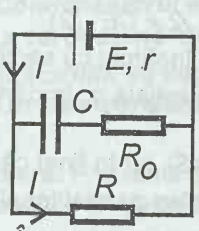
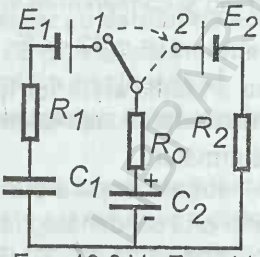


Fig.2.3.26



2.3.26. ***În montajul din figură se dau*** $E_1 = 10{,}0$ V , $E_2 = 14{,}0$ V, $C_1 = 4{,}0\ \mu$F , $C_2 = 6{,}0\ \mu$F, $R_o = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 20{,}0\ \Omega$. ***Aflaţi ce cantitate de căldură se degajă în rezistorul*** R_o ***dacă trecem comutatorul de pe poziţia*** 1 ***pe poziţia*** 2 **.**

Rezolvare. Pe poziţia *1* se încarcă condensatoarele legate în serie : $U_2 = E_1 \cdot C_1 : (C_1 + C_2)$, $q_2 = C_2 U_2$. (1)

În poziţia *2* condensatorul C_2 se încarcă suplimentar până la tensiunea E_2 . Sarcina suplimentară care trece prin circuit :

$$\Delta q = q_2' - q_2 = C_2(E_2 - U_2) . \quad (2)$$

Bilanţul **energiilor** este următorul :

$$W_o = (1/2)\, C_2 U_2^2 , \quad W' = (1/2)\, C_o E_2^2 , \quad W_{bat} = \Delta q E_2 , \quad (3)$$

$$Q_J = W_o + W_{bat} - W' = (1/2)\, C_2 (U_2^2 - E_2^2) +$$

$$+ C_2(E_2 - U_2) E_2 = (1/2)\, C_2 (E_2 - U_2)^2 . \quad (4)$$

Această căldură se disipă pe rezistoarele R_o , R_2 legate în **serie**, deci proporţional cu rezistenţele lor :

$$Q_{Jo} = Q_J \cdot R_o : (R_o + R_2) =$$

$$= (1/2)\, C_2 [E_2 - E_1 C_1 : (C_1 + C_2)]^2 R_o : (R_o + R_2) = 100\ \mu\text{J}. \quad (5)$$

2.3.27. ***În montajul din figură t.e.m.*** $E = 10{,}0$ V, $C = 1{,}00\ \mu$F, ***armătura stângă a condensatorului plan cu aer are sarcina zero, iar cea dreaptă este încărcată cu sarcina*** q_o ***. Aflaţi această sarcină ştiind că prin închiderea întrerupătorului se degajă în rezistorul*** R ***tot atâta căldură ca şi în cazul când condensatorul ar fi iniţial neîncărcat.***

Rezolvare. După închiderea întrerupătorului sarcinile pe armături vor fi $q_{1,2}$ şi tensiunea dintre armături E , deci câmpul $E = U/d$. Ştiind formula câmpului produs în vecinătatea unei plăci încărcate şi aplicând *principiul suprapunerii*, putem scrie condiţia :

$E / d = q_2 : (2\varepsilon S) - q_1 : (2\varepsilon S) \rightarrow q_2 - q_1 = 2\varepsilon SE / d = 2CE$, (1)

scriind şi conservarea sarcinii, rezultă : $q_1 + q_2 = q_o \rightarrow$

$$q_1 = q_o / 2 - CE , \qquad q_2 = q_o / 2 + CE . \quad (2)$$

În absenţa lui q_o, armăturile s-ar fi încărcat cu sarcinile $\pm CE$, peste care se suprapune acum sarcina iniţială q_o împărţită simetric pe armături .

Iniţial câmpul electric este $q_o : (2\varepsilon S)$, iar în final câmpul din exteriorul condensatorului (considerat plan-paralel ideal) nu se schimbă, iar în interior devine E / d ;

$$E_{ext} = q_1 : (2\varepsilon S) + q_2 : (2\varepsilon S) = q_o : (2\varepsilon S) ,$$

$$E_{int} = q_2 : (2\varepsilon S) - q_1 : (2\varepsilon S) = E / d. \quad (3)$$

Deoarece câmpul din exterior nu se schimbă, înseamnă că nici energia câmpului din exterior nu intervine în bilanţ . Prin urmare, variaţia energiei condensatorului se datorează numai schimbării câmpului dintre armături. Ştiind densitatea de energie a câmpului electric $w = (1/2)\varepsilon E^2$, avem

$$\Delta W = (1/2)\varepsilon(E / d)^2 Sd - (1/2)\varepsilon[q_o : (2\varepsilon S)]^2 Sd =$$

$$= (1/2) CE^2 - q_o^2 : (8C) . \quad (4)$$

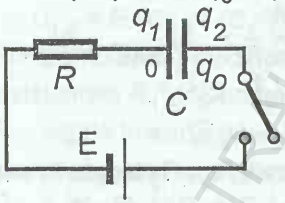


Fig.2.3.27

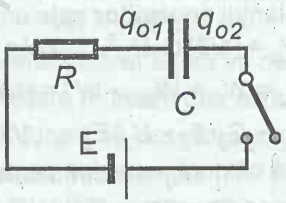


Fig.2.3.28

Sarcina care va trece prin circuit :

$$\Delta q = q_2 - q_o = q_o / 2 + CE - q_o = CE - q_o / 2 , \quad (5)$$

deci **lucrul mecanic** efectuat de baterie :

$$W_{bat} = \Delta q\, E = (CE - q_o / 2)\, E . \quad (6)$$

Facem *bilanţul energiilor* : $W_{bat} = \Delta W + Q_J$

sau $Q_J = W_{bat} - \Delta W = (1/2) CE^2 + (1/2) q_o [q_o / (4C) - E] . \quad (7)$

Dar conform enunţului, căldura degajată este aceeaşi ca şi în cazul când condensatorul ar fi iniţial neîncărcat, deci facem mai sus $q_o = 0$:

$$(1/2) CE^2 + (1/2) q_o [q_o / (4C) - E] = (1/2) CE^2 \rightarrow$$

$$q_o = 4\, CE = 40\ \mu C . \quad (8)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.3.28. ***În montajul din figură se cunosc :*** $E = 10$ V şi $C = 1{,}0\ \mu$F. ***Condensatorul este iniţial încărcat cu sarcini de acelaşi semn a căror sumă*** $q_{o1} + q_{o2} = q_o = 80\ \mu$C. ***După închiderea întrerupătorului se degajă pe rezistor tot atâta căldură, ca şi în cazul în care condensatorul n-ar fi încărcat. Aflaţi sarcinile iniţiale*** $q_{o1,2}$.

Rezolvare. Problema este o generalizare a celei precedente 2.3.27. Sarcinile finale pe armături vor fi $q'_{1,2}$ şi tensiunea dintre armături E, deci câmpul din condensator E / d. Câmpul electric produs în vecinătatea unui plan încărcat este $q / (2\varepsilon S)$ şi aplicând *principiul suprapunerii*, putem scrie pentru câmpul dintre armături :

$$E / d = q_2 / (2\varepsilon S) - q_1 / (2\varepsilon S) \rightarrow q_2 - q_1 = 2\varepsilon SE / d = 2CE\ , \qquad (1)$$

dar din *conservarea sarcinii* electrice rezultă :

$$q_1 + q_2 = q_{o1} + q_{o2} = q_o\ . \qquad (2)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă :

$$q_1 = q_o / 2 - CE\ , \qquad q_2 = q_o / 2 + CE\ . \qquad (3)$$

În absenţa sarcinilor iniţiale, armăturile s-ar fi încărcat cu sarcinile $\pm CE$, care se suprapun acum peste sarcinile iniţiale repartizate simetric pe armături.

Câmpul din **exteriorul** condensatorului (considerat plan-paralel ideal) nu se schimbă :

$$E_{ext} = q_1 : (2\varepsilon S) + q_2 : (2\varepsilon S) = q_{o1} : (2\varepsilon S) + q_{o2} : (2\varepsilon S) =$$
$$= q_o : (2\varepsilon S) = E_{o\,ext}\ , \qquad (4)$$

$$E_{int} = q_2 : (2\varepsilon S) - q_1 : (2\varepsilon S) = E / d\ ,$$

$$E_{o\,int} = q_{o2} : (2\varepsilon S) - q_{o1} : (2\varepsilon S) = (q_{o2} - q_{o1}) : (2\varepsilon S)\ . \qquad (5)$$

Pentru *bilanţul* ***energetic*** intervine deci doar variaţia energiei câmpului dintre armături. Ştiind formula densităţii de energie $w = (1/2)\varepsilon E^2$, putem scrie :

$$\Delta W = (1/2)\varepsilon (E / d)^2 Sd - (1/2)\varepsilon [(q_{o2} - q_{o1}) : (2\varepsilon S)]^2 Sd =$$
$$= (1/2)\, CE^2 - (q_{o2} - q_{o1})^2 : (8C)\ . \qquad (6)$$

Sarcina care va trece prin circuit : $\Delta q = q_2 - q_{o2} =$

$$= (q_{o1} + q_{o2})/2 + CE - q_{o2} = CE - (q_{o2} - q_{o1})/2\ , \qquad (7)$$

deci **lucrul mecanic** efectuat de baterie :

$$W_{bat} = \Delta q\, E = CE^2 - (q_{o2} - q_{o1})\, E/2\ . \qquad (8)$$

Căldura degajată se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$Q_J = W_{bat} - \Delta W = (1/2)\, CE^2 - (q_{o2} - q_{o1})\, E/2 +$$

$$+ (1/2)\, (q_{o2} - q_{o1})^2 : (4C) . \qquad (9)$$

Conform enunţului această căldură trebuie să fie aceeaşi ca şi în absenţa sarcinilor iniţiale, deci facem mai sus $q_{o1,2} = 0$ şi avem condiţia $Q_J = Q_{Jo} \rightarrow -(1/2)\,(q_{o2} - q_{o1})\,[E - (q_{o2} - q_{o1}) : (4C)] = 0$, ceea ce implică ori $q_{o1} = q_{o2} = q_o/2 = 40\ \mu C$, (10)

ori $q_{o2} - q_{o1} = 4CE$, dar $q_{o2} + q_{o1} = q_o$, deci

$q_{o1} = q_o/2 - 2\,CE = 20\ \mu C$, $q_{o2} = q_o/2 + 2\,CE = 60\ \mu C$.(11)

Pentru ca $q_{o1} \geq 0$ trebuie ca $q_o \geq 4CE$.

2.3.29. ***În montajul din figură se dau :*** $C_1 = 4{,}0\ \mu F$, $C_2 = 6{,}0\ \mu F$, $E = 10{,}0$ V. ***Aflaţi căldura totală degajată după închiderea întrerupătorului .***

Rezolvare. Iniţial condensatoarele (în serie) se încarcă până la tensiunile (avem un *divizor de tensiune*) :

$$U_{1,2} = E \cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2) . \qquad (1)$$

Prin închiderea întrerupătorului condensatorul C_2 se descarcă prin rezistor, iar C_1 se încarcă suplimentar până la tensiunea E . Observăm că rezistoarele în **serie** cu condensatoare în *electrostatică* nu dau căderi de potenţial, fiindcă nu mai trece curent prin ele, rezistoarele influenţează durata încărcării sau descărcării condensatoarelor . Prin baterie va trece deci sarcina :

$$q_E = C_1(E - U_1) = C_1E \cdot C_1 : (C_1 + C_2) \qquad (2)$$

şi bateria va efectua lucrul mecanic :

$$W_{bat} = q_E\, E = C_1^2E^2 : (C_1 + C_2) . \qquad (3)$$

Variaţia energiei celor două condensatoare :

$$\Delta W = (1/2)C_1E^2 - (1/2)C_1U_1^2 - (1/2)C_2U_2^2 = (1/2)C_1E^2 -$$

$$- (1/2)[C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\, E^2 = (1/2)C_1^2E^2 : (C_1 + C_2) = (1/2)\, W_{bat} .(4)$$

Căldura degajată rezultă din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$Q_J = W_{bat} - \Delta W = (1/2)\, W_{bat} = (1/2)C_1^2E^2 : (C_1 + C_2) = 80\ \mu J . \qquad (5)$$

Observăm că *jumătate* din energia dezvoltată de baterie o preiau condensatoarele şi *jumătate* se disipă sub formă de căldură, indiferent de valoarea rezistenţelor, care influenţează durata încărcării sau descărcării (***constanta de timp*** $\tau = RC$) .

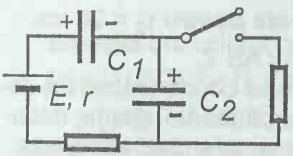


Fig.2.3.29

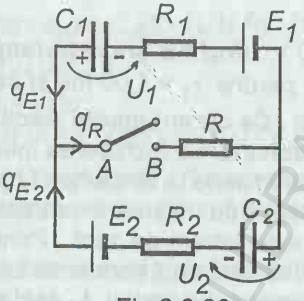


Fig.2.3.30

2.3.30. ***În montajul din figură se dau:*** R = 800 Ω , E_1 = 10,0 V; E_2 = 20,0 V , C_1 = 1,00 μF , C_2 =2,00 μF . ***Aflaţi ce sarcină va trece prin rezistorul*** R ***şi ce căldură totală se degajă în sistem după închiderea întrerupătorului .***

Rezolvare. Iniţial avem pentru ochiul exterior de reţea :

$$U_1 - (-E_1) + U_2 - E_2 = 0\,, \quad C_1U_1 = C_2U_2\,, \tag{1}$$

$$U_{1,2} = (E_2 - E_1)\cdot C_{2,1} : (C_1 + C_2)\,. \tag{2}$$

Prin închiderea întrerupătorului condensatorul C_1 se va reîncărca schimbându-şi polaritatea, până la tensiunea E_1, iar condensatorul C_2 se va încărca suplimentar până la tensiunea E_2 . Sarcinile care vor trece prin baterii sunt :

$$q_{E_1} = C_1U_1 + C_1E_1 = C_1(C_2E_2 + C_1E_1) : (C_1 + C_2)\,,$$

$$q_{E_2} = C_2E_2 - C_2U_2 = C_2(C_2E_2 + C_1E_1) : (C_1 + C_2)\,, \tag{3}$$

$$q_R = q_{E_1} + q_{E_2} = C_1E_1 + C_2E_2 = 50\ \mu C\,. \tag{4}$$

Lucrul mecanic efectuat de baterie este :

$$W_{bat} = q_{E_1}E_1 + q_{E_2}E_2 = (C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2) =$$

$$= q_R^2 : (C_1 + C_2)\,. \tag{5}$$

Variaţia **energiei** condensatoarelor :

$$\Delta W_C = (1/2)\,C_1E_1^2 + (1/2)\,C_2E_2^2 - (1/2)\,C_1U_1^2 - (1/2)\,C_2U_2^2 =$$

$$= (1/2)(C_1E_1 + C_2E_2)^2 : (C_1 + C_2) = (1/2)\,W_{bat}\,. \tag{6}$$

Căldura totală degajată se obţine din *bilanţul energiilor* :

$$Q_J = W_{bat} - \Delta W_C = (1/2)\,W_{bat} = 0{,}41\ \text{mJ}\,. \tag{7}$$

$$Q_J = (1/2)\,q_R\,U_{AB}\,. \tag{8}$$

2.3.31. ***În montajul dn figură se dau:*** R = 100 Ω, C = 10,0 μ,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

U = 10,0 V , ***firul*** AB ***are rezistenţa neglijabilă . Întrerupătorul se închide pentru*** τ_1 = 1,00 ms ***şi se deschide pentru*** τ_2 = 20 ms, ***periodic . Ce curent*** **mediu** ***trece prin firul*** AB ***?***

Rezolvare. La închiderea întrerupătorului condensatoarele devin legate în *serie* la tensiunea U şi se încarcă foarte repede, deoarece curentul de încărcare nu trece prin rezistoare, deci constanta de timp este extrem de mică . Prin urmare, prin firul AB va trece de la B la A sarcina unui condensator $CU/2$. În afară de aceasta trece permanent curentul I , deci pe timpul închiderii trece sarcina:

$$I\tau_1 - CU/2 = [U/(2R)]\,\tau_1 - CU/2 . \qquad (1)$$

După deschiderea întrerupătorului condensatoarele se descarcă, fiecare pe rezistenţa sa R . Dar deoarece τ_2 este mult mai mare decât durata descărcării, dată aproximativ de *constanta de timp* RC = 1,0 ms , înseamnă că practic condensatoarele se descarcă complet şi prin firul AB va trece sarcina fiecărui condensator, deci $2CU/2$.

Curentul mediu este prin definiţie sarcina care trece prin conductor raportată la intervalul respectiv de timp :

$$\langle I \rangle = \{[U:(2R)]\,\tau_1 - (1/2)CU + 2CU/2\} : (\tau_1 + \tau_2) =$$
$$= [U:(2R)]\,(\tau_1 + RC) : (\tau_1 + \tau_2) = 4{,}8 \text{ mA} . \qquad (2)$$

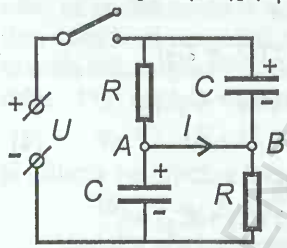


Fig.2.3.31

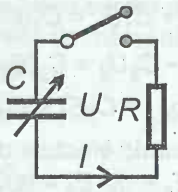


Fig.2.3.32

2.3.32. ***Un condensator variabil, cu capacitatea iniţială*** C_0 ***, încărcat iniţial până la tensiunea*** U, ***este conectat la bornele unui rezistor*** R . ***Cum trebuie variată capacitatea condensatorului pentru ca prin circuit să treacă un curent*** **constant** ***? Ce putere dezvoltă forţele exterioare ?***

Rezolvare. Deoarece curentul prin rezistor $I = U/R$ = const, trebuie ca tensiunea comună a condensatorului şi rezistorului să rămână *constantă* U. Dar iniţial $U = q_0/C_0$. Dacă condensatorul se descarcă în timpul t cu Δq , atunci

$$U = q_0/C_0 = (q_0 - \Delta q) : C , \quad \text{dar} \quad \Delta q = It = (U/R)\,t , \qquad (1)$$

$$C = C_o\,(q_o - \Delta q) : q_o = C_o(1 - \Delta q : q_o) = C_o[1 - (Ut/R) : (C_oU)] =$$
$$= C_o[1 - t/(RC_o)]\,. \qquad (2)$$

Energia dezvoltată din exterior este :

$$W = (1/2)CU^2 - (1/2)C_oU^2 + RI^2\,t = (1/2)(-t/R)\,U^2 + RI^2\,t =$$
$$= (1/2)\,(U^2/R)\,t\,, \qquad P = W/\,t = (1/2)\,U^2/R = \text{const}\,. \qquad (3)$$

Cealaltă *jumătate* din energia disipată pe rezistor o furnizează condensatorul a cărui energie scade .

2.3.33. ***În circuitul din figură se cunosc rezistenţele*** $R_{1,2,3}$, ***capacitatea*** C ***şi tensiunea aplicată*** U . ***a) Aflaţi potenţialul punctului A imediat după deschiderea întrerupătorului , precum şi după un timp mai îndelungat. b) Aflaţi căldura degajată în*** R_3 , ***în ultimul caz.***

Rezolvare. a) Iniţial potenţialul punctului A este

$$V_o = U \cdot R_2 : (R_1 + R_2) = U_C\,, \qquad (1)$$

egal cu tensiunea iniţială a condensatorului. Imediat după deschiderea întrerupătorului, condensatorul începe să se încarce suplimentar (până la tensiunea finală *U*), va trece un curent

$$I_o = (U - U_C) : (R_1 + R_3)\,, \qquad (2)$$

care dă căderi de potenţial pe $R_{1,3}$. Potenţialul punctului A va fi în acest moment : $V_o' = U - R_1I_o = U_C + R_3I_o =$

$$= U\,(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) : [(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)] < U\,, \qquad (3)$$

deci suferă un salt : $V_o' - V_o = U\,R_1R_3 : [(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)]$. (4)

De exemplu, dacă rezistenţele sunt egale, $V_o = U/2$ şi $V_o' = 3U/4$.

b) Prin sursă şi prin condensator va trece sarcina :

$$\Delta q = C(U - U_C) = CU \cdot R_1 : (R_1 + R_2)\,. \qquad (5)$$

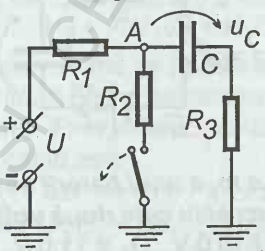


Fig.2.3.33

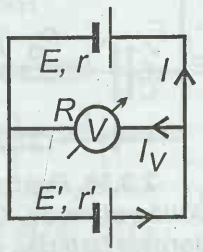


Fig.2.3.34

Căldura totală degajată (pe $R_{1,3}$) rezultă din *bilanţul energiilor:*

$$Q_J = W_{bat} - \Delta W_C = \Delta q\,U - (1/2)\,C(U^2 - U_C^2) =$$
$$= (1/2)\,CU^2\,[R_1 : (R_1 + R_2)]^2 \qquad (6)$$

din care o fracţiune $R_3/(R_1 + R_3)$ se degajă în R_3 .

2.3.34. ***Un acumulator cu t.e.m.*** $E = 12$ V ***şi rezistenţa internă*** $r = 0{,}10\ \Omega$ ***este încărcat de la un generator cu t.e.m.*** $E' = 13$ V ***şi rezistenţa internă*** $r' = 0{,}40\ \Omega$. ***Pentru controlul tensiunii, la bornele acumulatorului s-a montat un voltmetru cu rezistenţa*** $R = 6{,}1\ k\Omega$. ***Aflaţi curenţii prin acumulator şi prin voltmetru.***

Rezolvare. Acumulatorul este în regim de **consumator**, de aceea tensiunea comună la bornele acumulatorului şi bateriei se scrie : $U = RI_V = E + rI = E' - r'(I + I_V)$, (1)

de unde rezultă $I = [E'R - E(R + r')] : [rr' + R(r + r')] \approx$

$\approx (E' - E) : (r + r') = 2{,}0$ A , (2)

$I_V = (E'r + Er') : [rr' + R(r + r')] \approx (E'r + Er') : [R(r + r')] =$

$= 2{,}0$ mA . (3)

2.3.35. ***În montajul din figură se cunosc:*** $E = 12{,}0$ V, $r = 5{,}0\ \Omega$, $R_0 = 10{,}0\ \Omega$, $R = 10{,}0\ \Omega$. ***Aflaţi tensiunea la bornele rezistorului*** R_0 ***imediat după închiderea întrerupătorului.***

Rezolvare. Iniţial condensatorul este încărcat până la tensiunea E . Prin închiderea întrerupătorului condensatorul începe să se descarce până la tensiunea : $U = E \cdot R : (r + R)$. (1)

Imediat după închiderea întrerupătorului avem pentru tensiunea între punctele A, B :

$U_{AB} = -R_0 I_0 + E = RI = r(I_0 - I) - (-E)$, (2)

de unde rezultă : $I_0 = rE : [r(R + R_0) + RR_0]$ (3)

şi deci tensiunea la bornele lui R_0, imediat după închiderea întrerupătorului va fi : $U_0 = RI_0 = ErR : [r(R + R_0) + RR_0] = 3{,}0$ V . (4)

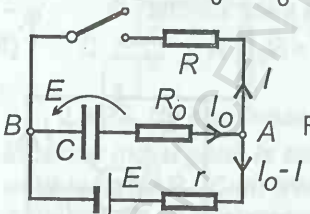


Fig.2.3.35

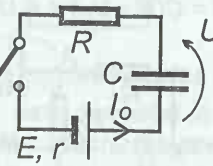


Fig.2.3.37

2.3.36. ***Pentru a măsura t.e.m. a unei baterii se folosesc două voltmetre. Conectând succesiv cele două voltmetre la bornele bateriei, ele indică*** $U_1 = 10{,}0$ V , $U_2 = 11{,}0$ V . ***Conectându-le în paralel, ele indică*** $U_3 = 9{,}0$ V . ***Aflaţi t.e.m. a bateriei .***

Rezolvare. Notând rezistenţele voltmetrelor cu $R_{1,2}$, aplicăm formula *divizorului de tensiune* (v. *Breviar*): $U_1 = E : (1 + r/R_1)$,

$U_2 = E : (1 + r/R_2)$, $U_3 = E : [1 + r\,(1/R_1 + 1/R_2)]$, (1)

de unde rezultă : $r/R_{1,2} = E/U_{1,2} - 1$,

$r\,(1/R_1 + 1/R_2) = E/U_3 - 1$,

$E/U_1 - 1 + E/U_2 - 1 = E/U_3 - 1$,

$E = 1 : (1/U_1 + 1/U_2 - 1/U_3) = 12{,}5$ V . (2)

2.3.37. ***Un condensator, încărcat în prealabil până la o tensiune*** U_o ***, este legat în serie printr-un rezistor*** R ***la o baterie . a) Ce tensiune va fi pe rezistorul*** R ***imediat după închiderea înrtrerupătorului ? b) Câtă căldură se degajă în rezistorul*** R ***?***

Rezolvare. a) Imediat după închiderea întrerupătorului avem :

$RI_o - E + r\,I_o + U_o = 0$, $I_o = (E - U_o) : (r + R)$, (1)

unde U_o poate fi şi de semn opus .

$U_R = R\,I_o = (E - U_o)\,R : (r + R)$. (2)

b) **Sarcina** suplimentară care va trece prin circuit şi lucrul mecanic dezvoltat de baterie :

$\Delta q = C(E - U_o)$, $W_{bat} = \Delta q\,E = CE(E - U_o)$. (3)

Variaţia **energiei** condensatorului :

$\Delta W_C = (1/2)\,C(E^2 - U_o^2)$. (4)

Căldura totală degajată rezultă din *bilanţul* ***energiilor*** :

$Q_J = W_{bat} - \Delta W_C = (1/2)\,C(E - U_o)^2 = (1/2)\,\Delta q\,(E - U_o)$, (5)

din care o fracţiune $R\,/\,(r + R)$ revine rezistorului R :

$Q_{JR} = (1/2)\,C(E - U_o)^2\,R\,/\,(r + R) = (1/2)\,\Delta q\,U_R$ (6)

(tensiunea de pe R scade de la U_R la zero) .

2.3.38. *Reacţia de ardere a hidrogenului este*

$H_2 + (1/2)\,O_2 = H_2O + 286$ kJ/mol . (*)

Aflaţi tensiunea minimă *ce trebuie aplicată între electrozii* ***voltametrului*** *pentru a obţine electroliza apei .*

Rezolvare. Energia electrică consumată pentru depunerea masei m la catod este

$W = UIt$, dar $m = (1/F)(A\,/\,z)\,It \rightarrow W = UmzF : A$, (1)

$U = W \cdot A : (Fzm) = [WA : (\nu\mu)] : (Fz)$, $(\nu = m\,/\,\mu)$, (2) (ν - numărul de moli, μ -masa molară) .

Dar din reacţia inversă lui (*) rezultă că pentru descompunerea unui mol de apă sau obţinerea unui mol ($\nu = 1$ mol) de hidrogen trebuie energia $W/\nu = 286$ kJ/mol, prin urmare :

$U = [WA : (\nu\mu)] : (Fz) = 286 \cdot 10^3 (J/mol)\ (1/2)\ :$

$: [96{,}4 \cdot 10^3\ (C/Eq) \cdot 1\ Eq/mol\ ] = 1{,}48\ V\ .$ (3)

(*) 2.3.39. ***În montajul din figură tensiunea sursei variază proporţional cu timpul :*** $u = a \cdot t$ ***. La ce moment trebuie să închidem întrerupătorul pentru ca curentul din circuit să fie constant ? Se dau :*** $R = 10\ k\Omega$, $C = 100\ \mu F$.

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* (la un moment dat) : $u(t) = a \cdot t = R\,i + q/C\ .$ (1)

Pentru $t > t_o$ trebuie ca

$i = dq/dt = \text{const}\ ,\ di/dt = 0\ ,\ (t > t_o)\ .$ (2)

Atunci derivând relaţia (1) , avem

$u'(t) = a = (1/C)\,dq/dt = i/C\ .$ deci $i = aC = \text{const}\ .$ (3)

Se poate judeca şi fără derivate :

pentru $t > t_o$, $i = \text{const} = \Delta Q/\Delta t$, $\Delta i = 0$, (4)

atunci (1) dă : $\Delta u = a\Delta t = R\Delta i + \Delta q/C = \Delta q/C = (1/C)\,i\Delta t$, (5)

de unde , ca mai sus, $i = aC = \text{const}$.

Dar din condiţiile iniţiale pentru $t = t_o$ avem $q = 0$, deci

$$at_o = Ri = RaC\ , \quad (6)$$

de unde $t_o = RC = 1{,}0\ ms\ ,$ (7)

unde $RC = \tau$ este ***constanta de timp*** a circuitului RC .

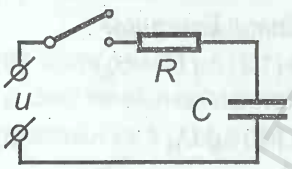


Fig.2.3.39

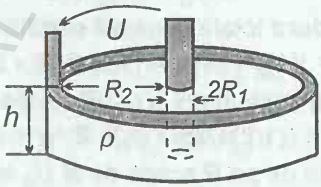


Fig.2.3.41

(*) 2.3.40. ***Un condensator plan cu aer are armături pătrate de arie*** $S = 100\ cm^2$ ***, cu distanţa dintre armături*** $d = 1{,}0\ mm$ ***şi este conectat la o tensiune*** $U = 600\ V$***. Ce curent va curge prin baterie dacă una din armături începe să lunece in planul său cu viteza*** $v = 6{,}0\ cm/s$ ***?***

Rezolvare. Avem succesiv : $q = CU\ ,\ i = dq/dt =$

$= d(CU)/dt = U\,dC/dt = U\,d(\varepsilon S/d)/dt = (U\varepsilon/d)\,dS/dt\ ,$ (1)

dar $dS = \ell\,dx = \ell\,v\,dt = \sqrt{S}\,v\,dt\ ,$ (2)

rezultă $i = (U/d)\,\varepsilon\sqrt{S}\,v = 32\ mA\ .$ (3)

Se poate judeca şi fără derivate :

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\langle i \rangle = \Delta q / \Delta t = U\Delta C / \Delta t = (U\varepsilon / d)\Delta S / \Delta t = (U\varepsilon \ell / d)\Delta x / \Delta t =$

$= (U/d)\,\varepsilon\sqrt{S}\,\langle v \rangle$ (4)

sau pentru valori *instantanee* : $i = (U/d)\,\varepsilon\sqrt{S}\,v$. (5)

**** 2.3.41.** ***Un disc omogen şi uniform de rază*** R_2 ***, de grosime*** h ***şi rezistivitate*** ρ ***, este cuprins la periferie de un inel perfect conductor, iar în centru are un electrod cilindric, perfect conductor, de rază*** R_1***. Între electrodul central şi inelul periferic se aplică o diferenţă de potenţial*** U ***. Calculaţi : a) rezistenţa electrică a discului între electrozii amintiţi, b) intensitatea curentului electric şi densitatea de curent, c) intensitatea şi potenţialul câmpului electric dintre electrozi, d) puterea totală dezvoltată în disc , e) densităţile radială, superficială şi spaţială (volumică) ale puterii dezvoltate**

Rezolvare. a) Profităm de *simetria* ***radială*** şi luăm un inel infinitezimal de rază *r* şi , deci, de grosime d*r* . El este străbătut radial de curent, deci în formula rezistenţei $\rho\ell / S$, ℓ este d*r*, iar *S* este $2\pi rh$, deci $dR = [\rho : (2\pi rh)]\,dr$. (1)

Aceste inele concentrice sunt legate în *serie* (sunt străbătute de acelaşi curent unul după altul) şi deci rezistenţele lor se adună, astfel încât trebuie să sumăm rezistenţele (1), adică să integrăm :

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{R_2}{R_1} . \quad (2)$$

b) $$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi hU}{\rho \ln (R_2/R_1)} , \quad (3)$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi rh} = \frac{U}{r\rho \ln (R_2/R_1)} . \quad (4)$$

c) Forma *diferenţială* (*locală*) a *legii lui* ***Ohm*** $\vec{E} = \rho\vec{j}$ dă :

$$E(r) = \rho \frac{U}{r\rho \ln (R_2/R_1)} = \frac{U}{r \ln (R_2/R_1)} , \quad (5)$$

$U = V(R_1) - V(R_2)$, $V(R_2) = 0$, $V(R_1) = U$, $V(R_1) - V(r) =$

$= U - V(r) = \int_{R_1}^{r} E\,dr = \int_{R_1}^{r} \frac{U\,dr}{r \ln (R_2/R_1)} = \frac{U}{\ln (R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1}$,

$$V(r) = U - \frac{U}{\ln (R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1} = \frac{U}{\ln (R_2/R_1)} \ln \frac{R_2}{r} . \quad (6)$$

Se putea judeca şi pe baza *legii lui* ***Ohm*** :

$$-\mathrm{d}V = I\,\mathrm{d}R = \frac{2\pi hU}{\rho \ln\left(R_2/R_1\right)} \cdot \rho\ \frac{\mathrm{d}r}{2\pi rh} = \frac{U\,\mathrm{d}r}{r \ln\left(R_2/R_1\right)},$$

pe care o integrăm :

$$-\int_{R_1}^{r} \mathrm{d}V = -\left[V(r) - U\right] = \int_{R_1}^{r} \frac{U\,\mathrm{d}r}{r \ln\left(R_2/R_1\right)}, \quad \text{etc.}$$

d) $$P = \frac{U^2}{R} = \frac{2\pi hU^2}{\rho \ln\left(R_2/R_1\right)}. \qquad (7)$$

e) $$\mathrm{d}P = I^2\,\mathrm{d}R = \left[\frac{2\pi hU}{\rho \ln\left(R_2/R_1\right)}\right]^2 \rho\ \frac{\mathrm{d}r}{2\pi rh} = \frac{2\pi hU^2\,\mathrm{d}r}{\rho\, r\left[\ln\left(R_2/R_1\right)\right]^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi hU^2}{\rho\left[\ln\left(R_2/R_1\right)\right]^2}\ \frac{1}{r} \quad \text{(densitatea radială)} ;(8)$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}P}{2\pi r\,\mathrm{d}r} = \frac{hU^2}{\rho\left[\ln\left(R_2/R_1\right)\right]^2}\ \frac{1}{r^2} \quad \text{(densitatea superficială)}, \quad (9)$$

unde am profitat de *simetria* ***radială*** şi am luat ***elementul de arie*** sub forma unui inel de rază r şi lăţime infinit mică $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S \cdot h} = \frac{U^2}{\rho\left[\ln\left(R_2/R_1\right)\right]^2}\ \frac{1}{r^2} \quad \text{(densitatea volumică)}. \quad (10)$$

** **2.3.42.** ***O sferă omogenă de rezistivitate*** ρ ***şi rază*** R_2 ***este înconjurată de o pătură sferică perfect conductoare. Printr-un mic orificiu radial este trecut un electrod perfect conductor spre centrul sferei unde este de forma unei bile de rază*** R_1 ***. Între electrodul central şi cel periferic se aplică o diferenţă de potenţial*** U. ***Calculaţi: a) rezistenţa electrică a sferei între electrozii amintiţi, b) intensitatea şi densitatea curentului electric, c) intensitatea şi potenţialul câmpului electric, d) densităţile de putere dezvoltate : radială şi volumică .***

Rezolvare. a) Ţinând seama de *simetria* ***sferică***, alegem o pătură sferică **elementară** de rază r şi grosime infinit mică $\mathrm{d}r$. Ea este străbătută de curent în sens *radial*, deci în formula rezistenţei $\rho\ell / S$, ℓ este $\mathrm{d}r$, iar S este $4\pi r^2$ (aria sferei) :

$$\mathrm{d}R = \left[\rho : (4\pi r^2)\right]\mathrm{d}r. \qquad (1)$$

Aceste pături sferice concentrice sunt legate în *serie* (sunt străbătu-

BCU CLUJ UNIVERSITY LIBRARY

te de *acelaşi* curent) şi deci rezistenţele lor se adună, prin urmare sumăm (integrăm) (1) : $R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} =$

$$= \frac{\rho}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (2)$$

Dacă raza R_2 creşte , rezistenţa sferei creşte dar

$$R_{max} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\rho}{4\pi R_1} . \quad (3)$$

b) $$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi U R_1 R_2}{\rho\,(R_2 - R_1)}, \quad (4)$$

$$I_{min} = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{4\pi U R_1 R_2}{\rho\,(R_2 - R_1)} = \frac{4\pi R_1}{\rho} = \frac{U}{R_{max}} , \quad (5)$$

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{U R_1 R_2}{\rho\,(R_2 - R_1)} \cdot \frac{1}{r^2} . \quad (6)$$

c) $$\vec{E} = \rho \vec{j} , \quad E = \frac{U R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{1}{r^2} , \quad (7)$$

$U = V(R_1) - V(R_2)$, $V(R_2) = 0$, $U = V(R_1)$,

$$V(r) - V(R_1) = V(r) - U = \int_r^{R_1} E dr = \int_r^{R_1} \frac{U R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -\frac{U R_1 R_2}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right), \quad V(r) = U \frac{R_1 (R_2 - r)}{(R_2 - R_1) r} . \quad (8)$$

Se putea folosi şi *legea lui* ***Ohm*** :

$$- dV = I dR = \frac{4\pi U R_1 R_2}{\rho (R_2 - R_1)} \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \frac{U R_1 R_2\, dr}{(R_2 - R_1) r^2} ,$$

$$-\int_{R_1}^{r} dV = -(V - U) = \int_{R_1}^{r} \frac{U R_1 R_2\, dr}{(R_2 - R_1) r^2} , \text{ etc.}$$

d) $$\frac{dP}{dr} = I^2 \frac{dR}{dr} = \left[\frac{4\pi U R_1 R_2}{\rho (R_2 - R_1)}\right]^2 \frac{\rho}{4\pi r^2} =$$

$$= \frac{4\pi}{\rho}\left[\frac{U R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right]^2 \frac{1}{r^2} \quad \text{(densitatea radială)} ; \quad (9)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{dP}{dV} = I^2 \frac{dR}{4\pi r^2 dr} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{UR_1R_2}{R_2 - R_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^4} \quad . \tag{10}$$

Ultimul rezultat se poate obţine şi din

$$\frac{dW}{dt\,dV} = \rho j^2 = j\,E = \frac{E^2}{\rho} \quad . \tag{11}$$

**** 2.3.43.** ***Spaţiul dintre două armături sferice perfect conductoare concentrice de raze*** $R_{1,2}$ ***este umplut cu un dielectric de permitivitate*** ε ***şi conductivitate*** γ ***. I se comunică sferei interioare o sarcină*** q_0 ***. a) Aflaţi legea de variaţie a sarcinii sferei interioare . b) Calculaţi căldura degajată în timp.***

Rezolvare. a) Sarcina de pe sfera interioară produce câmp electric în exteriorul ei, care va mişca sarcinile spre sfera exterioară . Să ducem o sferă de raza r , concentrică, situată între armături . Curentul care trece prin această sferă (de la interior spre exterior) se poate exprima prin densitatea de curent :

$$i\,(r) = S j\,(r) = 4\pi r^2 j\,(r)\,, \tag{1}$$

dar

$$j\,(r) = \gamma\, E\,(r)\,, \tag{2}$$

iar intensitatea câmpului electric $E\,(r)$ se obţine imediat cu ajutorul teoremei lui **Gauss** (v. (7) *Breviar*) :

Fluxul *inducţiei (deplasării) electrice* $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ *printr-o suprafaţă închisă este egal cu* ***sarcina*** *electrică conţinută în interiorul suprafeţei închise :*

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{int}\,. \tag{3}$$

În cazul nostru, în virtutea *simetriei* ***sferice***, câmpul este radial şi dependent doar de distanţa r până la centru, de aceea fluxul se calculează imediat :

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D\, dS = D \oint_S dS = D \cdot S = D \cdot 4\pi r^2 \tag{4}$$

şi conform *teoremei lui* ***Gauss*** :

$$\Psi = D \cdot 4\pi r^2 = q(r)\,, \quad E\,(r) = D(r) : \varepsilon = q(r) : (4\pi\varepsilon r^2)\,. \tag{5}$$

În sfârşit, curentul $i\,(r)$ prin suprafaţa de rază r se datorează scăderii sarcinii $q(r)$ conţinute în interior (legea de *conservare* a *sarcinii* electrice) :

$$i\,(r) = -\,dq(r)\,/\,dt\,. \tag{6}$$

Rezultă astfel :

$$i\,(r) = 4\pi r^2 j(r) = 4\pi r^2 \gamma\, E\,(r) =$$

$$= (\gamma\,/\,\varepsilon)\, q(r) = -\,dq(r)\,/\,dt\,. \tag{7}$$

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\frac{dq}{q} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\,dt\,, \quad \int \frac{dq}{q} = \ln q = \int -\frac{\gamma}{\varepsilon}\,dt = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\,t + C\,,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $q = q_0$; rezultă $\ln q_0 = C$,

$$\ln (q/q_0) = -(\gamma/\varepsilon)\, t\,, \quad q = q_0 e^{-\gamma t/\varepsilon} = q_0 e^{-t/\tau}\,, \quad (\tau = \varepsilon/\gamma), \tag{8}$$

unde τ este ***constanta de timp***, adică timpul după care sarcina q se micşorează de e ori .

Se putea integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \ln \frac{q}{q_0} = -\int_0^t \frac{\gamma}{\varepsilon}\, dt = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\, t \ , \text{ etc.}$$

Pentru $t \to \infty$, toată sarcina q_0 va ajunge pe suprafaţa armăturii exterioare .

b) **Rezistenţa** păturii dintre armături se poate calcula astfel. Considerăm întâi o pătură *infinitezimală* de rază r şi grosime dr . Rezistenţa ei este $\rho\, \ell / S$, unde $S = 4\pi r^2$, iar ℓ este dr , deci

$$dR = [\rho : (4\pi r^2)]\, dr\,. \tag{9}$$

Toate păturile de acest fel sunt străbătute succesiv de *acelaşi* curent, deci sunt legate în *serie*, astfel încât rezistenţa totală se obţine prin însumare (integrare) :

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho\, \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{10}$$

(v. problema precedentă 2.3.42) .

Căldura degajată în unitatea de timp (puterea) este Ri^2 , unde i este dat de (7), deci până la momentul t :

$$Q(t) = \int_0^t Ri^2\, dt = R\int_0^t \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\, q\right)^2 dt = R\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}\, q_0^2 \int_0^t e^{-2\gamma t/\varepsilon}\, dt =$$

$$= (R/2)\,(\gamma/\varepsilon)\, q_0^2 [1 - e^{-2\gamma t/\varepsilon}]\,. \tag{11}$$

Căldura **totală** degajată ($t \to \infty$) :

$$Q_0 = \frac{R\gamma}{2\varepsilon}\, q_0^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\, q_0^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\, R \left(\frac{q_0}{\tau}\right)^2 \tau\,. \tag{12}$$

Se poate judeca şi altfel . Căldura degajată pe unitatea de timp şi pe unitatea de volum este $\rho j^2 = j^2/\gamma$, deci căldura degajată pe unitatea de timp dar în volumul păturii *elementare* de rază r şi grosime dr va fi : $\rho j^2\, dV = \rho j^2 \cdot 4\pi r^2\, dr =$

$$= \rho \left(\frac{\gamma q}{\varepsilon \cdot 4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2\, dr = \frac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon^2 r^2}\, dr\ ,$$

de unde căldura degajată pe unitatea de timp şi pe întregul volum al dielectricului : $\int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon^2 r^2}\,dr =$

$$= \frac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{\gamma q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) e^{-2\gamma t/\varepsilon} ,$$

de unde căldura degajată până în momentul t :

$$Q(t) = \frac{\gamma q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\int_0^t e^{-2\gamma t/\varepsilon}\,dt =$$

$$= \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(1-e^{-2\gamma t/\varepsilon}\right) . \qquad (13)$$

Căldura totală degajată se poate afla imediat din *bilanţul energetic* : iniţial avem energia sferei R_1 : $(1/2)q_0^2 / C_1 =$ $= (1/2)q_0^2 / (4\pi\varepsilon R_1)$. Final avem energia sferei R_2 pe care a trecut toată sarcina q_0 : $(1/2)q_0^2 / C_2 = (1/2)q_0^2 / (4\pi\varepsilon R_2)$, deci căldura totală degajată : $Q_0 = q_0^2 / (2C_1) - q_0^2 / (2C_2) =$

$$= [q_0^2 : (8\pi\varepsilon)]\,(1/R_1 - 1/R_2) . \qquad (12)$$

* * 2.3.44. *O bobină de diametru* D , *bobinată cu sârma de* ***rezistivitate*** ρ ***şi secţiune*** S , ***este rotită cu viteza unghiulară*** ω ***în jurul axei sale . Ce sarcină electrică va trece printr-o secţiune a conductorului dacă oprim brusc bobina (care are capetele împreunate) ?***

Rezolvare. Fie la un moment dat , după oprirea bobinei, viteza *ordonată* a electronilor v şi curentul i . Atunci scăderea energiei cinetice a electronilor trebuie să fie egală cu *căldura* ***Joule*** degajată :

$$- N\,d(mv^2/2) = R i^2\,dt , \qquad (1)$$

unde N este numărul total de electroni . Dar $i\,dt = dq$ şi $i = nevS$, deci $- Nmv\,dv = R\,nevS\,dq$, de unde

$$dq = - Nm\,dv : (R\,neS) , \qquad (2)$$

dar $N = nS\ell$, $R = \rho\,\ell / S$, (3)

astfel încât $dq = - [mS : (e\rho)]\,dv$, (4)

ceea ce dă prin integrare :

$$\int dq = q = -\int_{v_0}^{0} \frac{m}{e}\frac{S}{\rho}\,dv = \frac{m}{e}\frac{S}{\rho}\,v_0 = \frac{m}{e}\frac{S}{\rho}\,\omega\,\frac{D}{2} . \qquad (5)$$

* *

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.4. ELEMENTE NELINIARE

2.4.1. ***În circuitul din figură curentul prin diodă este aproximat bine prin formula lui*** Langmuir ***; la o tensiune anodică*** $U_A = 100$ V ***curentul prin diodă este*** $I_A = 10$ mA ***. Se cunosc :*** $E = 400$ V , $R = 20$ kΩ ***. Aflaţi curentul din circuit .***

Rezolvare. Putem afla ***perveanţa*** :

$$K = I_A : U_A^{3/2} = 1/100 \text{ mA/V}^{3/2} . \quad (1)$$

Curentul din circuit este dat de cele două expresii :

$$I_A = K U_A^{3/2} \text{ şi } i = (E - U_A) : R . \quad (2)$$

Reprezentăm grafic curenţii în funcţie de U_A . Curentul căutat se află la intersecţia celor două curbe : $I_A = i$.

Vom aplica ***metoda aproximaţiilor succesive*** . Plecăm de la punctul ***1*** (100 V , 10 mA) situat pe caracteristica I_A :

$$I_A = K U_A^{3/2} = (1/100) \cdot 100^{3/2} = 10 \text{ mA} . \quad (3)$$

Calculăm coordonatele punctului ***2*** (100 V , 15 mA) situat pe caracteristica i :

$$i = (E - U_A) : R = (400 - 100) : 20 = 15 \text{ mA}. \quad (4)$$

Calculăm coordonatele punctului ***3*** (131 V , 15 mA) situat pe caracteristica I_A : $U_A = (I_A / K)^{2/3} = (1500)^{2/3} = 131$ V . (5)

Calculăm coordonatele punctului ***4*** (131 V , 13,45 mA) situat pe caracteristica i :

$$i = (E - U_A) : R = (400 - 131) : 20 = 13{,}45 \text{ mA} . \quad (6)$$

Calculăm coordonatele punctului ***5*** (121,8 V , 13,45 mA) situat pe caracteristica I_A : $U_A = (I_A / K)^{2/3} = (1345)^{2/3} \cong 121{,}8$ V . (7)

Calculăm coordonatele punctului ***6*** (121,8 V , 13,9 mA) situat pe caracteristica i :

$$i = (E - U_A) : R = (400 - 121{,}8) : 20 = 13{,}9 \text{ mA} . \quad (8)$$

Calculăm coordonatele punctului ***7*** (124,5 V, 13,9 mA) situat pe caracteristica I_A : $U_A = (I_A / K)^{2/3} = (1390)^{2/3} \cong 124{,}5$ V . (9)

Toate punctele calculate ***converg*** către *punctul de funcţionare* .

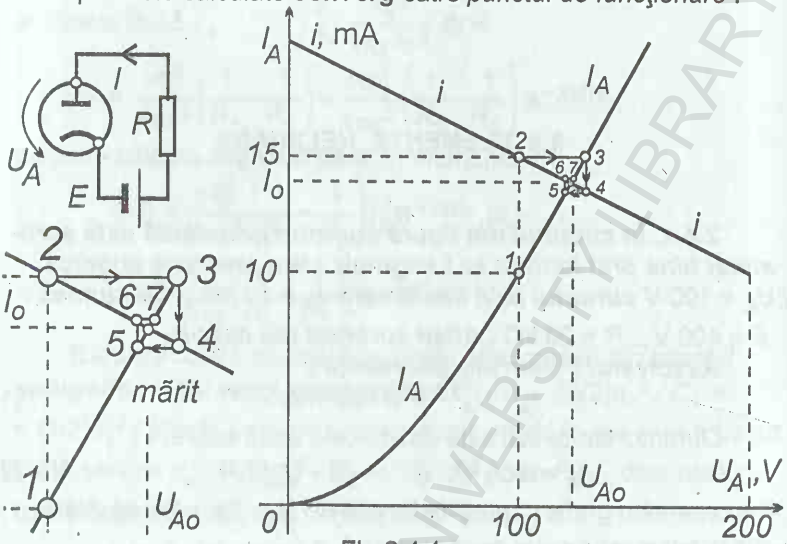


Fig.2.4.1

Ne putem opri aici. Se vede că punctul căutat este încadrat bine de valorile :

$$13{,}45 \text{ mA} < I_o < 13{,}9 \text{ mA} ; \quad 121{,}8 \text{ V} < U_{Ao} < 124{,}5 \text{ V} . \qquad (10)$$

Putem lua cu o precizie bună valorile :

$$I_o = (13{,}7 \pm 0{,}2) \text{ mA} ; \quad U_{Ao} = (123{,}0 \pm 1{,}5) \text{ V} . \qquad (11)$$

Rezultatul este valabil dacă $I_o < I_E$ (curentul de emisie), altfel coordonatele punctului de funcţionare vor fi

$$U_A = E - R I_E ; \qquad I_E . \qquad (12)$$

Observăm că dacă am merge în sens invers, antiorar , cu succesiunea punctelor de aproximaţie, ne-am depărta de punctul *limită* căutat, în loc să ne apropiem de el.

2.4.2. ***În puntea din figură se cunosc :*** $R = 100\ \Omega$ ***şi caracteristica elementului neliniar*** R' ***:*** $U = a I^2$ ***, unde*** $a = 1{,}0 \text{ kV/A}^2$ ***. Aflaţi pentru ce tensiune a sursei puntea va fi în echilibru .***

Rezolvare. La *echilibru* (când prin galvanometru nu trece curent) :

$$U = U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = RI + aI^2 , \qquad (1)$$

$$U_{CD} = 0 \rightarrow U_{AC} = U_{AD} \quad \text{sau} \quad RI = aI^2 \rightarrow I = R/a , \qquad (2)$$

$$U = R \cdot R/a + a(R/a)^2 = 2R^2/a = 20 \text{ V} . \qquad (3)$$

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

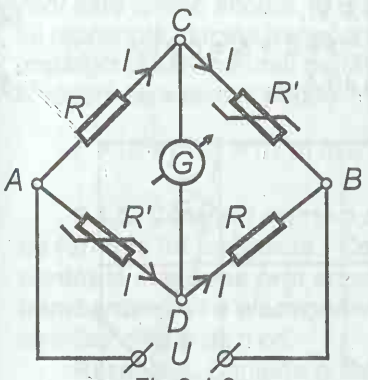


Fig.2.4.2

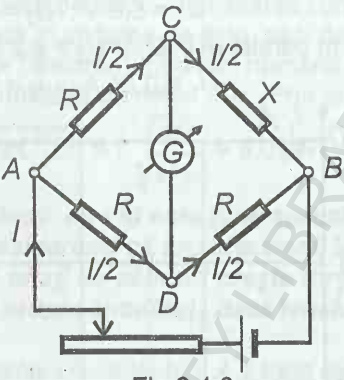


Fig.2.4.3

2.4.3. *În puntea din figură* R = 100 Ω *şi elementul neliniar* X *are caracteristica :* $I = U/R_o + aU^3$, *unde* R_o= 200 Ω, a= 20 mA/V^3 . ***Pentru ce curent din baterie puntea va fi în echilibru ?***

Rezolvare. La *echilibru*, când prin galvanometru nu trece curent, tensiunile pe rezistoare sunt egale între ele :

$$U_{AD} = U_{DB} = U_{AC} = U_{CB} , \qquad (1)$$

$$I : 2 = U_{DB} : R = U_{CB} : R_o + a(U_{CB})^3 \rightarrow$$

$$U_{DB} = \sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o}\right)} , \qquad (2)$$

$$I_o = 2\frac{U_{DB}}{R} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o}\right)} = 10 \text{ mA}. \qquad (3)$$

2.4.4. ***O baterie cu t.e.m.*** E = 10,0 V ***şi rezistenţă internă*** r = 2,00 Ω ***debitează pe două rezistoare*** neliniare $R_{1,2}$ ***, legate o dată în serie , apoi în paralel. Caracteristicile volt-amper ale rezistoarelor sunt reprezentate în figură . Aflaţi curenţii şi tensiunile în cele două montaje : serie , paralel .***

Rezolvare. Compunem *caracteristicile* celor două rezistoare . La legarea în serie, la **acelaşi curent** adunăm *tensiunile* . La legarea în paralel, la **aceeaşi tensiune** adunăm *curenţii* .

Construim ***caracteristica*** *bateriei* :

$$U = E - rI = 10 - 2I . \qquad (1)$$

La intersecţia acesteia cu caracteristicile rezultante serie, respectiv paralel, găsim valorile cerute şi anume :

în serie (S): $I_1 = I_2 = 0{,}28$ A , $U = U_1 + U_2 = 9{,}8$ V ;

$U_1 = 5{,}8$ V , $U_2 = 4{,}0$ V ; (2)

în paralel (P): $U_1 = U_2 = 8{,}2$ V ; $I = I_1 + I_2 = 0{,}91$ A ,

$I_1 = 0{,}51$ A , $I_2 = 0{,}40$ A . (3)

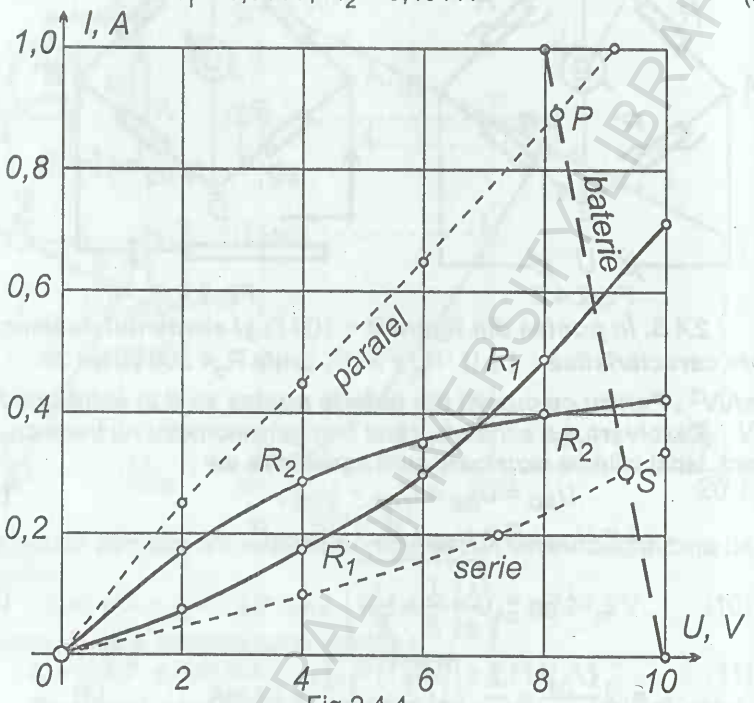


Fig.2.4.4

2.4.5. ***Printr-un tub catodic trece un curent*** I = 10 mA ***la o tensiune anodică*** U = 220 V . ***Cunoscând sarcina specifică a electronilor*** e / m = 176 GC/kg , ***aflaţi forţa exercitată de electroni asupra anodului .***

Rezolvare. Forţa se calculează pe baza *principiului II* al mecanicii, din ***variaţia de impuls*** *pe unitatea de timp* : $F = |\Delta \vec{p}| : \Delta t$.

Electronii ies din catod cu viteze mici faţă de viteza finală cu care lovesc anodul : $mv^2/2 = eU \rightarrow v = \sqrt{2eU/m}$. (1)

Considerând că electronii intră în anod fără a expulza alţi electroni , fiecare electron va transmite anodului impulsul său *mv* , deoarece în anod el va circula cu viteza de *drift* ($v_d \ll v$) .

Variaţia de impuls (pe unitatea de timp) a anodului este atunci egală cu impulsul *mv* adus de un electron înmulţit cu numărul electro-

nilor care lovesc anodul în unitatea de timp . Intensitatea curentului reprezintă sarcina transportată *în unitatea de timp*, deci dacă o împărţim la sarcina unui purtător (electron), obţinem numărul de electroni care lovesc anodul în unitatea de timp: I/e . Prin urmare,

$$F = (I/e)\cdot mv = (I/e)\, m\sqrt{2eU/m} = I\sqrt{\frac{2U}{e/m}} = 5{,}0 \text{ pN} . \qquad (2)$$

2.4.6. ***Curentul printr-o diodă cu vid este bine aproximat de*** **formula lui Langmuir** ***. Considerând că toţi electronii îşi continuă mişcarea prin anod, aflaţi de câte ori creşte forţa de bombardament a electronilor asupra anodului , dacă tensiunea anodică creşte de*** n ori.

Rezolvare. Conform problemei precedente 2.4.5 forţa exercitată de către electroni asupra anodului este

$$F = (I/e)\cdot mv = I\sqrt{\frac{2U}{e/m}} = KU^{3/2}\sqrt{\frac{2U}{e/m}} = K\sqrt{2m/e}\cdot U^2 ,$$

deci dacă tensiunea creste de n ori, forţa creşte de n^2 ori.

2.4.7. ***Aflaţi viteza de drift a electronilor într-un conductor de cupru de secţiune*** S = 1,00 mm^2***, când prin el trece un curent*** I = 1,00 A ***. Consideraţi că fiecare atom de cupru contribuie cu un*** **singur** ***electron de conducţie.***

Rezolvare. *Densitatea de curent* $j = I/S$ este dată de expresia $j = I/S = n\,e\,v$,

(1) unde concentraţia electronilor de conducţie este egală cu numărul atomilor de cupru din unitatea de volum. Dacă împărţim masa unui mol (*masa molară* μ) la densitatea (δ) obţinem volumul unui mol (*volumul molar* V_μ) care conţine N_A atomi, deci numărul atomilor din unitatea de volum este :

$$n = N_A : V_\mu = N_A : (\mu/\delta) = N_A\cdot\delta/\mu , \qquad (2)$$

$$v = I : (neS) = I : (eSN_A\delta/\mu) = \mu I : (FS\delta) = 0{,}075 \text{ mm/s} , \qquad (3)$$

unde $F = eN_A = 96{,}4$ kC / Eq este *constanta lui* **Faraday** .

2.4.8. ***Printr-un conductor de cupru circulă un curent de densitate*** j = 1,0 A/mm^2 ***. Considerând că fiecare atom de*** Cu ***contribuie cu un singur electron la gazul electronic şi considerând acest gaz ca un gaz ideal clasic, evaluaţi distanţa*** efectivă ***parcursă de un electron la o deplasare de drift*** d = 10 mm .

Rezolvare. Conform problemei precedente 2.4.7 :

$$j = n\,e\,v , \quad n = N_A\cdot\delta/\mu , \quad v = j : (ne) = j\mu : (eN_A\delta) , \qquad (1)$$

$$t = d : v = F\delta d : (j\mu) , \quad (F = eN_A) , \qquad (2)$$

Viteza *medie* $\bar{v}$ este apropiată ca valoare de viteza *termică* (pătratică medie) :

$$\bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}\,, \quad s \cong \bar{v}t = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}\,\frac{F\delta d}{j\mu} = 13{,}8 \text{ Mm !} \qquad (2)$$

2.4.9. ***Printr-o soluţie de acid azotic trece un curent*** I = 2,00 A . ***Ce cantitate de electricitate transportă în unitatea de timp fiecare tip de ioni ?*** **Mobilităţile** ***ionilor sunt***

$\mu_+(H^+) = 3{,}26 \cdot 10^{-7}$ m^2/(V·s), $\mu_-(NO_3^-) = 6{,}4 \cdot 10^{-8}$ m^2/(V·s) .

Rezolvare. *Densitatea de curent* într-un *electrolit* este dată de formula : $j = (z_-en_-\mu_- + z_+en_+\mu_+)E = \gamma E$, (1)

unde $z_\mp$ sunt valenţele ionilor şi $\mu_\mp$ - mobilităţile lor , $n_\mp$ - concentraţiile lor .

Pentru *disociaţia* acidului azotic avem :

$$HNO_3 \leftrightarrow H^+ + NO_3^- . \qquad (2)$$

Din (1)rezultă atunci $I = I_+ + I_-$,

$$I_+ / I_- = j_+ / j_- = z_+n_+\mu_+ / (z_-n_-\mu_-) = \mu_+ / \mu_- , \qquad (3)$$

$(z_+ = z_- = 1 , \; n_+ = n_-)$.

$$I_+ = I : (1 + \mu_- / \mu_+) = 1{,}67 \text{ A} , \quad I_- = I - I_+ = 0{,}33 \text{ A} . \qquad (4)$$

2.4.10. ***Calculaţi conductivitatea unei soluţii de*** $AgNO_3$ ***de concentraţie*** C = 0,1 N ***(soluţie decinormală), ştiind gradul de disociere*** α = 80 % ***şi mobilităţile ionilor :*** $\mu_+(Ag^+) = 5{,}6 \cdot 10^{-8}$ m^2/(V·s) , $\mu_-(NO_3^-) = 6{,}4 \cdot 10^{-8}$ m^2/(V·s).

Rezolvare. Reacţia de disociaţie electrolitică este

$$AgNO_3 \leftrightarrow Ag^+ + NO_3^- . \qquad (1)$$

Conductivitatea electrolitului este dată de formula :

$$\gamma = j / E = z_+en_+\mu_+ + z_-en_-\mu_- = zen(\mu_+ + \mu_-) . \qquad (2)$$

Dacă concentraţia *molară* a substanţei este C [mol/m^3] şi gradul de *disociaţie* este α , atunci

$$n = \alpha CN_A , \quad en = \alpha CF , \quad F = eN_A , \qquad (3)$$

unde F este *constanta lui* ***Faraday*** .

$$\gamma = \alpha CFz(\mu_+ + \mu_-) = 0{,}93 \text{ S/m} , \quad (z = 1) , \qquad (4)$$

unde C = 0,1 N = 0,1 mol / L .

2.4.11. ***Conductivitatea unei soluţii decinormale de acid clorhidric este*** γ = 3,5 S / m ***. Ştiind mobilităţile ionilor :***

$\mu_+(H^+) = 3{,}26 \cdot 10^{-7}\ m^2/(V \cdot s)$, $\mu_-(Cl^-) = 6{,}8 \cdot 10^{-8}\ m^2/(V \cdot s)$, *aflaţi gradul de disociere şi concentraţiile ionilor.*

Rezolvare. Reacţia de disociaţie electrolitică este:

$$HCl \leftrightarrow H^+ + Cl^- \ . \qquad (1)$$

Conductivitatea unui electrolit este dată de formula :

$$\gamma = z_+ e n_+ \mu_+ + z_- e n_- \mu_- = z e n (\mu_+ + \mu_-) \ , \qquad (2)$$

unde $z_\pm$ sunt valenţele ionilor şi $n_\pm$ - concentraţiile lor ,

$$n = \alpha C N_A \ , \quad en = \alpha C F \ , \quad F = e N_A \ , \qquad (3)$$

$$\gamma = \alpha C z F (\mu_+ + \mu_-) , \quad \alpha = \gamma : [C z F (\mu_+ + \mu_-)] = 92\ \% \ , \qquad (4)$$

$$n_+ = n_- = \alpha C N_A = N_A \gamma : [z F (\mu_+ + \mu_-)] = 5{,}5 \cdot 10^{25}\ m^{-3} \ . \qquad (5)$$

2.4.12. ***În montajul din figură :*** $E = 150$ V , $R = 20$ kΩ , ***iar caracteristica diodei poate fi aproximată prin ecuaţia :***

$I = a U + b U^2$ ***pentru*** $U > 0$, $a = 0{,}10$ mA/V , $b = 0{,}010$ mA/V^2,

$I = 0$ ***pentru*** $U \le 0$. (*)

Calculaţi **puterea *consumată de diodă .***

Fig.2.4.12

Rezolvare. Avem pentru ochiul de circuit :

$$E = RI + U \ , \quad I = (E - U) : R \ , \qquad (1)$$

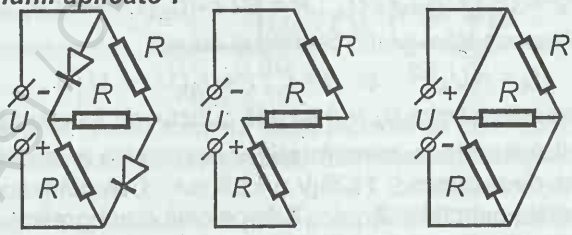
dar $$I = a U + b U^2 \ , \qquad (2)$$

de unde rezultă : $$bRU^2 + (aR + 1)U + E = 0 \ , \quad U = 30\ V \ , \qquad (3)$$

$$I = (E - U) : R = 12\ mA \ , \quad P_d = UI = U(E - U) : R = 0{,}36\ W. \qquad (4)$$

2.4.13. ***Se dă montajul din figură , cu diode ideale . În ce raport se schimbă puterea disipată dacă se inversează polaritatea tensiunii aplicate ?***

Fig.2.4.13



Rezolvare. În primul caz avem 3 rezistoare în *serie*, iar în al doilea caz avem 3 rezistoare în *paralel* :

$R_1 = 3R$, $P_1 = U^2 : R_1 = U^2 : (3R)$;

$R_2 = R / 3$, $P_2 = U^2 : (R/3)$, $P_2 : P_1 = 9$.

2.4.14. ***În montajul din figură curentul prin diodă este bine aproximat prin*** formula lui Langmuir ***; la o tensiune anodică*** $U_A = 25$ V ***curentul prin diodă este*** $I_A = 12{,}5$ mA. ***Se cunosc :*** $E = 400$ *V*, $r = R = 20$ kΩ . ***Aflaţi coordonatele punctului de funcţionare a diodei .***

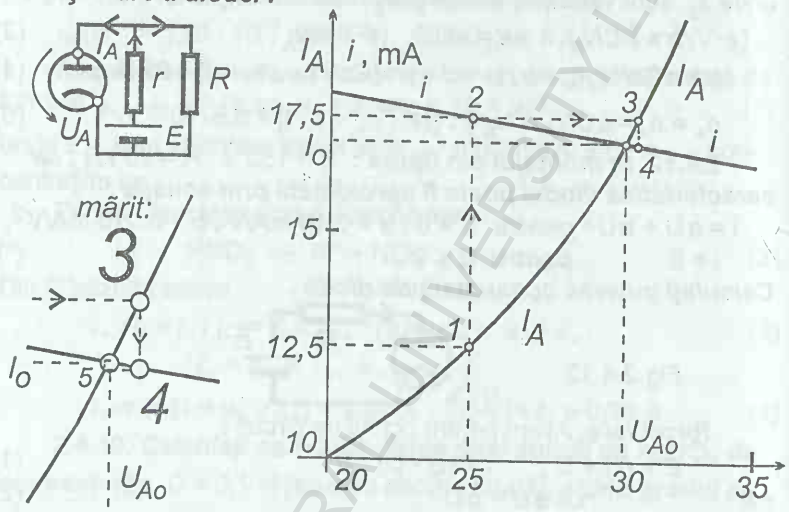


Fig.2.4.14

Rezolvare. *Perveanţa* diodei este

$$K = I_A : U_A^{3/2} = 1/10 \text{ mA/V}^{3/2}. \qquad (1)$$

Conform figurii : $I_A = K U_A^{3/2} = i = i_r - i_R =$

$$= (E - U_A) : r - U_A : R = E : r - U_A(1/r + 1/R) . \qquad (2)$$

Reprezentăm grafic cele două ecuaţii :

$$I_A = K U_A^{3/2} \quad \text{şi} \quad i = E : r - U_A(1/r + 1/R) , \qquad (3)$$

la intersecţia cărora ($I_A = i$) se află *punctul de funcţionare* .

Aplicăm metoda ***aproximaţiilor succesive*** (v. problema 2.4.1). Plecăm de la punctul ***1*** (25 V , 12,5 mA). Calculăm succesiv coordonatele punctelor ***2, . . . , 7*** de pe cele două grafice, puncte care converg către punctul de funcţionare :

(**2**) 25 V ; $i = E : r - U_A(1/r + 1/R) = 20 - U_A : 10 = 17{,}5$ mA, (4)

(3) $U_A = (I / K)^{2/3} = (10\,I)^{2/3} = 31{,}3$ V ; 17,5 mA , (5)

(4) 31,3 V ; $i = 20 - U_A : 10 = 16{,}87$ mA , (6)

(5) $U_A = (10\,I)^{2/3} = 30{,}5$ V ; 16,87 mA , (7)

(6) 30,5 V ; $i = 20 - U_A : 10 = 16{,}95$ mA , (8)

(7) $U_A = (10\,I)^{2/3} = 30{,}6$ V ; 16,95 mA , (9)

Ne putem opri aici, astfel încât avem coordonatele punctului de funcţionare al diodei cu o precizie foarte bună :

$$I_o = 16{,}90 \text{ mA} , \quad U_A = 30{,}55 \text{ V} . \qquad (10)$$

Bineînţeles rezultatul este valabil dacă $I_o < I_E$ (curentul de emisie), altfel punctul de funcţionare va fi :

$$U_A = (E / r - I_E) : (1 / r + 1 / R) \quad ; \quad I_E . \qquad (11)$$

Observăm de asemenea , că pentru a ne apropia de punctul de intersecţie succesiunea punctelor ***1, 2, 3,. . .*** trebuie să fie în ordinea aleasă pe figură, altfel ne depărtăm de punctul căutat, în loc să ne apropiem de el .

2.4.15. ***Se dă montajul din figură în care iniţial condensatoarele*** $C_1 = 1{,}00$ μF ***şi*** $C_2 = 2{,}00$ μF ***nu sunt încărcate,*** E = 5,0 V (r = 0) , $R_1 = 10$ kΩ , $R_2 = 20$ kΩ . ***a) Ce sarcină va trece prin diodă dacă închidem întrerupătorul ? b) Neglijând rezistenţa conductoarelor , ce energie se consumă pe diodă ? c) Câtă căldură se degajă pe rezistoarele*** $R_{1,2}$ ***?***

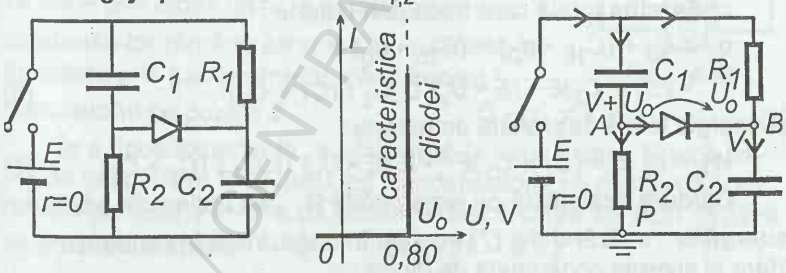


Fig.2.4.15

Rezolvare. În primul moment după închiderea întrerupătorului, condensatoarele ne fiind încărcate, diferenţa de potenţial dintre armăturile lor este zero ($U = q / C = 0$, $q = 0$). Considerând punctul P de potenţial zero, punctul A va avea potenţialul E , iar punctul B va avea potenţialul zero, deci $U_{ABo} = E$, curentul va trece în esenţă prin condensatoare şi prin diodă şi aproape instantaneu (intervine

doar rezistenţa mică a conductoarelor de conexiune) se ajunge la tensiunile A ($V + U_o$), B (V), astfel încât tensiunea pe diodă devine U_o:

$$q = C_1(E - V - U_o) = C_2V \rightarrow$$

$$V = (E - U_o)\, C_1 : (C_1 + C_2) = 1{,}4 \text{ V}. \quad (1)$$

După aceasta dioda se închide şi condensatoarele $C_{1,2}$ continuă să se încarce mai lent, respectiv prin rezistoarele $R_{2,1}$, fiecare până la tensiunea E, iar tensiunea pe diodă se anulează. Prin diodă trece curent din momentul închiderii întrerupătorului până în momentul închiderii diodei, deci va trece sarcina:

$$q_D = C_1(E - V - U_o) = C_2V = (E - U_o)\, C_1C_2 : (C_1 + C_2) = 2{,}8\ \mu\text{C}. \quad (2)$$

b) Până în momentul când dioda se închide, prin diodă şi prin baterie trece sarcina q_D (2), deci bateria efectuează lucrul mecanic:

$$W_{bat} = q_D\, E = E\,(E - U_o)\, C_1C_2 : (C_1 + C_2). \quad (3)$$

În acest timp condensatoarele înmagazinează energia:

$$W_C = (1/2)\, C_1(E - V - U_o)^2 + (1/2)\, C_2V^2 =$$

$$= (1/2)[\, C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\, (E - U_o)^2. \quad (4)$$

Energia consumată pe diodă rezultă din *bilantul* ***energiilor***:

$$W_D = W_{bat} - W_C = (1/2)[\, C_1C_2 : (C_1 + C_2)]\, (E^2 - U_o^2) =$$

$$= q_D \cdot (E + U_o) / 2 = 8{,}12\ \mu\text{J}. \quad (5)$$

c) **Sarcina** totală care trece prin baterie:

$$q_E = q_D + (C_{1E} - q_D) + (C_{2E} - q_D) =$$

$$= (C_1 + C_2)E - (E - U_o)\, C_1C_2 : (C_1 + C_2) \quad (6)$$

şi energia totală dezvoltată de baterie:

$$W_E = q_E\, E = (C_1 + C_2)E^2 - E\,(E - U_o)\, C_1C_2 : (C_1 + C_2). \quad (7)$$

Căldura dezvoltată pe rezistoarele $R_{1,2}$ se obţine din *bilanţul* ***energiilor***, scăzând din (7) energia înmagazinată în condensatoare şi energia consumată de diodă:

$$Q_{J1,2} = W_E - (1/2)\, (C_1 + C_2)E^2 - W_D =$$

$$= [(C_1^2 - C_1C_2 + C_2^2)E^2 + C_1C_2(2E - U_o)U_o] : [2(C_1 + C_2)]. \quad (8)$$

Pe de altă parte, sarcinile care trec prin rezistoare sunt

$$q_1 = C_2(E - V), \quad q_2 = C_1[E - (E - V - U_o)] = C_1(V + U_o), \quad (9)$$

înmulţite cu diferenţa de potenţial *medie* pe rezistor trebuie să dea *căldura* disipată: $Q_{J1} = q_1 \cdot (1/2)(E - V) =$

$= (1/2)\, C_2(E - V)^2 = (1/2)\, C_2[(C_2E + C_1U_o) : (C_1 + C_2)]^2$, (10)

$Q_{J2} = q_2 \cdot (1/2)(V + U_o) =$

$= (1/2)\, C_1(V + U_o)^2 = (1/2)\, C_1[(C_1E + C_2U_o) : (C_1 + C_2)]^2$.

Suma acestor două călduri este egală cu (8). Dealtfel, rezultatul (10) se poate obţine direct din *bilanţul energiilor* pentru fiecare ramură : $q_1E = (1/2)\, C_2(E^2 - V^2) + Q_{J1} \rightarrow Q_{J1} = (1/2)\, C_2(E - V)^2$,

$q_2E = (1/2)\, C_1[E^2 - (E - V - U_o)^2] + Q_{J2} \rightarrow Q_{J2} = (1/2)\, C_1(V + U_o)^2$.

2.4.16. ***Pentru măsurarea curentului invers al unei diode semiconductoare s-a folosit montajul din figură . Condensatorul*** C = 10 μF ***este iniţial încărcat până la tensiunea*** U = 4,5 V. ***În prima experienţă se ţine comutatorul pe poziţia*** 1 , τ_1 = 1,0 min, ***apoi trecându-l pe poziţia*** 2 ***se citesc pe galvanometrul*** balistic ***(care indică*** sarcina ***ce trece prin el)*** N_1 = 5,0 ***diviziuni . Experienţa se repetă de la capăt, alegând acum*** τ_2 = 2,0 min ***şi citind*** N_2 = 20 div, ***dar în sens invers . Considerând curentul invers ca fiind practic independent de tensiune, aflaţi acest curent .***

Rezolvare. Sarcina iniţială de pe condensator este $Q = CU$. Punând comutatorul pe poziţia 1 , condensatorul începe să se descarce şi considerând curentul de descărcare prac-tic independent de tensiune, sarcina care va trece prin diodă va fi $i\tau$ şi deci pe condensa-tor rămâne sarcina $Q - i\tau$ care se va descărca prin galvanometru, când trecem comutatorul pe poziţia **2** .

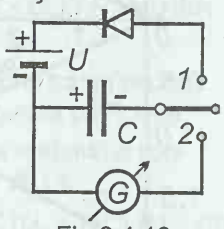


Fig.2.4.16

$$Q - i\tau_1 = kN_1 \,. \qquad (1)$$

În a doua experienţă, acul deviază în sens invers, fiindcă timpul de descărcare fiind mai lung, condensatorul se descarcă şi se reîncarcă în sens invers, de aceea la descărcarea sa, acul deviază acum în sens invers :

$$Q - i\tau_2 = - kN_2 \,. \qquad (2)$$

Împărţind ecuaţiile membru la membru şi ţinând seama că $Q = C\,U$, găsim : $i = CU(N_1 + N_2) : (\tau_1N_2 + \tau_2N_1) = 0{,}60\ \mu A$. (3)

2.4.17. ***În circuitul din figură*** R = 100 Ω , ***dioda are caracteristica idealizată din figură, iar tensiunea aplicată este " în triunghi". Trasaţi caracteristica*** V-A (volt-amper) ***a circuitului şi graficele tensiunilor pe rezistor şi pe diodă .***

Rezolvare. Reprezentăm pe aceeaşi diagramă caracteristica diodei şi a rezistorului ($I = U : R$) şi le compunem : la acelaşi curent

adunăm tensiunile (dioda şi rezistorul fiind în serie). Pe porţiunea 0 - 1 V dioda şi rezistorul au aceeaşi caracteristică (R = 100 Ω), deci tensiuni egale la acelaşi curent .

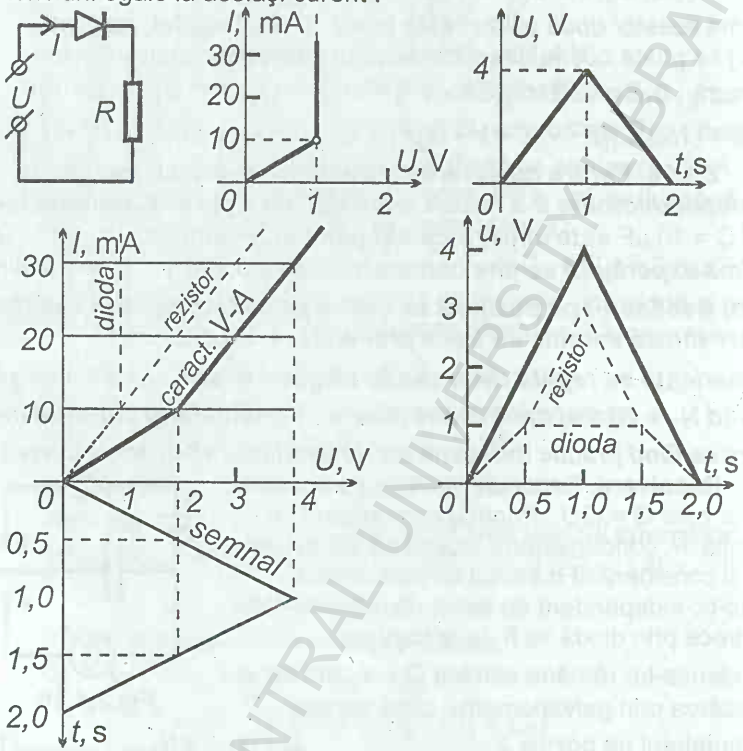


Fig.2.4.17

Tensiunile pe diodă şi pe rezistor se obţin grafic . Construim graficul în triunghi al tensiunii aplicate. Pentru U = 2,0 V (t = 0,5 s şi 1,5 s) şi U = 4,0 V (t = 1,0 s) urcăm pe verticală până la intersecţie cu caracteristica globală, de unde mergând pe orizontală la stânga intersectăm caracteristicile individuale componente şi citim tensiunile respective : pentru U = 2,0 V ,

avem $U_D = U_R$ = 1,0 V (pentru t = 0,5 s şi 1,5 s).

După aceasta tensiunea pe diodă rămâne constantă (1,0 V) . Pentru U = 4,0 V, avem U_D = 1,0 V şi U_R = 3,0 V (pentru t = 1,0 s).

Semnalul global în triunghi, precum şi tensiunile componente pe diodă şi pe rezistor sunt reprezentate în figură .

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.4.18. ***Un condensator de capacitate*** C = 100 μF ***încărcat până la tensiunea*** U = 5,0 V ***este legat la un rezistor*** R = 100 Ω ***printr-o diodă a cărei caracteristică*** V-A ***se poate aproxima ca în figură . Aflaţi căldura degajată în rezistor.***

Rezolvare. În momentul când tensiunea pe diodă ajunge la valoarea U_o avem tensiunea pe condensator :

$$U^* = U_o + R I_o = 2{,}0 \text{ V} < U = 5{,}0 \text{ V} . \quad (1)$$

Până în acest moment va trece prin circuit sarcina :

$$q^* = C U - C U^* = C(U - U^*) \quad (2)$$

care străbate diferenţa de potenţial U_o constantă de la bornele diodei, deci pe diodă se consumă energia :

$$W_d = q^* U_o = C U_o (U - U^*) , \quad (3)$$

iar **căldura** degajată pe rezistorul R se obţine din *bilanţul* ***energiilor*** :

$$(1/2)\, C (U^2 - U^{*2}) = W_d + Q_{J1} ,$$

$$Q_{J1} = (1/2)\, C [(U - U_o)^2 - R^2 I_o^2] . \quad (4)$$

Nu putem aplica formula $R I^2 t$ (valabilă pentru curent ***constant***), deoarece curentul *descreşte* neuniform de la $(U - U_o) : R = 40$ mA la $I_o = 10$ mA .

După momentul de mai sus dioda se comportă ca un rezistor cu rezistenţa $R_d = U_o : I_o = 100\ \Omega$. **Căldura** degajată pe R este egală cu fracţiunea corespunzătoare din energia restantă a condensatorului :

$$Q_{J2} = (1/2)\, C\, U^{*2} \cdot R : (R + R_d) =$$

$$= (1/2)\, C\, (U_o + R I_o)^2 \cdot R : (R + U_o / I_o)^2 = (1/2)\, C\, (U_o + R I_o)\, R I_o . \quad (5)$$

Căldura *totală* degajată pe rezistorul R : $Q_J = Q_{J1} + Q_{J2} =$

$$= (1/2)\, C [(U - U_o)^2 - R\, U_o I_o] = 0{,}85 \text{ mJ} . \quad (6)$$

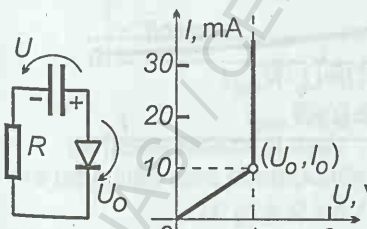


Fig.2.4.18

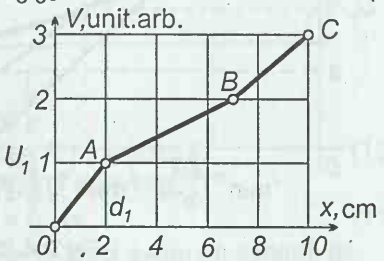


Fig.2.4.19

2.4.19. ***Determinaţi diferenţa de potenţial între electrozii unui tub de descărcare cu heliu, în momentul când începe ionizarea atomilor de heliu prin şocuri electronice. În acest***

moment potenţialul de-a lungul tubului este reprezentat în figură în unităţi relative . Drumul liber al electronilor este $\lambda =$ $= 100\ \mu m$ ***, iar potenţialul de ionizare al heliului*** $V_{ion} = 24{,}5\ V$ ***.***

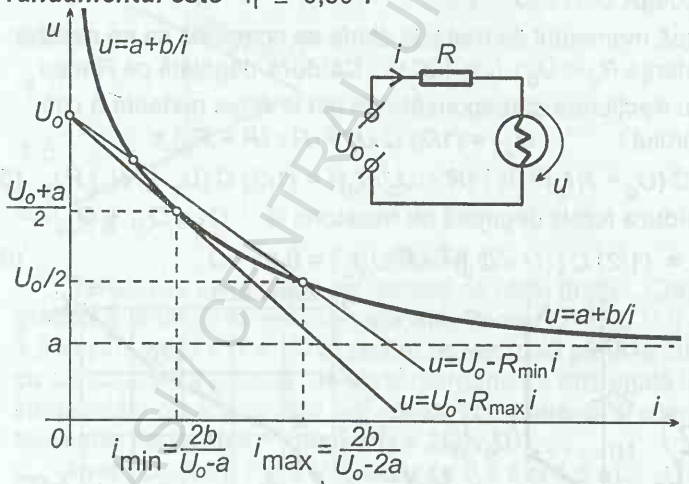
Rezolvare. Câmpul electric (egal cu *căderea* de potenţial pe unitatea de lungime, deci cu *panta* graficului) este cel mai intens în porţiunea OA (spaţiul întunecos catodic), unde electronii (şi ionii) sunt cel mai puternic acceleraţi . Între două ciocniri succesive, deci în medie pe o distanţă λ energia câştigată de electroni trebuie să fie suficientă pentru a produce ionizarea, deci avem condiţia :

$$eE\lambda = eV_{ion} \quad \text{sau} \quad e(U_1 / d_1)\lambda = eV_{ion} \rightarrow U_1 = V_{ion}\, d_1/\lambda \,. \qquad (1)$$

Din grafic rezultă raportul $U / U_1 = 3/1$, prin urmare

$$U = 3U_1 = 3\ V_{ion}\, d_1/\lambda = 14{,}7\ kV \,. \qquad (2)$$

(*) 2.4.20. ***Caracteristica volt-amper a unui bec cu arc electric în gaze are forma descrescătoare*** $u = a + b/i$, $a = 55\ V$, $b = 50\ VA$ ***. Pentru a stabiliza regimul descărcării se leagă în serie un rezistor*** R *de "balast"* ***. Tensiunea aplicată este*** $U_o =$ $= 200\ V$ ***. Pentru ce valori ale rezistenţei*** R ***becul arde stabil şi randamentul este*** $\eta \geq 0{,}50$ ***?***



a)

Fig.2.4.20 a

Rezolvare. Conform figurii avem : $U_o = R\,i + a + b/i$, (1)

relaţie pe care o retranscriem astfel :

$$u = U_o - R\,i = u = a + b/i \,. \qquad (2)$$

Să reprezentăm grafic cele două caracteristici :

$$u = U_o - R\,i \quad \text{şi} \quad u = a + b/i\,. \tag{3}$$

Panta caracteristicii $u = U_o - R\,i$ este $-R$, deci R este maxim când această dreaptă este *tangentă* la caracteristica becului $u = a + b/i$. În punctul de tangentă cele două pante coincid :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}(U_o - R\,i) = -R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}(a + b/i) = -b/i^2\,, \tag{4}$$

de unde

$$i_{min} = \sqrt{b/R_{max}} \tag{5}$$

şi apoi introducând în (1) :

$$R_{max} = (U_o - a)^2 : (4b) = 105\ \Omega\,, \tag{6}$$

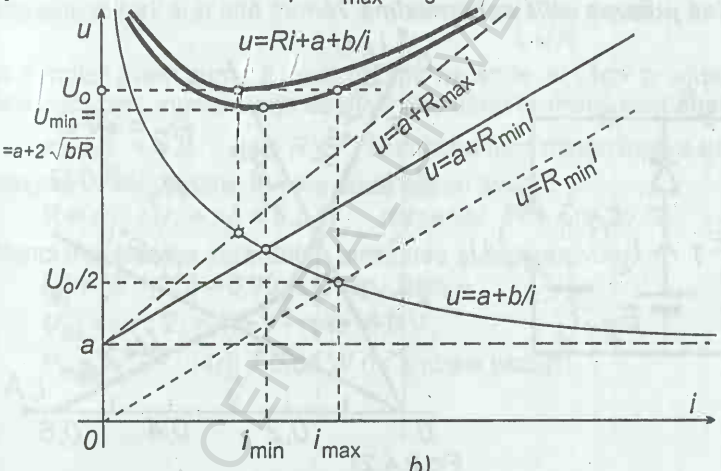
$$i_{min} = \sqrt{b/R_{max}} = 2b : (U_o - a) = 0{,}69\ \text{A}\,. \tag{7}$$

Tensiunea pe bec în acest caz :

$$u_{max} = a + b/i_{min} = (U_o + a) : 2 = 127{,}5\ \text{V} \tag{8}$$

şi randamentul

$$\eta = u_{max} : U_o = 63{,}7\ \%\,. \tag{9}$$



b)

Fig.2.4.20 b

Se poate judeca şi aşa : $U = R\,i + a + b/i$ (10)

are un *minim* care corespunde *anulării derivatei* :

$$U'(i) = R - b/i^2 = 0 \tag{11}$$

(derivata a doua $U''(i) = +2b/i^3 > 0$, deci avem un *minim*), de unde

$$i_{min} = \sqrt{b/R_{max}} \tag{12}$$

care corespunde rezistenţei maxime : $U_{min} = a + 2\sqrt{bR_{max}}$. (13)

BCUAU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Punând condiţia $U_{min} = U_o$ obţinem pe R_{max} de mai sus (6). Dealtfel minimul lui (10) se poate obţine imediat şi fără derivate. În adevăr, în (10) avem suma a doi termeni variabili al căror produs este *constant*, deci suma este *minimă* când termenii sunt *egali*:

$R\,i = b\,/\,i$, de unde $i = \sqrt{b/R}$, etc.

R_{min} cerut se obţine din condiţia ca randamentul să fie $\eta \geq 0{,}50$. $\eta = (a + b\,/\,i) : U_o \geq 0{,}50$, de unde

$$i_{max} = 2b : (U_o - 2a) = 1{,}11 \text{ A} \qquad (14)$$

şi tensiunea pe bec: $u_{min} = a + b\,/\,i_{max} = U_o\,/\,2$ (15)

(fiindcă $\eta = 50$ %). Introducând în (1) obţinem:

$$R_{min} = U_o : (2i_{max}) = U_o(U_o - 2a) : (4b) = 90\ \Omega. \qquad (16)$$

(*) 2.4.21. ***Se dă schema din figură în care*** $E_1 = 6{,}0$ V, $r_1 = 20\ \Omega$, $E_2 = 2{,}0$ V, $r_2 = 20\,/\,3\ \Omega$ ***şi dioda este ideală. Trasaţi caracteristica*** U-I ***(volt-amper) a montajului. Pentru ce rezistenţă de sarcină puterea utilă este maximă?***

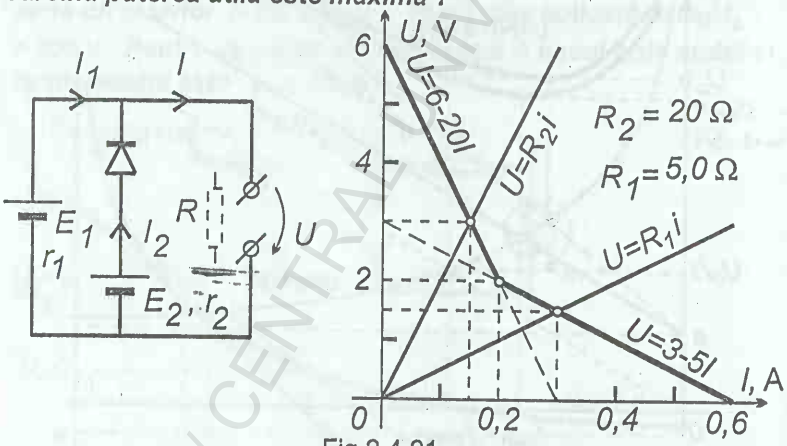


Fig.2.4.21

Rezolvare. a) Dioda conduce dacă $U < E_2 = 2{,}0$ V şi atunci

$$I = I_1 + I_2,\ E_1 = I_1 r_1 + U,\ E_2 = I_2 r_2 + U, \qquad (1)$$

de unde $U = (E_1 r_2 + E_2 r_1) : (r_1 + r_2) - I \cdot r_1 r_2 : (r_1 + r_2) = 3 - 5I$,

pentru $U < E_2 = 2{,}0$ V. (2)

Dacă $U > E_2$, dioda nu conduce şi atunci

$$U = E_1 - Ir_1 = 6 - 20I, \text{ pentru } U > E_2 = 2{,}0 \text{ V}. \qquad (3)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cele două caracteristici se intersectează în punctul :

$$I_0 = 0{,}20 \text{ A}, \qquad U_0 = 2{,}0 \text{ V}. \tag{4}$$

b) Intersectând cele două caracteristici de mai sus cu caracteristica $U = RI$ a rezistorului, găsim pentru curent expresii de tipul:

$I = E : (r + R)$, unde $E = (E_1 r_2 + E_2 r_1) : (r_1 + r_2) = 3{,}0$ V

şi $r = r_1 r_2 : (r_1 + r_2) = 5{,}0\ \Omega$, (2')

respectiv $E = E_1 = 6{,}0$ V şi $r = r_1 = 20\ \Omega$. (3')

$$P = RI^2 = R \cdot E^2 : (r + R)^2 = f(R) . \tag{5}$$

Condiţia de *maxim* a puterii este *anularea derivatei* :

$f'(R) = [E^2 : (r + R)^2]\,(r - R) = 0$, de unde $R = r$ (6)

(*teorema* ***adaptării***) . Natura extremului rezultă din semnul derivatei a *doua* : $f''(R) = 2[E^2 : (r + R)^4]\,(R - 2r)$, (7) care pentru rădăcina (6) este negativă, deci avem un *maxim* .

Dealtfel condiţia (6) se obţine imediat şi fără derivate, scriind expresia puterii sub altă formă :

$$P = E^2 : \left(\frac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R} \right)^2 . \tag{8}$$

La numitor avem suma a două mărimi variabile, al căror produs este *constant*, atunci suma este *minimă* când termenii sunt *egali* :

$r/\sqrt{R} = \sqrt{R}$, deci $R = r$. Numitorul fiind minim fracţia este maximă . Prin urmare, în cele două cazuri avem :

$R = r_1 r_2 : (r_1 + r_2) = 5{,}0\ \Omega$, respectiv $R = r_1 = 20\ \Omega$. (9)

Atunci intensitatea curentului, tensiunea şi puterea vor fi :

$I_{ad} = [E : (2r)] = 0{,}30$ A , resp. 0,15 A , (10)

$U_{ad} = (E : 2) = 1{,}5$ V , resp. 3,0 V , (11)

$P_{max} = [E^2 : (4r)] = 0{,}54$ W (în ambele cazuri) . (12)

* * *

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. ELECTROMAGNETISM

3.1. INDUCŢIA MAGNETICĂ

3.1.1. ***La ce distanţă şi spre ce punct cardinal câmpul magnetic al unui conductor vertical lung, străbătut de un curent*** I = 10 A ***de jos în sus, compus fiind cu cel terestru, dă un câmp rezultant*** vertical ***? Componentele inducţiei magnetice terestre sunt*** B_0 *(orizontal)* = 20 μT , B_v *(vertical)* = 50 μT .

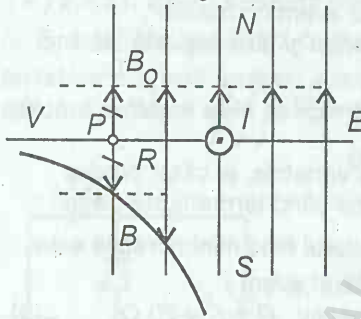


Fig.3.1.1

Rezolvare. Liniile de câmp pentru B_0 coincid practic cu *meridianele* geografice (neglijăm ***declinaţia***) şi pe o regiune restrânsă (laborator) sunt drepte *paralele* echidistante . Punctul căutat este spre Vest la distanţa dată de condiţia :

$$B_0 = B = \mu I : (2\pi R) \rightarrow$$

$$R = \mu I : (2\pi B_0) = 10 \text{ cm} .$$

3.1.2. ***Dintr-o sârmă dată se confecţionează o dată o spiră circulară, apoi*** n ***spire circulare suprapuse (multiplicator). De câte ori câmpul magnetic în centrul multiplicatorului este mai mare decât în centrul spirei iniţiale, dacă aplicăm aceeaşi tensiune (sau curent) ?***

Rezolvare. $B = \mu I : (2\pi R)$, $B' = n\mu I : (2\pi R')$, (1)

$2\pi R' = 2\pi R : n \rightarrow B' = n\mu I : (2\pi R / n) = n^2 B$, (2)

deci dacă din aceeaşi sârmă facem un multiplicator, atunci cu acelaşi curent obţinem un câmp de n^2 ori mai mare .

3.1.3. ***Aflaţi inducţia magnetică în planul mediator a două conductoare paralele situate la distanţa*** d ***între ele, străbătute de curenţi egali şi de sens opus*** I .

Rezolvare. Aplicăm *principiul* ***suprapunerii*** :

$$B = 2B_1 \cos\alpha = 2 \cdot [\mu I : (2\pi r)] \cdot (d/2) : r =$$

$$= \mu I d : (2\pi r^2) = \mu I d : [2\pi(y^2 + d^2/4)] . \quad (1)$$

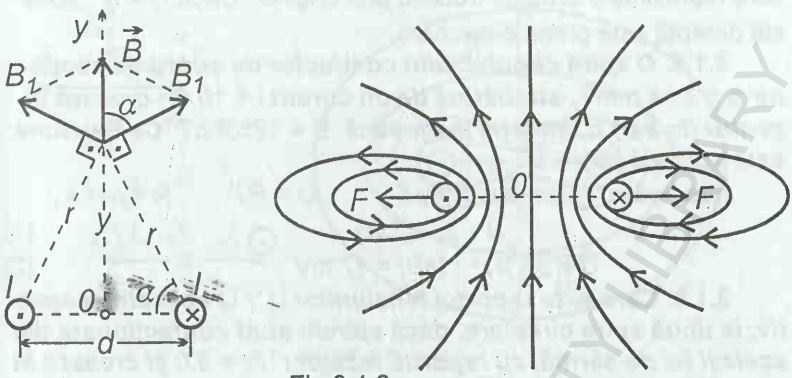


Fig.3.1.3

Dacă schimbăm y în $-y$, câmpul este acelaşi : $B(-y) = B(y)$. În centrul O ($y = 0$) câmpul este maxim :

$$B(0) = B_{max} = 2\mu I : (\pi d) . \qquad (2)$$

La distanţe *mari* $y \gg d$:

$$B \approx \mu I d : (2\pi y^2) \sim 1 : y^2 , \qquad (3)$$

spre deosebire de scăderea $\sim 1 : y$ pentru conductoare străbătute de curenţi de acelaşi sens .

3.1.4. *Două conductoare rectilinii lungi străbătute de curenţii I_1, I_2 sunt perpendiculare între ele în acelaşi plan . Aflaţi inducţia magnetică în planul lor. Unde inducţia este nulă ?*

Rezolvare. Aplicăm *principiul suprapunerii* . Câmpul produs *separat şi independent* de fiecare curent este perpendicular pe planul curenţilor, deci câmpurile se adună algebric. Sensurile sunt indicate în figură : în cadranele I , III se scad, în cadranele II şi IV se adună . Pentru un punct de coordonate (x, y) avem :

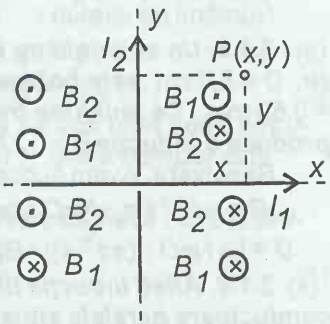


Fig.3.1.4

$$B = \mu I_1 : (2\pi y) - \mu I_2 : (2\pi x) . \quad (1)$$

Această expresie este valabilă pentru orice cadran, dar x , y trebuie luaţi cu semnele lor algebrice ..

Câmpul este *nul* în punctele :

$$B = 0 , \qquad I_1 / y - I_2 / x = 0 , \quad y = (I_1 / I_2)\, x , \qquad (2)$$

care reprezintă o *dreaptă* trecând prin origine . Dacă $I_1 = I_2$, această dreaptă este prima *bisectoare.*

3.1.5. ***O spiră circulară din conductor de cupru de secţiune*** $s = 3{,}14\ mm^2$ ***, străbătută de un curent*** $I = 10\ A$ ***, creează în centru (în aer) o inducţie magnetică*** $B = 125{,}6\ \mu T$. ***Ce tensiune este aplicată spirei ?***

Rezolvare. Avem succesiv : $U = RI$, $R = \rho \ell / s$,

$$\ell = 2\pi r\,, \qquad B = \mu I : (2\pi r)\,, \tag{1}$$

$$U = \rho \pi \mu I^2 : (sB) = 17\ mV\,. \tag{2}$$

3.1.6. ***Care este raportul tensiunilor*** U'/U ***aplicate, respectiv, la două spire circulare, dacă spirele sunt confecţionate din acelaşi fel de sârmă, au raportul razelor*** $r'/r = 3{,}0$ ***şi creează în centrul lor aceeaşi inducţie magnetică ?***

Rezolvare. Avem succesiv:

$$U'/U = [(\rho \ell'/s) : (\rho \ell / s)] \cdot (I'/I). \tag{1}$$

$$U'/U = [(2\pi r') : (2\pi r)] \cdot (r'/r) = (r'/r)^2 = 9{,}0\,. \tag{2}$$

3.1.7. ***Un solenoid este bobinat într-un singur strat cu sârmă de diametru*** $d = 1{,}0\ mm$, ***cu spirele strâns lipite între ele . Care este inducţia*** B ***în solenoid (cu aer), dacă curentul*** $I = 1{,}0\ A$ ***? Câte astfel de straturi sunt necesare pentru a obţine o inducţie*** $B' = 5{,}0\ mT$ ***(la acelaşi curent*** I ***) ?***

Rezolvare. Avem succesiv : $B = \mu N I / \ell$, dar

$$\ell = Nd \rightarrow B = \mu N I : (Nd) = \mu I / d = 1{,}26\ mT\,. \tag{1}$$

Numărul de straturi : $k = B'/B \cong 4$ straturi . (2)

3.1.8. ***Un solenoid cu aer de lungime*** $\ell = 20\ cm$ ***şi diametru*** $D = 5{,}0\ cm$ ***este bobinat cu sârmă de cupru cu diametrul*** $d = 0{,}50\ mm$ ***. Ce tensiune trebuie aplicată solenoidului pentru a produce o inducţie*** $B = 12{,}56\ mT$ ***?***

Rezolvare. Avem succesiv : $U = RI$,

$$R = \rho \ell_c / s = \rho N \pi D : (\pi d^2/4)\,, \qquad B = \mu N I / \ell\,, \tag{1}$$

$$U = [\rho N \pi D : (\pi d^2/4)] \cdot BI : (\mu N) = 4\rho D I B : (\mu d^2) = 27{,}2\ V. \tag{2}$$

(*) 3.1.9. ***Aflaţi inducţia magnetică în planul mediator a două conductoare paralele situate la distanţa*** d ***între ele, străbătute de curenţi egali şi de acelaşi sens,*** I. ***Unde inducţia magnetică este maximă ?***

Rezolvare. Conform figurii : $B = 2B_1 \cos\alpha =$

$$= [(2\mu I) : (2\pi r)]\, y/r = \mu I y : [\pi(y^2 + d^2/4)]\,. \tag{1}$$

$$B(-y) = -B(y)\,, \qquad B(0) = 0\,. \tag{2}$$

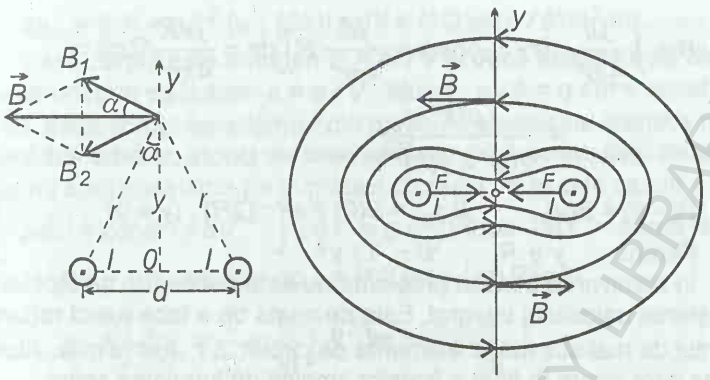


Fig.3.1.9

Condiţia de *extremum* pentru $B(y)$ este *anularea* ***derivatei*** :

$$B'(y) = \frac{\mu I}{\pi} \frac{y^2 + d^2/4 - y\cdot(2y)}{\left(y^2 + d^2/4\right)^2} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d^2 - 4y^2}{\left(y^2 + d^2/4\right)^2} , \qquad (3)$$

de unde $y = \pm d/2$ şi $B_{max} = \pm \mu I : (\pi d)$. (4)

Rezultatul se obţine imediat şi fără derivate dacă scriem astfel :

$$B = \frac{\mu I}{\pi\left(y + \frac{d^2}{4y}\right)} . \qquad (5)$$ La

numitor avem suma a doi termeni al căror produs este *constant*, atunci suma este *minimă* când termenii sunt *egali* : $y = d^2 : (4y)$, de unde $y = \pm d/2$.

La distanţe mici : $y \ll d$, $B \sim y$. (6)

La distanţe mari : $y \gg d$, $B \sim 1/y$. (7)

(* *) 3.1.10. ***Aflaţi inducţia magnetică pe axa unei spire circulare de rază*** R ***străbătută de un curent*** I ***. Unde câmpul este maxim ?***

Rezolvare. Aplicăm **legea Biot-Savart-Laplace** (v. (22) *Breviar*) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu I\, d\vec{r} \times \vec{r}}{4\pi r^3} . \qquad (1)$$

La fiecare *element* $d\vec{r}$ corespunde un element egal în modul şi de sens contrar, situat diametral opus. Câmpurile produse de aceste elemente se descompun după axa spirei şi după direcţia perpendiculară pe axă . Aceste din urmă componente se distrug reciproc, astfel încât rămân de însumat *algebric* componentele axiale :

$$B = \int \frac{\mu I}{4\pi r^3}\,\mathrm{d}r \cdot r \cdot \cos\alpha = \frac{\mu I}{4\pi r^3} R \int \mathrm{d}r = \frac{\mu I R}{4\pi r^3} 2\pi R =$$

$$= \frac{\mu I R^2}{2\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}} \,. \qquad (2)$$

$B(-y) = B(y)$, $\qquad B_{max} = B(0) = \mu I : (2R)$, $(y = 0)$. (3)

Pentru $\quad y \gg R \quad , \quad B \sim 1 / y^3$. (4)

În rezolvarea acestei probleme nu este necesară, de fapt, cunoaşterea calculului integral. Este de ajuns de a face exact raţionamentul de mai sus luând elemente de circuit $\Delta\vec{r}$ foarte mici. Atunci suma care apare în final a acestor lungimi dă lungimea spirei (cercului) $2\pi R$ ca mai sus .

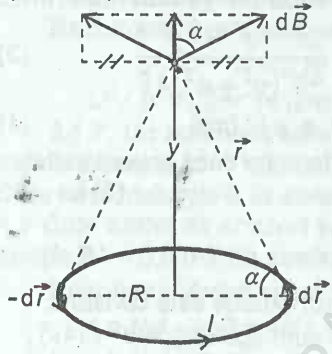


Fig.3.1.10

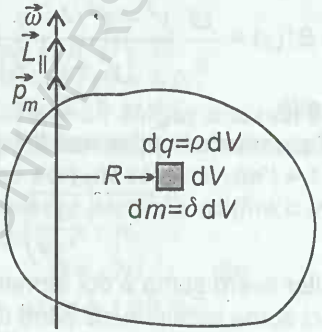


Fig.3.1.11

(* *) 3.1.11. ***Un corp solid omogen oarecare, de masă*** m ***, este încărcat uniform pe volum cu o sarcină electrică*** q ***. Corpul este rotit cu viteza unghiulară*** ω ***în jurul unei axe . Aflaţi raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic longitudinal (componenta paralelă cu axa de rotaţie). Dar în cazul când corpul este*** **neomogen** ***şi sarcina este distribuită neuniform dar*** **proporţional** ***cu densitatea ? De exemplu, un corp format din particule electrizate identice îngrămădite arbitrar ?***

Rezolvare. Luăm un element de volum d*V* situat la distanţa *R* de axa de rotaţie . Sarcina şi masa acestui element sunt respectiv :

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V\,, \qquad \mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}V \qquad (1)$$

(ρ - densitatea de sarcină , δ - densitatea de masă).

Curentul elementar generat de sarcina d*q* este evident :

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}q : T = [\omega : (2\pi)]\,\mathrm{d}q = [\omega : (2\pi)]\,\rho\,\mathrm{d}V \qquad (2)$$

şi **momentul magnetic** corespunzător :

$dp_m = S\,dI = \pi R^2\,[\omega : (2\pi)]\,\rho\,dV = (1/2)\omega(\rho/\delta)R^2 dm$. (3)

Dacă corpul este omogen $\delta = m/V$ şi dacă sarcina este distribuită uniform pe volum $\rho = q/V$, atunci $\rho/\delta = q/m = \text{const}$. La fel, dacă corpul este format din particule electrizate *identice* îngrămădite arbitrar, atunci de asemenea $\rho/\delta = \text{const}$, deşi densităţile nu sunt constante pe cuprinsul corpului. În aceste cazuri :

$$\rho\,dV = \text{const}\cdot\delta\,dV\,,\quad \int \rho dV = q = \int \text{const}\cdot\delta dV = \text{const}\cdot m\,,$$

$\rho/\delta = q/m$. Atunci $dp_m = (1/2)\omega(q/m)R^2 dm$,

$$p_m = \int dp_m = \frac{1}{2}\omega\frac{q}{m}\int R^2 dm = \frac{1}{2}\omega\frac{q}{m}J\,, \qquad (4)$$

unde
$$J = \int R^2 dm \qquad (5)$$

este *momentul de* ***inerţie*** al corpului faţă de axa de rotaţie. Pe de altă parte, proiecţia momentului cinetic pe axa de rotaţie este

$$L_{||} = J\omega \qquad (6)$$

(în *general* momentul cinetic $\vec{L}$ **nu** este paralel cu axa de rotaţie, deci cu $\vec{p}_m$), astfel încât rezultă raportul cerut : $p_m : L_{||} = q:(2m)$. (7)

Vom regăsi această valoare caracteristică a raportului în diferite cazuri particulare în problemele următoare.

Problema de faţă poate fi rezolvată şi fără cunoaşterea calculului integral. Pentru aceasta facem un raţionament identic cu cel de mai sus, luând elemente foarte mici de volum ΔV, de masă $\Delta m = \delta\Delta V$ şi sarcină $\Delta q = \rho\Delta V = (\rho/\delta)\,\Delta m$, unde $\rho/\delta = \text{const}$. Vom găsi astfel momentul magnetic :

$$p_m = \Sigma(1/2)\omega(q/m)R^2\Delta m = (1/2)\omega(q/m)\,\Sigma R^2\Delta m\,, \qquad (8)$$

unde
$$J = \Sigma R^2\Delta m \qquad (9)$$

este momentul de *inerţie* în raport cu axa de rotaţie .

**** 3.1.12. a)** ***Aflaţi inducţia magnetică a unui segment rectiliniu de curent*** I ***pe mediatoarea sa în funcţie de unghiul*** α ***sub care se vede segmentul.*** **b)** ***Aflaţi inducţia magnetică în centrul unei spire (cadru) dreptunghiulare de laturi*** ℓ, b ***. Dar în centrul unui poligon regulat cu*** n ***laturi ?***

Rezolvare. a) Aplicăm formula **Biot-Savart-Laplace** (v. *Breviar*):

$$d\vec{B} = \frac{\mu I\,d\vec{r}\times\vec{r}}{4\pi r^3}\,. \qquad (1)$$

În cazul nostru, toate segmentele *elementare* dx dau câmp pe aceeaşi direcţie, ca în figură, deci se însumează *algebric* :

$$dB = \frac{1}{4\pi \cdot^3} \mu I \, dx \cdot r \cdot \sin(\pi/2 + \theta)` ,$$

dar $x = y \operatorname{tg} \theta$, care prin diferenţiere dă :

$$dx = y \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad r = \frac{y}{\cos\theta} , \quad (2)$$

rezultă atunci

$$B = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\mu I \cos\theta \, d\theta}{4\pi y} = \frac{\mu I}{4\pi y} 2\sin\theta \Big|_0^{\alpha/2} = \frac{\mu I}{2\pi y} \sin\frac{\pi}{2} , \quad (3)$$

$$B = \frac{\mu I}{\pi} \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\mu I \ell}{4\pi y \sqrt{y^2 + \ell^2/4}} , \quad (4)$$

unde ℓ este lungimea segmentului de curent .

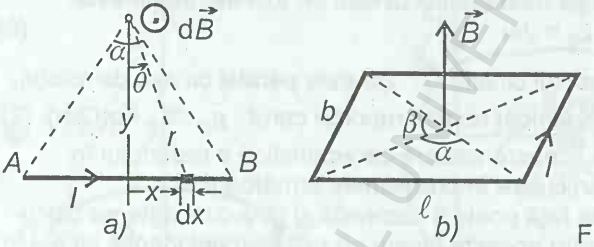


Fig.3.1.12

b) $$B = 2\frac{\mu I}{2\pi}\left[\frac{\sin(\alpha/2)}{b/2} + \frac{\sin(\beta/2)}{\ell/2}\right] = \frac{2\mu I}{\pi}\sqrt{1/\ell^2 + 1/b^2} . \quad (5)$$

În particular, în centrul unei spire (cadru) pătratice de latură ℓ :

$$B = \frac{2\sqrt{2}\,\mu I}{\pi \ell} . \quad (6)$$

În centrul unui poligon regulat cu *n* laturi :

$$B = n\frac{\mu I}{2\pi} \frac{\sin(\alpha/2)}{R\cos(\alpha/2)} = n\frac{\mu I}{2\pi R} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} . \quad (7)$$

La limită când $n \to \infty$ regăsim rezultatul cunoscut : câmpul în centrul unei spire *circulare* : $B = \mu I : (2R)$.

** **3.1.13.** ***Printr-un conductor cilindric lung de rază*** R ***circulă un curent*** I ***, uniform distribuit pe secţiunea conductorului . a) Calculaţi câmpul magnetic . b) Dacă în conductor există o cavitate cilindrică cu axă paralelă la distanţa*** r_0 ***de cea a conductorului, aflaţi câmpul magnetic din cavitate.***

Rezolvare. a) Vom aplica *teorema lui* ***Ampère*** (v. *Breviar*):

Circulaţia *câmpului magnetic* $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ *de-a lungul unui contur închis este egală cu intensitatea* ***curentului*** *electric care traversează o suprafaţă sprijinită pe acel contur :*

$$\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = I_{\text{int}} = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S}\,, \qquad j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_\perp}\,. \tag{1}$$

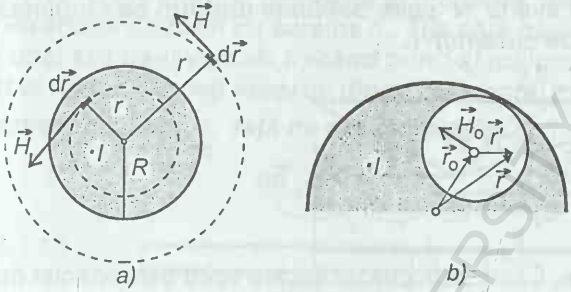


Fig.3.1.13

Ţinând seama de *simetria cilindrică*, alegem un contur circular concentric de rază r, care este *şi linie de câmp* . Circulaţia câmpului magnetic de-a lungul acestui contur se calculează imediat, deoa-rece H depinde numai de distanţa r :

$$\oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = \oint_C H\,\mathrm{d}s = H\oint_C \mathrm{d}s = H\cdot 2\pi r\,. \tag{2}$$

În **interiorul** conductorului : $H\cdot 2\pi r = I_{\text{int}} = I\cdot r^2 : R^2$,

$$H = [I : (2\pi R^2)]\,r\,, \quad B = \mu H = [\mu I : (2\pi R^2)]\,r\,, \quad r \le R\,, \tag{3}$$

iar în **exteriorul** conductorului :

$$H\cdot 2\pi r = I\,, \quad H = I : (2\pi r)\,, \quad B = \mu I : (2\pi r)\,, \quad r \ge R\,. \tag{4}$$

Expresiile obţinute pot fi scrise şi *vectorial* . Alegem un punct-origine *pe axa* conductorului şi ducem vectorul de poziţie $\vec{r}$ din origine până în punctul dorit unde calculăm câmpul. Atunci cu ajutorul vectorului *densitate de curent* $\vec{j}$ scriem :

În **interior** : $\vec{H} = \frac{1}{2}\,\vec{j}\times\vec{r}\,, \quad \left(j = \frac{I}{\pi R^2}\right).$

În **exterior** : $\vec{H} = \frac{1}{2}\,\frac{R^2}{r^2}\,\vec{j}\times\vec{r}\,.$ (5)

b) Aplicăm *principiul* ***suprapunerii.*** Câmpul din cavitate este ***diferenţa*** dintre câmpul produs de conductorul presupus *plin* şi câmpul cavităţii presupuse *pline*, anume :

$$\vec{H}_o = \frac{1}{2}\vec{j}\times\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{j}\times\vec{r}' = \frac{1}{2}\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{2}\vec{j}\times\vec{r}_o ,$$

$j = I : [\pi(R^2 - r_o^2)]$,

deci câmpul din cavitate este omogen şi uniform, egal cu cel de pe axa cavităţii dacă conductorul ar fi plin .

** **3.1.14.** ***Calculaţi intensitatea câmpului magnetic pe axa unui*** **solenoid** ***având*** N ***spire bobinate*** **uniform** ***pe lungimea*** ℓ ***şi străbătute de curentul*** I .

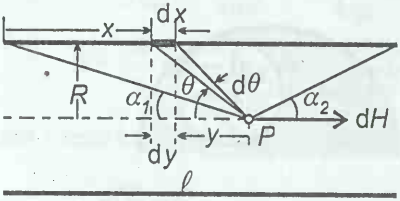


Fig.3.1.14

Rezolvare. Câmpul produs de fiecare spiră este orientat de-a lungul axei solenoidului, deci se însumează algebric. Folosim rezultatul problemei 3.1.10 : $dH = \dfrac{R^2\,dI}{2\left(R^2+y^2\right)^{3/2}}$, (1)

dar $dI = (NI/\ell)\,dx$, deoarece solenoidul este bobinat *uniform* . Mai departe este comod să exprimăm totul prin unghiul θ (observăm că $dy = -dx$) : $tg\theta = R/y$ prin diferenţiere dă :

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{R}{y^2}dy = \frac{R\,dx}{y^2} = \frac{R\,dx}{R^2/tg^2\theta} ,$$ de unde $dx = R\,d\theta : \sin^2\theta$. (2)

Revenind la (1) găsim : $dH = \dfrac{R^2 NI\,dx}{2\,\ell\left(R^2+y^2\right)^{3/2}} = \dfrac{NI}{2\ell}\sin\theta\,d\theta .$ (3)

Integrăm : $H = \int dH = \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2}\frac{NI}{2\ell}\sin\theta d\theta = \frac{NI}{2\ell}\left(-\cos\theta\right)\Big|_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} =$

$$= \frac{NI}{2\ell}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) = \frac{NI}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) . \quad (4)$$

Pentru un solenoid foarte *lung*, pentru punctele din mijlocul solenoidului, unghiurile $\alpha_{1,2}$ sunt foarte *mici* (< 6°) deci $\cos\alpha_{1,2} \approx 1$ şi regăsim formula binecunoscută pentru solenoidul ideal. Pentru punctul situat în centrul unei baze ($\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 \to \infty$), găsim

$$H^* \cong (1/2)\,NI : \ell , \quad (5)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică *jumătate* din câmpul magnetic din mijlocul solenoidului . Mai exact , în **centrul** solenoidului :

$$H_o = NI : \sqrt{\ell^2 + D^2} \quad , \quad D = 2R \text{ - diametrul solenoidului} \qquad (6)$$

şi la **marginea** solenoidului : $H^* = (1/2)NI : \sqrt{\ell^2 + D^2}$. (7)

Pentru un ***multiplicator***, adică o bobină cu $\ell \ll D$, regăsim din (6) formula cunoscută : $H = NI / d = NI / (2R)$. (8)

* * **3.1.15.** ***O tijă subţire, omogenă şi uniformă, de masă*** m ***, este încărcată uniform cu sarcina*** q ***. Tija este pusă în rotaţie în jurul unei axe transversale trecând prin : a) mijlocul tijei , b) un capăt al tijei . Calculaţi raportul dintre momentul magnetic*** p_m ***şi momentul cinetic*** L ***faţă de axa de rotaţie .***

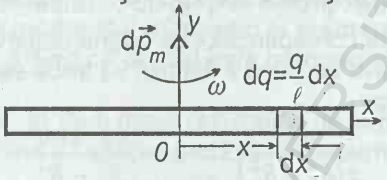


Fig.3.1.15

Rezolvare. a) Luăm un **element** de tijă dx situat la distanţa x de axa de rotaţie şi având sarcina $dq = (q / \ell)\, dx$. Acest element de sarcină se roteşte în jurul axei de rotaţie formând un curent circular de rază x . Intensitatea acestui curent este prin definiţie sarcina care trece printr-o secţiune a "conductorului" în unita-tea de timp, deci la o rotaţie trece sarcina dq şi în unitatea de timp va trece sarcina νdq , unde ν este *frecvenţa de rotaţie* , adică numărul de rotaţii în unitatea de timp :

$$di = \nu dq = [\omega / (2\pi)]\, (q / \ell)\, dx \, . \qquad (1)$$

Acest curent *circular elementar* dă un *moment magnetic* :

$$dp_m = S\, di = \pi x^2 [\omega / (2\pi)]\, (q / \ell)\, dx \, , \qquad (2)$$

orientat perpendicular pe planul "spirei" , deci după axa de rotaţie . Toate aceste momente magnetice se adună algebric, deci

$$p_m = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\omega q}{2} x^2 dx = \frac{\omega q}{2\ell} 2 \frac{\ell^3}{3 \cdot 8} = \frac{\omega q \ \ell^2}{24} \, . \qquad (3)$$

Pe de altă pate *momentul cinetic* este

$$L = J\omega = (1/12) m\ell^2 \omega, \qquad (4)$$

de unde raportul cerut : $p_m : L = q : (2m)$. (5)

b) În acest caz se schimbă limitele de integrare în (3) :

$$p_m = \int_0^{\ell} \frac{\omega q}{2\ell} x^2 dx = \frac{\omega q \ell^2}{6} \, , \qquad (6)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar *momentul cinetic* este

$$L = J\omega = (1/3)m\ell^2\omega, \qquad (7)$$

astfel încât raportul cerut este $p_m : L = q : (2m)$. (8)

Reţineţi valoarea acestui raport (5), (8).

** **3.1.16.** ***Un disc subţire din dielectric de raze*** $R_{1,2}$ ***este încărcat uniform cu sarcina*** q ***. Discul se roteşte cu turaţia*** n ***în jurul axei sale. Calculaţi : a) Inducţia magnetică în centrul discului , b) raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic faţă de axa de rotaţie, considerând discul uniform de masă*** m.

Rezolvare. a) Ţinând seama de *simetria radială*, luăm un inel ***elementar*** de rază r şi grosime *infinitezimală* dr. Sarcina acestui inel este : $dq = \{q : [\pi(R_2^2 - R_1^2)]\}\, dS$, unde $dS = 2\pi r dr$. (1)

Curentul elementar corespunzător se obţine observând că la o rotaţie completă, printr-o secţiune a inelului va trece sarcina dq, deci în unitatea de timp :

$$dI = n dq = \frac{nq}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} 2\pi r\, dr = \frac{nq \cdot 2r dr}{R_2^2 - R_1^2}. \qquad (2)$$

Curentul dI creează în centrul discului inducţia :

$$dB = \frac{\mu dI}{2\pi r} = \frac{\mu n q\, dr}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}, \qquad (3)$$

de unde prin integrare (toţi vectorii $d\vec{B}$ sunt în acelaşi sens axial) :

$$B = \int dB = \frac{\mu n q\left(R_2 - R_1\right)}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} = \frac{\mu n q}{\pi\left(R_1 + R_2\right)}. \qquad (4)$$

b) Curentul circular elementar (2) dă *momentul magnetic* :

$$dp_m = S\, dI = \pi r^2 \frac{nq \cdot 2r\, dr}{R_2^2 - R_1^2}, \qquad (5)$$

orientat după axa de rotaţie, astfel încât momentul magnetic total se obţine prin însumare :

$$p_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi n q}{R_2^2 - R_1^2} r^3\, dr = \frac{\omega q}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right) =$$

$$= (1/4)\,\omega q(R_2^2 + R_1^2). \qquad (6)$$

Pe de altă parte, *momentul cinetic* este :

$$L = J\omega = (1/2)\, m(R_1^2 + R_2^2)\omega, \qquad (7)$$

astfel încât raportul cerut este : $p_m : L = q : (2m)$. (8)

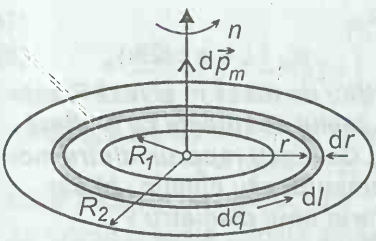


Fig.3.1.16

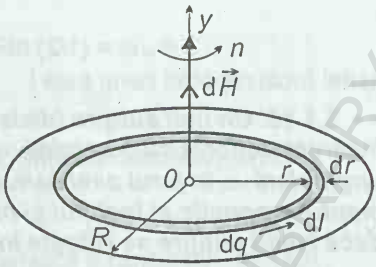


Fig.3.1.17

** **3.1.17.** ***Un disc izolant subţire de rază*** R ***este încărcat uniform cu densitatea de sarcină*** σ ***şi se roteşte în jurul axei sale cu turaţia*** n ***. Calculaţi : a) Câmpul magnetic pe axa discului, b) raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic faţă de axa de rotaţie, ştiind că discul este omogen şi uniform, de masă*** m ***.***

Rezolvare. a) Vom folosi rezultatele de la problema 3.1.10. Luăm un inel *infinit de subţire* de rază r şi grosime dr. Sarcina pe acest inel este $dq = \sigma\, dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$. (1)

Datorită rotaţiei discului inelul reprezintă un curent

$dI = dq : T = n\,dq = n\sigma\, 2\pi r dr$, ($T = 1/n$ - perioada). (2)

Acest curent circular (ca o spiră) produce un câmp magnetic :

$$dH = \frac{r^2\, dI}{2\left(r^2 + y^2\right)^{3/2}}. \tag{3}$$

Integrăm: $H = \int dH = \int_0^R \frac{r^2 n\sigma \cdot 2\pi r dr}{2\left(r^2 + y^2\right)^{3/2}} = \frac{\pi n\sigma}{2} \int_0^R \frac{r^2\, d\left(r^2\right)}{\left(r^2 + y^2\right)^{3/2}} =$

$$= \pi n\sigma \left[\sqrt{r^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^R = \pi n\sigma \left(\frac{R^2 + 2y^2}{\sqrt{R^2 + y^2}} - 2|y| \right) =$$

$$= \frac{\pi n\sigma R^4}{\sqrt{R^2 + y^2}\left[R^2 + 2y^2 + 2|y|\sqrt{R^2 + y^2}\right]}. \tag{4}$$

b) Curentul circular elementar (2) dă un moment *magnetic* :

$$dp_m = S\, dI = \pi r^2 n\sigma \cdot 2\pi r\, dr, \tag{5}$$

orientat după axa de rotaţie, astfel încât momentele se adună :

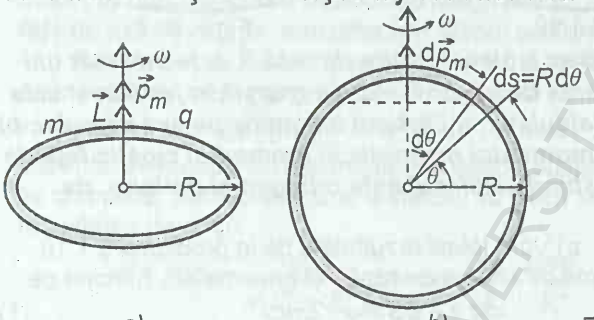
$$p_m = \pi\omega\sigma \int_0^R r^3\, dr = (1/4)\,\pi\omega\sigma R^4 = (1/4)\,\omega q R^2. \tag{6}$$

Pe de altă parte, *momentul cinetic* faţă de axa de rotaţie este :

$$L = J\omega = (1/2)\, mR^2\omega\,, \qquad (7)$$

astfel încât raportul cerut este $p_m : L = q : (2m)$. (8)

* * 3.1.18. ***Un inel subţire (dielectric) de masă*** m ***şi rază*** R ***este încărcat uniform cu o sarcină*** q ***. Inelul se roteşte cu o viteză unghiulară*** ω ***în jurul axei sale. a) Calculaţi raportul dintre momentul magnetic al inelului şi momentul său cinetic , b) dar dacă inelul subţire se roteşte în jurul unui diametru ?***



a) b) Fig.3.1.18

Rezolvare. a) Sarcina q în mişcare circulară este echivalentă cu un *curent* circular : $I = q : T = \omega q : (2\pi)$ (1)

al cărui *moment magnetic* este :

$$p_m = SI = \pi R^2 \omega q : (2\pi) = (1/2)\, \omega q R^2\,. \qquad (2)$$

Momentul cinetic : $L = J\omega = mR^2\omega\,,$ (3)

de unde rezultă raportul cerut : $p_m : L = q : (2m)$. (4)

b) Luăm un *element* de inel ca în figură: $ds = R d\theta$ cu sarcina:

$$dq = [q : (2\pi R)]\, ds = q d\theta : (2\pi)\,. \qquad (5)$$

Acest element de sarcină descrie un cerc de rază $R\cos\theta$ şi reprezintă un curent circular *elementar* a cărui intensitate este - prin definiţie - sarcina care trece printr-o secţiune a "conductorului" în unitatea de timp. La o rotaţie trece sarcina dq, deci în unitatea de timp trece sarcina νdq , unde ν ete *frecvenţa de rotaţie* (numărul de rotaţii pe unitatea de timp), deci

$$dI = \nu dq = [\omega / (2\pi)]\, q d\theta : (2\pi)\,. \qquad (6)$$

Acest curent circular elementar are *momentul magnetic* :

$$dp_m = S\, dI = \pi R^2 \cos^2\theta\, [\omega q : (4\pi^2)]\, d\theta \qquad (7)$$

orientat după axa de rotaţie, deci toate momentele se adună :

$$p_m = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\omega q}{4\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{R^2\omega q}{8\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta =$$

BCU SIBIU UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{R^2\omega q}{8\pi}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}R^2\omega q\,. \qquad (8)$$

Pe de altă parte, *momentul cinetic* (faţă de diametru) este :

$$L = J\omega = (1/2)\,mR^2\omega\,, \qquad (9)$$

astfel încât raportul cerut este : $p_m : L = q : (2m)$. (10)

Aţi reţinut această valoare *caracteristică* a raportului (4), (10) .

*** * 3.1.19.** ***O sferă omogenă din dielectric de masă*** m ***şi de rază*** R ***este încărcată uniform cu sarcină superficială de densitate*** σ ***şi pusă în rotaţie cu viteza unghiulară*** ω ***în jurul unui diametru. Calculaţi : a) Câmpul magnetic în centrul sferei , b) Raportul dintre momentul magnetic şi cel cinetic .***

Rezolvare. a) Alegem *elementul de arie* dS sub forma *zonei* (segmentului de sferă) din figură : $dS = 2\pi R\,dy$. (1)

Sarcina de pe această arie: $dq = \sigma\,dS = 2\pi\sigma R\,dy$, (2)

iar curentul generat prin rotaţie :

$$di = dq : T = [\omega : (2\pi)]\,dq = \sigma\omega R\,dy\,. \qquad (3)$$

Acest curent circular elementar produce un câmp magnetic în centrul sferei de-a lungul axei, conform problemei 3.1.10 :

$$dH = \frac{di\left(R^2-y^2\right)}{2\left(y^2+R^2-y^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma\omega R\left(R^2-y^2\right)dy}{2R^3}\,. \qquad (4)$$

Câmpul rezultant : $H = \int dH =$

$$= \int_{-R}^{R}\frac{\sigma\omega}{2R^2}\left(R^2-y^2\right)dy = \frac{\sigma\omega}{R^2}\int_0^R\left(R^2-y^2\right)dy = \frac{2}{3}\sigma\omega R\,. \qquad (5)$$

b) Curentul *elementar* di (3) dă un *moment magnetic* :

$$dp_m = di\cdot S = \sigma\omega R\,dy\cdot\pi(R^2-y^2)\,, \qquad (6)$$

de unde prin integrare : $p_m = \int dp_m = \pi\sigma\omega R\int_{-R}^{R}\left(R^2-y^2\right)dy =$

$$= 2\pi\frac{q}{4\pi R^2}\omega R\int_0^R\left(R^2-y^2\right)dy = \frac{1}{3}qR^2\omega\,. \qquad (7)$$

Momentul cinetic fiind : $L = J\omega = (2/5)\,mR^2\omega$, (8)

rezultă raportul cerut : $p_m : L = q : (6m/5)$. (9)

Dacă sfera este "goală", momentul cinetic va fi :

$$L = J\omega = (2/3)\,mR^2\omega \qquad (10)$$

şi raportul cerut va fi : $p_m : L = q : (2m)$. (11)

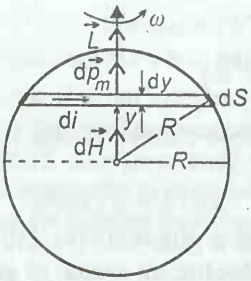


Fig.3.1.19

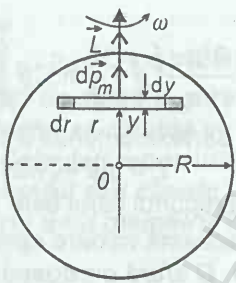


Fig.3.1.20

** **3.1.20.** ***O sferă omogenă de masă*** m ***şi rază*** R ***este încărcată cu sarcina*** q ***distribuită uniform pe volumul său. Sfera este rotită cu viteza unghiulară*** ω ***în jurul unui diametru. Calculaţi raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic propriu.***

Rezolvare. Să luăm un inel ***elementar*** (*infinitezimal*) de rază r, grosime dr şi înălţime dy, ca în figură. Volumul acestui inel este $dV = 2\pi r\, dy\, dr$ şi sarcina electrică $dq = \rho dV = 2\pi\rho\, dy\, rdr$. Această sarcină, datorită rotaţiei, generează un curent :

$$di = dq : T = [\omega : (2\pi)]\, 2\pi\rho\, dy\, rdr = \omega\rho\, dy\, rdr . \qquad (1)$$

Acest curent circular elementar are *momentul magnetic* orientat după axa de rotaţie : $dp_m = S\,di = \pi r^2 \omega\rho\, dy\, rdr$. (2)

Vom însuma (integra) momentele magnetice ale acestor curenţi elementari **în două etape** : Întâi sumăm contribuţiile curenţilor elementari *concentrici* cu razele variind de la zero la $\sqrt{R^2 - y^2}$, care vor da momentul magnetic al discului respectiv :

$$\int_{(r)} dp_m = \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \pi\omega\rho\, dy\, r^3\, dr = \pi\omega\rho\, dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} r^3\, dr =$$

$$= (1/4)\,\pi\omega\rho(R^2 - y^2)^2\, dy . \qquad (3)$$

Acest rezultat coincide cu cel de la problema 3.1.16, unde facem $R_1 = 0$ şi $R_2 = \sqrt{R^2 - y^2}$.

Acum însumăm (integrăm) contribuţiile tuturor discurilor cu y variind de la $-R$ la $+R$ (deci momentul magnetic total se obţine printr-o *dublă* sumă sau ***dublă integrală***) :

$$p_m = \int dp_m = \frac{1}{4}\pi\omega\rho \int_{-R}^{R} \left(R^2 - y^2\right)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\omega\rho \int_0^R \left(R^2 - y^2\right)^2 dy = \frac{4}{15}\pi\omega\rho R^5 = \frac{1}{5} q\omega R^2 . \qquad (4)$$

Pe de altă parte *momentul cinetic* este : $L = J\omega = (2/5)mR^2\omega$, (5)
de unde rezultă raportul cerut : $p_m : L = q : (2m)$. (6)
Am regăsit şi în această problemă acest raport caracteristic .

** **3.1.21.** ***O pătură cilindrică omogenă (dielectrică) de masă*** m ***şi raze*** $R_{1,2}$ ***este încărcată uniform în volum cu sarcina*** q ***. Cilindrul se roteşte cu viteza unghiulară*** ω ***în jurul axei sale . Calculaţi raportul dintre momentul magnetic şi momentul cinetic .***

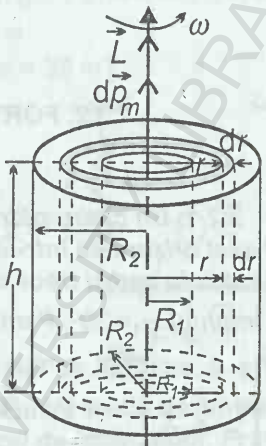


Fig.3.1.21

Rezolvare. Vom împărţi cilindrul în pături cilindrice ***elementare*** (*infinitezimale*) circulare concentrice, de rază *r* şi grosime d*r* . Volumul unei astfel de pături elementare este d*V* = = *S* d*r* = $2\pi rh$ d*r* şi sarcina :

$$dq = \frac{q}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h}\,dV = \frac{2qr\,dr}{R_2^2 - R_1^2}\,. \quad (1)$$

Curentul generat de această sarcină în mişcare circulară :

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,dq = \frac{\omega qr\,dr}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

(2) şi *momentul magnetic* corespunzător :

$$dp_m = S\,dI = \pi r^2\,dI = [\omega q : (R_2^2 - R_1^2)]\,r^3\,dr\,. \quad (3)$$

Toate momentele magnetice elementare sunt orientate după axa cilindrului (axa de rotaţie) şi se adună *algebric*, de aceea prin integrare obţinem momentul magnetic total :

$$p_m = \int dp_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\omega qr^3\,dr}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\omega q}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{1}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right) =$$

$$= (1/4)\,\omega\,q\,(R_1^2 + R_2^2)\,. \quad (4)$$

Dar momentul cinetic este $L = J\omega = (1/2)m(R_1^2 + R_2^2)\omega$, (5)
de unde rezultă raportul cerut : $p_m : L = q : (2m)$, (6)
valoare pe care deja o cunoaştem de la alte probleme asemănătoare.

* *

3.2. FORŢA ELECTROMAGNETICĂ

3.2.1. ***Un cadru pătratic de latură*** ℓ ***se poate roti liber în jurul axei orizontale într-un câmp magnetic vertical de inducţie*** B ***. Dacă prin cadru trece un curent*** $I_1 = 1{,}00$ A ***, cadrul deviază cu unghiul*** $\alpha_1 = 30^o$ ***. Pentru ce curent*** I_2 ***unghiul devine*** $\alpha_2 = 60^o$?

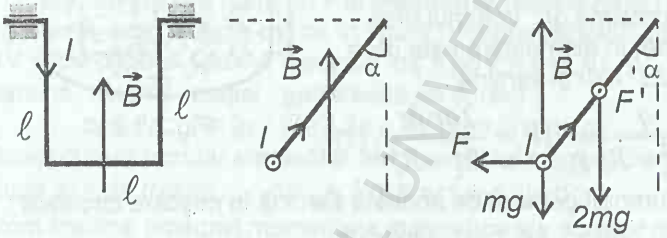


Fig.3.2.1

Rezolvare. Forţa care deviază cadrul este forţa *electromagnetică* orizontală $I\vec{\ell} \times \vec{B}$ care acţionează asupra laturii orizontale . Pe celelalte două laturi oblice acţionează forţe egale în modul şi de sens opus care nu produc rotaţie . Scriem condiţia de echilibru cu ajutorul *momentelor*, faţă de axa de rotaţie :

$$mg\ell\sin\alpha + 2mg(\ell/2)\sin\alpha - F\,\ell\cos\alpha = 0\ ,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = F : (2mg) = I\ell B : (2mg)\ . \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 : \mathrm{tg}\alpha_1 = I_2 : I_1\ , I_2 = I_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha_2 : \mathrm{tg}\alpha_1 = 3{,}00\ \text{A}\ . \qquad (2)$$

3.2.2. ***Un cadru pătratic străbătut de un curent*** $I = 5{,}0$ A ***se poate roti liber în jurul laturii sale orizontale superioare . Aplicând un câmp magnetic vertical, cadrul deviază cu unghiul*** $\alpha = 30^o$ ***. Aflaţi inducţia magnetică, ştiind densitatea sârmei*** $\delta = 8600$ kg/m^3 ***şi secţiunea*** S = 2,0 mm^2 ***a conductorului .***

Rezolvare. Forţa electromagnetică asupra laturii orizontale inferioare deviază cadrul. Asupra laturilor oblice acţionează forţe electromagnetice egale în modul şi de sens opus care nu produc rotirea cadrului .

Scriem condiţia de echilibru cu ajutorul *momentelor* faţă de axa de rotaţie :

$I\ell B\,\ell\cos\alpha - (1/4)\,mg\ell\sin\alpha - (1/2)\,mg(\ell/2)\sin\alpha = 0$,(1) dar $m = \delta S 4\ell$, $B = [(mg/2) : (I\ell)]\,\mathrm{tg}\alpha =$

$$= (2\delta Sg : I)\,\mathrm{tg}\alpha = 39\ \mathrm{mT}\,. \qquad (2)$$

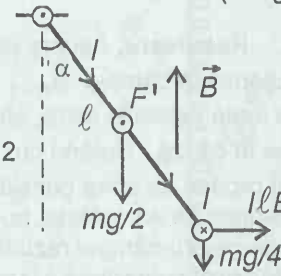


Fig.3.2.2

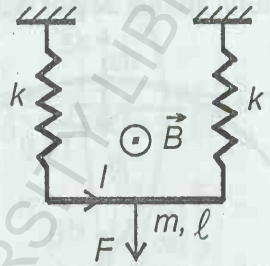


Fig.3.2.4

3.2.3. ***O tijă conductoare orizontală de lungime*** b ***şi masă*** m ***este suspendată prin două fire paralele egale de lungime*** ℓ ***şi se află într-un câmp magnetic vertical de inducţie*** B ***. Prin tijă se trece un curent*** I ***de durată foarte scurtă*** τ ***. Aflaţi un-ghiul de deviaţie maximă a firelor.***

Rezolvare. În timpul foarte scurt τ deplasarea tijei este foarte mică şi forţa electromagnetică este practic constantă şi imprimă un *impuls* tijei. Conform *teoremei variaţiei* ***impulsului*** :

$$F\cdot\tau = mv\,, \quad \text{dar} \quad F = IbB\,. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, pentru deviaţia *maximă* teorema *conservării* ***energiei*** dă : $(1/2)mv^2 = mg(\ell - \ell\cos\alpha) = 2mg\ell\sin^2(\alpha/2)$,

$$v = 2\sqrt{g\ell}\cdot\sin(\alpha/2)\,, \qquad F\cdot\tau = IbB\,\tau = mv = \qquad (2)$$

$$= 2m\sqrt{g\ell}\cdot\sin(\alpha/2)\,, \qquad \sin(\alpha/2) = IbB\,\tau : (2m\sqrt{g\ell})\,, \qquad (3)$$

de unde rezultă α cerut.

3.2.4. ***O tijă orizontală de lungime*** ℓ ***şi masă*** m ***este suspendată prin două resorturi , fiecare de constantă elastică*** k ***, şi aşezată într-un câmp magnetic*** B ***transversal orizontal . Cu ce distanţă maximă se deplasează tija dacă prin ea trece un curent*** I ***într-un timp foarte scurt*** τ ***?***

Rezolvare. Asupra tijei va acţiona o forţă electromagnetică verticală, care va imprima tijei un *impuls* :

$$F\cdot\tau = mv\,, \qquad F = I\ell B\,. \qquad (1)$$

Pentru deplasarea *maximă conservarea* ***energiei*** dă :

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(1/2)mv^2 = (1/2)(2k)A^2\,, \qquad (2)$$

$$A = \sqrt{\frac{m}{2k}}\cdot v = \sqrt{\frac{m}{2k}}\cdot\frac{F\tau}{m} = \frac{l\ell B\tau}{\sqrt{2km}}\,. \qquad (3)$$

(*) 3.2.5. ***Un solenoid ideal cu aer are lungimea*** ℓ = 31,4 cm, ***număr de spire*** N = 1000 ***şi raza spirei*** R = 2,0 cm . ***Forţa de rupere a sârmei este*** F_r = 10,0 N . ***Aflaţi la ce intensitate a curentului spirele se pot rupe .***

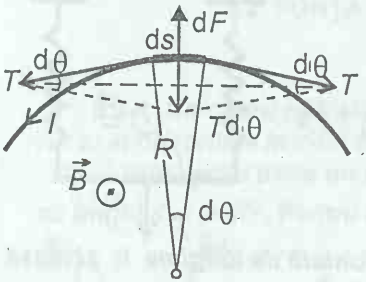


Fig.3.2.5

Rezolvare. Asupra unei spire acţionează câmpul $\vec{B}_{N-1}$ produs de toate celelalte spire, afară de cea în cauză . Notând cu $\vec{B}_1$ câmpul produs de spira considerată în imediata sa vecinătate, putem scrie pentru câmpul rezultant în **interiorul** solenoidului (sau spirei)

$$B = B_1 + B_{N-1} = \mu NI : \ell \qquad (1)$$

şi pentru câmpul imediat în **exteriorul** spirei :

$$B_{N-1} - B_1 \cong 0\,, \qquad (2)$$

de unde rezultă :

$$B_{N-1} = B/2 = \mu NI : (2\ell)\,. \qquad (3)$$

Să luăm acum un ***element*** ds din lungimea spirei . Conform figurii asupra sa acţionează o forţă electromagnetică d*F* radială *centrifugă* :

$$dF = IB_{N-1}ds = I(B/2)\,ds\,, \qquad (4)$$

care este echilibrată de rezultanta celor două tensiuni din sârmă de la capetele elementului d*s* şi care dau rezultantă centripetă :

$$2T\sin(d\theta/2) = 2T(d\theta/2) = T\,d\theta\,, \qquad (5)$$

unde $(\sin x) : x \to 1$ când $x \to 0$.

Prin urmare $(ds = R\,d\theta)$: $I(B/2)\,ds = (1/2)IBR\,d\theta = T\,d\theta$,

$$T = (1/2)IBR = \mu NI^2R : (2\ell)^2\,. \qquad (6)$$

Condiţia de rupere $T > F_r$ dă : $I > \sqrt{2F_r\ell : (\mu NR)} = 500$ A . (7)

(Practic nu se ajunge la un curent aşa de mare, fiindcă sârma se topeşte la un curent mai mic .)

Problema se poate rezolva,de fapt, şi fără a folosi diferenţiale : repetăm exact raţionamentul de mai sus luând *elemente* foarte *mici* (care descresc către *zero*) : Δs , $\Delta\theta$ etc.

(*) 3.2.6. *Un resort fin de constantă* k = 20 N/m *este fixat la capete în stare nedeformată de lungime* ℓ_0 = 20 cm, *ca în figură, unde inducţia câmpului magnetic* B = 0,80 T . *Trecând curentul* I *resortul ia forma unui arc de cerc de rază* R = 30 cm . *Aflaţi* I .

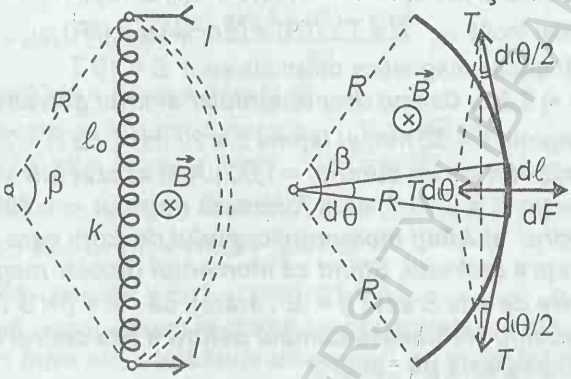


Fig.3.2.6

Rezolvare. Luăm un element dℓ din resort . Asupra sa acţionează o forţă *elementară* $dF = IBd\ell = IBRd\theta$ (1) orientată radial centrifug, care este echilibrată de rezultanta celor două tensiuni elastice care acţionează la capetele elementului de resort ales dℓ; rezultanta celor două tensiuni este centripetă :

$2T\sin(d\theta/2) = Td\theta$, deoarece $[\sin(d\theta/2)] : [d\theta/2] = 1$; (2)

$dF = IBRd\theta = Td\theta$, $T = IBR = k(\ell - \ell_0) = k(\beta R - \ell_0)$, (3)

dar $\sin(\beta/2) = \ell_0/(2R)$, $\beta = 2\,\text{arc}\sin[\ell_0/(2R)]$, (4)

astfel încât : $I = (k/B)\{2\,\text{arc}\sin[\ell_0/(2R)] - \ell_0/R\} = 0{,}32$ A . (5)

Problema se poate rezolva şi fără a folosi diferenţiale . Facem exact raţionamentul de mai sus luând elemente foarte *mici* (care descresc către *zero*) : $\Delta\ell$, $\Delta\theta$ etc .

(*) 3.2.7. ***O bobină cu spire de rază*** R, ***confecţionate din sârmă de cupru de diametru*** d , ***parcursă de un curent*** I , ***este aşezată co-axial într-un câmp magnetic. La ce inducţie magnetică spirele se rup, dacă tensiunea de rupere a cuprului*** $\sigma_r = 280$ MN/m^2 ***?***

Rezolvare. Considerăm un element ds de spiră, care subîntinde un unghi la centru dθ (v. fig.3.2.5). El este supus la forţa electromagnetică $dF = IdsB$ şi la cele două tensiuni *T* de la capetele elementului. Rezultanta acestor două tensiuni este *centripetă* :

$2T\sin(d\theta/2) = 2T(d\theta/2) = Td\theta$, ([sindx] : $dx = 1$) (1)

şi echilibrează forţa dF care este *centrifugă* :

$$dF = IdsB = Td\theta\,, \qquad T = IB\,ds : d\theta = IBR\,. \tag{2}$$

Pe de altă parte, $T = \sigma_r S = \sigma_r(\pi d^2/4)$, (3)

astfel încât $B = T : (IR) = (\pi d^2/4)\,\sigma_r : (IR)$. (4)

Câmpurile magnetice obişnuite sunt $B < 10$ T .

(* *) 3.2.8. ***Cadrul dreptunghiular al unui galvanometru, de lungime*** $\ell = 30$ mm ***şi lăţime*** b = 20 mm , ***cu*** N = 200 ***spire, este străbătut de un curent*** I = 1,00 μA ***şi aşezat într-un câmp de inducţie*** B = 0,10 T, ***care formează unghiul*** $\alpha = 30°$ ***cu normala la cadru. a) Aflaţi momentul cuplului de forţe care acţionează asupra cadrului. Ştiind că momentul dipolar magnetic al unei spire de arie*** S ***este*** $\vec{p} = I\vec{S}$, ***arătaţi că*** $\vec{M} = \vec{p}\times\vec{B}$. ***b) Ce lucru mecanic efectuează câmpul pentru a roti cadrul în poziţie transversală pe câmp ?***

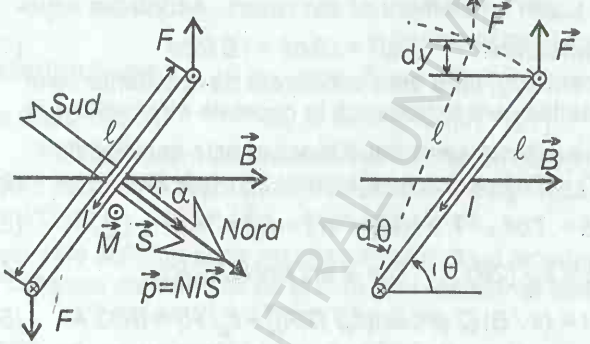


Fig.3.2.8

Rezolvare. a) **Momentul dipolar** al unui cadru : $\vec{p} = NI\vec{S}$ (1)

şi **momentul cuplului** de forţe exercitat asupra dipolului :

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{B}\,. \tag{2}$$

În cazul nostru : $M = |\vec{p}\times\vec{B}| = NIS\cdot B\sin\alpha = 6{,}0$ nN · m . (3)

Se poate judeca şi direct :

$$M = F\cdot\ell\sin\alpha = NIbB\cdot\ell\sin\alpha = NIS\cdot B\sin\alpha\,. \tag{4}$$

b) Ştiind că **energia** *potenţială* a unui *dipol* **magnetic** aflat în câmp magnetic este $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{B} = -pB\cos\alpha$, (5)

putem calcula imediat lucrul mecanic cerut ca fiind efectuat pe seama scăderii energiei potenţiale :

$$L = -\Delta E_p = -[-pB + pB\cos\alpha] = pB(1-\cos\alpha)\,. \tag{6}$$

Putem judeca şi direct, conform figurii : lucrul mecanic *elementar* efectuat de forţele câmpului la o rotire *elementară* a cadrului cu unghiul $d\theta$ este : $dL = F\,dy =$

$$= F[\ell\sin(\theta + d\theta) - \ell\sin\theta] = F\ell\,\frac{\sin(\theta+d\theta)-\sin\theta}{d\theta}\,d\theta =$$

$$= F\ell\,(\sin\theta)'\,d\theta = F\ell\cos\theta\,d\theta = M\,d\theta\,. \qquad (7)$$

De altfel acesta este un rezultat cunoscut : $dL = \vec{M}\vec{\omega}\,dt =$

$$= M\omega\cos(\vec{M},\vec{\omega})dt = M\cos(\vec{M},\vec{\omega})d\theta\,, \quad (d\theta = \omega\,dt)\,. \qquad (8)$$

În cazul nostru : $dL = M\,d(-\alpha)$,

$$L = \int_{\alpha}^{0} NISB\sin\theta\,d(-\theta) = NISB\int_{0}^{\alpha}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= NISB(1-\cos\alpha) = pB\,(1-\cos\alpha) = 1{,}6\ \text{nJ}\,. \qquad (9)$$

** 3.2.9. ***Două conductoare rectilinii lungi paralele, cu distanţa*** r = 4,0 cm ***între ele, străbătute de curenţi, se atrag între ele cu o forţă pe unitatea de lungime*** F* = 1,00 mN/m . ***Ce lucru mecanic trebuie efectuat pe unitatea de lungime pentru a dubla distanţa dintre conductoare ?***

Rezolvare. Forţa pe unitatea de lungime este $F^* = \mu I_1 I_2 : (2\pi r)$,

$$L^* = \int F^*\,dr = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r}\,dr = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} = F^* r\ln 2 = 27{,}7\ \mu\text{J/m}\,.$$

** 3.2.10. ***Discul din figură de rază*** R = 50 mm , ***aşezat perpendicular pe câmpul magnetic de inducţie*** B = 20 mT , ***este traversat radial, prin contacte glisante, de un curent*** I = 4,0 A . ***Aflaţi : a) puterea acestui motor ştiind turaţia*** n = 5,0 rot/s , ***b) momentul cuplului de forţe care acţionează asupra discului .***

Rezolvare. a) Luăm un **element** de curent radial dx la distanţa *x* de ax . Forţa elementară care acţionează asupra acestui segment de curent : $dF = IB\,dx$, (1) puterea dezvoltată de această forţă : $dP = dF\cdot v =$

$$= IB\,dx\cdot 2\pi n x\,. \qquad (2)$$

Integrăm :

$$P = \int dP = \int_0^R IB\cdot 2\pi n x\,dx =$$

$$= \pi n R^2 IB = 3{,}14\ \text{mW}\,. \qquad (3)$$

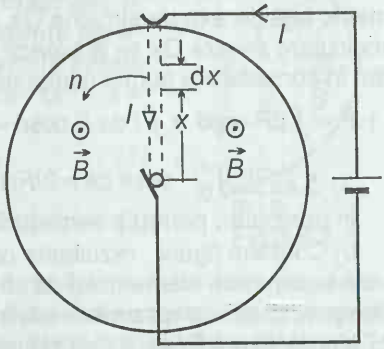


Fig.3.2.10

b) *Momentul elementar* al forţei elementare dF :

$$dM = dF \cdot x = I\,B dx \cdot x\,, \tag{4}$$

integrăm : $M = \int dM = IB\int_0^R x\,dx = \frac{1}{2}\,IBR^2 = 0{,}10\ \text{mN}\cdot\text{m}$. (5)

Rezultatul se poate obţine imediat din relaţia cunoscută $P = M\omega$:

$$M = P : \omega = \pi n R^2 I B : (2\pi n) = (1/2) R^2 I B\,. \tag{6}$$

*** * 3.2.11.** ***O spiră circulară parursă de curent electric, este introdusă parţial într-o regiune cu câmp magnetic, ca în figură. a) Calculaţi forţa electromagnetică exercitată asupra spirei . b) Care va fi tensiunea elastică din conductorul spirei , dacă spira este introdusă complet în câmp ?***

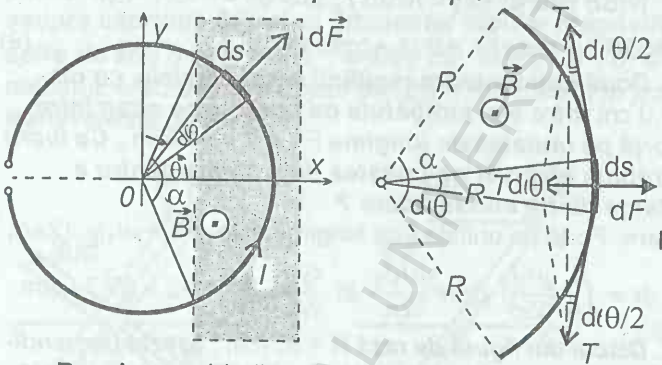


Fig.3.2.11

Rezolvare. a) Luăm un ***element*** de spiră $ds = R d\theta$. Asupra sa acţionează forţa *elementară* :

$$d\vec{F} = I\,d\vec{r} \times \vec{B}\,, \qquad |d\vec{r}| = ds\,, \tag{1}$$

care este orientată radial. Pentru fiecare element ds dat există unul simetric faţă de axa de simetrie Ox, astfel încât componentele perpendiculare pe axa Ox se anulează reciproc . Rămâne astfel să luăm în considerare numai componentele pe axa Ox :

$$F = \int dF\cos\theta = \int I\,ds\,B\cos\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} IRB\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 2IRB\int_0^{\alpha/2}\cos\theta\,d\theta = 2IRB\sin(\alpha/2)\,. \tag{2}$$

În particular, pentru o semispiră ($\alpha = \pi$) : $F = 2IRB$. (3)

b) Conform figurii , rezultanta celor două tensiuni , care acţionează la capetele elementului ds , trebuie să echilibreze forţa electromagnetică dF asupra elementului de curent :

$$2T\sin(d\theta/2) = 2T(d\theta/2) = T\,d\theta\,, \quad (\sin x \to x \text{ când } x \to 0), \tag{4}$$

$$T\,d\theta = dF = I ds B = I R d\theta\, B\,, \text{ de unde } T = IRB\,. \tag{5}$$

3.3. FORŢA LORENTZ

3.3.1. ***O particulă încărcată, cu sarcina specifică*** q / m , ***intră într-un câmp magnetic*** B ***sub un unghi faţă de*** $\vec{B}$. ***În cât timp particula descrie o spiră a elicoidei ?***

Rezolvare. Asupra particulei acţionează **forţa Lorentz** *magnetică* :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \ , \qquad F = qvB\sin\alpha \ . \tag{1}$$

Dacă descompunem viteza $\vec{v}$ într-o componentă paralelă cu $\vec{B}$ şi una perpendiculară , atunci componenta paralelă cu $\vec{B}$ nu dă nici o forţă, deci în direcţia paralelă cu câmpul particula se va mişca *uniform* cu viteza $v\cos\alpha$. Pe direcţia transversală particula va avea o mişcare *circulară uniformă* cu viteza $v\sin\alpha$. *Lex secunda* dă pentru această mişcare circulară :

$$qvB\sin\alpha = ma_c = mv^2\sin^2\alpha : R \ , \quad R = mv\sin\alpha : (qB) \ . \tag{2}$$

Mişcarea rezultantă este o mişcare ***elicoidală*** *uniformă*, traiectoria fiind analogă cu *filetul* (ghiventul) unui şurub. Timpul unei rotaţii:

$$T = 2\pi R : (v\sin\alpha) = 2\pi m : (qB) = 2\pi : (Bq / m) \tag{3}$$

nu depinde nici de viteza particulei, nici de unghiul vitezei cu liniile de câmp (cu $\vec{B}$) .

3.3.2. ***O particulă, cu sarcina specifică*** q / m, ***intră la momentul*** t = 0 ***cu viteza*** v ***perpendicular pe un câmp magnetic*** B. ***Aflaţi pentru momentul*** t **distanţa** ***particulei până la punctul de intrare în câmp.***

Rezolvare. Distanţa cerută $OP = s =$
$= 2R\sin(\alpha/2)$, dar

$$vt = \alpha R \ , \quad R = mv : (qB), \tag{1}$$

$$s = 2R\sin[vt : (2R)] =$$
$$= [2mv : (qB)]\sin[qBt : (2m)] \ . \tag{2}$$

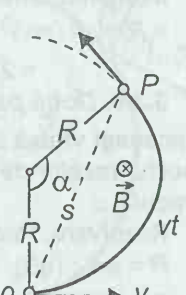


Fig.3.3.2

3.3.3. ***Un electron , accelerat în prealabil de o diferenţă de potenţial*** U = 300 V ***, se mişcă paralel cu un conductor rectiliniu lung străbătut de un curent*** I = 5,0 A, ***la distanţa*** r = 4,0 mm. ***Ce forţă acţionează asupra electronului ?***

Rezolvare. Asupra electronului acţionează *forţa* ***Lorentz*** (*magnetică*) din partea câmpului magnetic creat de conductor :

$$F = |q\vec{v} \times \vec{B}| = evB = e\sqrt{\frac{2eU}{m}}\,\frac{\mu I}{2\pi r} = 0{,}42 \text{ fN} .$$

Forţa este perpendiculară pe conductor, spre conductor dacă electronul se mişcă în sens invers curentului (când reprezintă un curent echivalent de acelaşi sens cu cel dat).

3.3.4. ***Calculaţi energia cinetică a unui proton care se mişcă într-un câmp de inducţie*** B =167 mT ***pe un cerc de rază*** R = = 50 cm.

Rezolvare. Asupra electronului acţionează *forţa* ***Lorentz*** , deci *lex secunda* dă : $|q\vec{v} \times \vec{B}| = evB = ma_c = mv^2 : R \rightarrow$ (1)

$$v = (R/m)eB\ ,\ E_c = (1/2)mv^2 = (eBR)^2 : (2m) =$$

$$= 53{,}4 \text{ fJ} = 0{,}334 \text{ MeV} . \quad (2)$$

3.3.5. ***O particulă de masă*** m ***, accelerată de o diferenţă de potenţial*** U = 1,00 kV ***, intră perpendicular într-un câmp de inducţie*** B = 91 mT ***. Aflaţi*** momentul cinetic ***al particulei faţă de centrul de curbură al traiectoriei .***

Rezolvare. Asupra particulei acţionează *forţa* ***Lorentz*** *magnetică* . *Lex secunda* dă : $F = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |q|vB = ma_c = mv^2 : R \rightarrow$

$$R = mv : (|q|B) . \quad (1)$$

Viteza particulei se obţine din *bilanţul energetic* (*teorema energiei cinetice*) : $(1/2)mv^2 = |q|U \rightarrow v = \sqrt{2|q|U/m}$. (2)

Momentul cinetic (orbital) este $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| =$

$$= Rmv = (mv)^2 : (|q|B) = 2mqU : (qB) =$$

$$= 2mU : B = 2{,}0 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{s} . \quad (3)$$

3.3.6. ***Două particule cu masele*** $m_{1,2}$ ***şi sarcinile*** $q_{1,2}$ ***intră cu*** aceeaşi viteză ***perpendicular pe un câmp magnetic . Aflaţi raportul razelor de curbură ale traiectoriilor. Aplicaţie la proton şi particula*** α.

Rezolvare. Particulele descriu cercuri cu razele :

$$R = mv : (qB) \rightarrow R_1 : R_2 = (m_1 : m_2)(q_2 : q_1) . \quad (1)$$

Pentru proton şi particula α avem : $m_\alpha \approx 4m_p$, $q_p = e$, $q_\alpha = 2e$, deci $R_p : R_\alpha = 1/2$.

3.3.7. ***Două particule de mase*** $m_{1,2}$ ***şi sarcini*** $q_{1,2}$ ***, accelerate în prealabil de*** aceeaşi ***diferenţă de potenţial, intră perpendicular într-un câmp magnetic . Aflaţi raportul razelor de curbură ale traiectoriilor. Aplicaţie la proton şi particula*** α .

Rezolvare. Particulele descriu cercuri cu razele:

$R = mv : (qB)$, dar $v = \sqrt{2qU/m}$ (din $mv^2/2 = qU$), (1)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{q_2}{q_1}\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{q_2}{q_1}\cdot\sqrt{\frac{q_1}{q_2}\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{q_2}{q_1}}\,. \quad (2)$$

În cazul protonului şi particulei α :

$$\frac{R_1}{R_2} \cong \sqrt{\frac{m_p}{4m_p}\cdot\frac{2e}{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \quad (3)$$

Particulele se separă mai puţin decât în cazul problemei precedente 3.3.6.

3.3.8. ***Două particule cu masele*** $m_{1,2}$ ***şi sarcinile*** $q_{1,2}$ ***intră perpendicular într-un câmp magnetic : a) cu viteze egale , b) accelerate în prealabil cu*** aceeaşi ***diferenţă de potenţial. Aflaţi raportul perioadelor de rotaţie. Aplicaţie : proton şi particula*** α .

Rezolvare. Particulele descriu *cercuri. Lex secunda* se scrie :

$$F = |q\vec{v}\times\vec{B}| = qvB = ma_c = mv^2 : R \rightarrow R = mv : (qB)\,. \quad (1)$$

Timpul unei rotaţii complete (*perioada*) :

$$T = 2\pi R : v = 2\pi m : (qB) \quad (2)$$

este independentă de viteza particulei.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{q_2}{q_1} \cong \frac{m_p}{4m_p}\frac{2e}{e} = \frac{1}{2}\,. \quad (3)$$

(* *) **3.3.9.** ***Un inel uniform încărcat cu sarcina*** q = 1,0 μC ***se rostogoleşte fără lunecare cu viteza*** v = 1,0 m/s ***pe un plan orizontal izolant . Perpendicular pe planul inelului actionează un câmp magnetic de inducţie*** B = 10 mT. ***Aflaţi forţa*** Lorentz ***magnetică asupra inelului .***

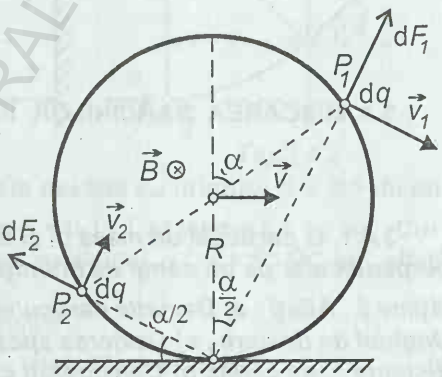


Fig.3.3.9

Rezolvare. Luăm două sarcini *elementare identice* dq situate *diametral opus*, conform figurii. Vitezele lor sunt

$$v_1 = \omega\cdot CP_1 = (v/R)\cdot 2R\cos(\alpha/2) = 2v\cos(\alpha/2)\,, \quad (1)$$

$$v_2 = \omega\cdot CP_2 = (v/R)\cdot 2R\sin(\alpha/2) = 2v\sin(\alpha/2)\,.$$

Forţa ***Lorentz*** (perpendiculară pe $\vec{v}$ şi pe $\vec{B}$) asupra acestor sarcini : $dF_1 = dq \cdot B \cdot 2v\cos(\alpha/2)$, $dF_2 = dq \cdot B \cdot 2v\sin(\alpha/2)$. (2)

Calculăm proiecţiile rezultantei acestor două forţe $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2$:

$dF_x = dF_{1x} + dF_{2x} = dF_1\sin(\alpha/2) - dF_2\cos(\alpha/2) =$

$= dq\,B\,2v\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2) - dq\,B\,2v\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = 0$, (3)

$dF_y = dF_{1y} + dF_{2y} = dF_1\cos(\alpha/2) + dF_2\sin(\alpha/2) =$

$= dq\,B\,2v\cos^2(\alpha/2) + dq\,B\,2v\sin^2(\alpha/2) = dq \cdot 2vB$.

Acum vom suma perechile de forţe (sau perechile de sarcini) :

$$F_x = 0\ ,\ F_y = \frac{1}{2}\int 2vB\,dq = vB\int dq = qvB = 10\ \text{nN} \qquad (4)$$

(coeficientul 1/2 provine din faptul că prin sumare după dq fiecare *pereche* este luată de *două* ori !).

Problema se poate rezolva şi fără calculul integral. Facem acelaşi raţionament ca mai sus, luând elemente de sarcină foarte *mici* (care descresc către *zero*) Δq . În final apare suma acestor elemente care dă sarcina totală q .

* *

3.4. MIŞCAREA SARCINILOR ÎN CÂMP MAGNETIC

3.4.1. ***O particulă de masă*** m ***şi sarcină*** q ***intră cu viteza*** v ***perpendicular pe un câmp de inducţie*** B ***ocupând o bandă de lăţime*** ℓ ***. Aflaţi : a) Deviaţia particulei la ieşirea din câmp, b) Unghiul de deviere , c) Devierea spotului pe un ecran situat la distanţa*** L ***de câmp, d) Consideraţi cazul deviaţiilor*** mici.

Rezolvare. Particula descrie în câmpul magnetic un arc *de cerc* cu raza $R = mv : (qB)$ (1)

şi cu centrul C într-un punct pe marginea de intrare în câmp .

Din triunghiul ABC avem (*teorema lui* ***Pitagora***) :

$$R - y = \sqrt{R^2 - \ell^2} \ \rightarrow\ y = R - \sqrt{R^2 - \ell^2}\ . \qquad (2)$$

b) Unghiul de deviere : $\operatorname{tg}\alpha = \ell : (R - y) =$

$= \ell : \sqrt{R^2 - \ell^2}$ sau $\sin\alpha = \ell : R$. (3)

c) Deviaţia pe ecran se compune din y şi y' :

$y + y' = R - \sqrt{R^2 - \ell^2} + L \operatorname{tg}\alpha = R - \sqrt{R^2 - \ell^2} + L\ell : \sqrt{R^2 - \ell^2}$. (4)

d) Deviaţii *mici* înseamnă :

$y \ll \ell$, $y \ll R$, $\ell \ll R$, α sub 6° . (5)

În acest caz putem face următoarele aproximaţii :

$\sqrt{R^2 - \ell^2} = R\sqrt{1 - \ell^2/R^2} = R(1 - \ell^2/R^2)^{1/2} \approx R[1 - \ell^2/(2R^2)]$,

$1 : \sqrt{R^2 - \ell^2} = (1/R)(1 - \ell^2/R^2)^{-1/2} \approx (1/R)[1 + \ell^2/(2R^2)]$. (6)

Atunci expresiile devin : $y = R - \sqrt{R^2 - \ell^2} \approx$

$\approx R - R[1 - \ell^2/(2R^2)] = \ell^2/(2R) = \ell^2 qB : (2m)$, (7)

$\operatorname{tg}\alpha = \ell : \sqrt{R^2 - \ell^2} \cong (\ell/R)[1 + \ell^2/(2R^2)] \approx \ell/R \approx \sin\alpha$. (8)

$y' = L \operatorname{tg}\alpha \approx (L\ell/R)[1 + \ell^2/(2R^2)] \approx L\ell/R$, (9)

$y + y' \approx \ell^2/(2R) + L\ell/R = (\ell/R)(\ell/2 + L) = [\ell qB/(mv)](\ell/2 + L)$. (10)

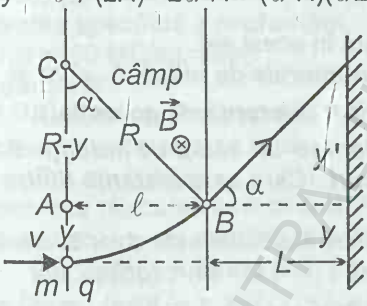


Fig.3.4.1

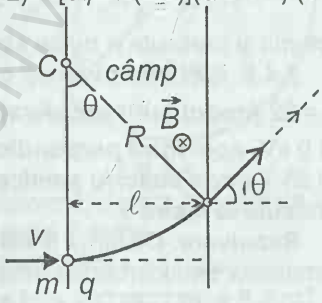


Fig.3.4.2

3.4.2. ***O particulă*** α ***este deviată cu unghiul*** $\theta = 30°$ ***de un câmp magnetic de inducţie*** B = 0,10 T ***şi lăţime*** ℓ = 10 cm . ***Cunoscând sarcina specifică a particulei*** q / m = 50 MC/kg , ***aflaţi viteza particulei*** α .

Rezolvare. Conform figurii :

$\sin\theta = \ell / R$, dar $R = mv : (qB)$, (1)

$v = RqB : m = qB\ell : (m \sin\theta) = 1{,}0$ Mm/s . (2)

3.4.3. ***O particulă, accelerată în prealabil de o diferenţă de potenţial*** U = 3,52 kV ***, intră într-un câmp magnetic uniform de inducţie*** B = 10,0 mT ***perpendicular pe câmp şi descrie un arc de cerc cu raza*** R = 20 mm. ***Aflaţi sarcina specifică a particulei.***

BCU CLUJ-NAPOCA CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Rezolvare. Viteza particulei accelerate :

$$(1/2)\, mv^2 = qU \;\rightarrow\; v = \sqrt{2qU/m}\ . \qquad (1)$$

Asupra particulei acţionează *forţa* ***Lorentz*** *magnetică* :

$$F = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB = ma_c = mv^2 : R \;\rightarrow\; v = qBR : m\ . \qquad (2)$$

$$v = \sqrt{2qU/m} = qBR : m \;\rightarrow\; q/m = 2U/(BR)^2 = 176\ \text{GC/kg} \qquad (3)$$

3.4.4. ***Două particule de mase*** $m_{1,2}$ ***şi sarcini*** $q_{1,2}$ ***, de energii cinetice egale, intră într-un câmp magnetic omogen, perpendicular pe liniile de câmp . Aflaţi raportul razelor traiectoriilor.*** *Aplicaţie* ***la proton şi particula*** α .

Rezolvare. Raza traiectoriei circulare este : $R = mv : (qB)$,

$$(1/2)\, m_1 v_1^2 = (1/2)\, m_2 v_2^2 \;\rightarrow\; v_1 / v_2 = \sqrt{m_2/m_1}\ , \qquad (1)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{v_1}{v_2}\frac{q_2}{q_1} = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\cdot\frac{q_2}{q_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\cdot\frac{q_2}{q_1}. \qquad (2)$$

Pentru proton şi particula α : $m_\alpha \approx 4m_p$, $q_p = e$, $q_\alpha = 2e$,

$$R_2 / R_1 = \sqrt{m_p/(4m_p)}\cdot 2e/e = 1\ , \qquad (3)$$

protonul şi particula α *nu* se separă în acest caz.

3.4.5. ***Ioni monovalenţi cu numerele de masă*** $A_1 = 20$ ***şi*** $A_2 = 22$ ***(neon) sunt accelerаţi de o diferenţă de potenţial*** $U = 4{,}0$ kV***, apoi intră perpendicular într-un câmp de inducţie*** $B = 0{,}25$ T ***unde descriu semicercuri . Care este distanţa dintre fascicule la ieşire ?***

Rezolvare. Distanţa finală dintre fascicule este chiar diferenţa diametrelor semicercurilor descrise : $R = mv : (qB)$, dar

$$v = \sqrt{2qU/m} \quad (\text{din } mv^2/2 = qU)\ , \qquad (1)$$

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\ , \text{ dar } m = A\cdot u\ , \qquad (2)$$

$u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg - unitatea atomică de masă , (3)

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2U\,u}{q}}\cdot\sqrt{A}\ , s = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2U\,u}{e}}\cdot\left(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}\right) = 16\ \text{mm} \qquad (4)$$

3.4.6. ***Un electron, accelerat de o diferenţă de potenţial*** $U = 600$ V ***, intră într-un câmp magnetic*** $B = 1{,}20$ T ***sub un unghi*** $\alpha = 30^\circ$ ***faţă de*** $\vec{B}$ ***(faţă de liniile de câmp). Ştiind sarcina specifică*** $e/m = 176$ GC/kg ***, aflaţi acceleraţia electronului în câmpul magnetic.***

Rezolvare. Viteza câştigată de electron prin accelerare :

$$mv^2/2 = eU \rightarrow v = \sqrt{2eU/m} \,. \qquad (1)$$

Electronul are în câmpul magnetic o mişcare *elicoidală* uniformă sub acţiunea *forţei* ***Lorentz*** (care este "*axipetă*") . În planul transversal avem o mişcare *circulară* uniformă :

$$F = |q\vec{v} \times \vec{B}| = evB\sin\alpha = ma_c \,, \qquad (2)$$

$$a_c = (evB\sin\alpha) : m = \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot B\sin\alpha = 1{,}5 \text{ Em/s}^2 \,. \qquad (3)$$

3.4.7. ***Un proton intră într-un câmp magnetic perpendicular pe inducţia*** $\vec{B}$ ***dar sub un unghi*** $\alpha = 30^\circ$ ***faţă de frontiera câmpului, ca în figură. Ştiind timpul cât se mişcă în câmp până la ieşire*** $\tau = 5{,}0$ μs ***şi cunoscând sarcina specifică a protonului*** e / m =100 MC/kg, ***aflaţi inducţia*** B .

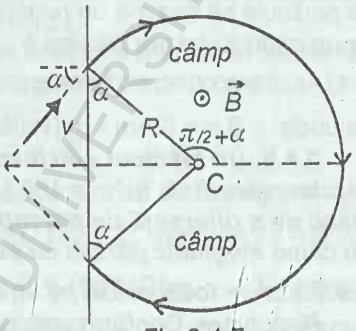


Fig.3.4.7

Rezolvare. Protonul descrie un arc de *cerc* de rază

$$R = mv : (eB) \,. \qquad (1)$$

Deoarece miscarea este circulară uniformă, durata mişcării pe arcul de cerc , τ , se exprimă prin perioada T astfel :

$$T = 2\pi R : v = 2\pi m : (eB) \,, \quad \tau : T = 2(\pi/2 + \alpha) : (2\pi) \,, \qquad (2)$$

$$\tau = [2\pi m : (eB)]\,(\pi + 2\alpha) : (2\pi) \rightarrow B = (\pi + 2\alpha)\, m : (e\tau) = 8{,}4 \text{ mT} \,. \qquad (3)$$

3.4.8. ***O particulă cu sarcina specifică*** q / m =176 GC/kg ***(electron) are la un moment dat în punctul*** A ***viteza*** v = 1,76 Mm/s , ***care fomează unghiul*** $\alpha = 60^\circ$ ***cu inducţia*** $\vec{B}$. ***Pentru ce valori ale inducţiei*** B ***particula va ajunge în punctul*** P ***situat la distanţa*** ℓ = 10 cm ***pe linia de câmp care trece prin*** A ***?***

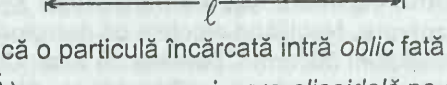


Fig.3.4.8

Rezolvare. Dacă o particulă încărcată intră *oblic* faţă de liniile de câmp (faţă de $\vec{B}$), ea va avea o mişcare *elicoidală* pe o traiectorie *elicoidală* analogă filetului (ghiventului) unui şurub.

BUASM CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mişcarea se descompune într-o mişcare *uniformă* de-a lungul liniilor de câmp cu viteza $v_{\parallel} = v\cos\alpha$ şi o mişcare circulară în planul transversal dată de *forţa* **Lorentz** *magnetică* :

$$F = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qvB\sin\alpha = qv_{\perp}B = ma_c = m(v\sin\alpha)^2 : R \rightarrow$$
$$R = (mv\sin\alpha) : (qB) , \qquad (1)$$

unde intervine componenta *transversală* a vitezei . Durata unei bucle : $T = 2\pi R : (v\sin\alpha) = 2\pi m : (qB)$ (2)

este independentă de viteza v şi de unghiul α . **Pasul** elicoidei este deplasarea longitudinală, de-a lungul câmpului, la o rotaţie (buclă) completă : $h = v_{\parallel} \cdot T = v\cos\alpha \cdot [2\pi m : (qB)]$. (3)

Pentru a ajunge din nou pe linia de câmp în punctul P, trebuie ca particula să descrie un număr **întreg** de bucle sau distanţa ℓ să fie un multiplu **întreg** de paşi h :

$$\ell = n \cdot h = n \cdot (2\pi mv\cos\alpha) : (qB) , \quad n \in \mathbf{N} , \qquad (4)$$

de unde $B = n\,(2\pi m : q)\,(v\cos\alpha : \ell) = n \cdot 0{,}314$ mT , $n \in \mathbf{N}$. (5)

3.4.9. ***Un fascicul sub forma unui con îngust de ioni cu sarcina specifică*** q / m = 100 MC/kg ***(proton), acceleraţi în prealabil de o diferenţă de potenţial*** U = 800 V, ***este focalizat de un câmp magnetic paralel cu axa fasciculului. Pentru ce valori*** B ***fasciculul se focalizează pe un ecran situat la distanţa*** ℓ = 10 cm ***?***

Rezolvare. Conform problemei precedente 3.4.8 , pentru a reveni din nou într-un punct pe linia de câmp (a se focaliza), trebuie ca toate particulele să descrie un număr **întreg** de bucle :

$$\ell = n \cdot h = n \cdot (2\pi mv\cos\alpha) : (qB) , n \in \mathbf{N} , v = \sqrt{2qU/m} , \qquad (1)$$

$$B = n\,[2\pi m : (q\ell)]\,\sqrt{2qU/m}\,\cdot\cos\alpha . \qquad (2)$$

Deoarece fasciculul este **îngust**, $\cos\alpha \approx 1$,

$$B = n\,(2\pi/\ell)\,\sqrt{2mU/q} = n \cdot 2{,}5 \text{ mT} , \quad n \in \mathbf{N} . \qquad (3)$$

3.4.10. ***O particulă*** α ***(sarcina specifică*** q / m = 50 MC/kg***) intră într-un solenoid de lungime*** ℓ = 17,3 cm ***, după axa acestuia, cu viteza*** v = 1,0 Mm/s ***sub unghiul*** $\alpha = 30^{\circ}$ ***faţă de axa solenoidului . Pentru ce valori ale inducţiei*** B ***particula iese prin centrul celeilalte feţe a solenoidului ?***

Rezolvare. Neglijând efectele de *margine*, liniile de câmp într-un solenoid sunt uniforme, paralele cu axa . Conform problemelor precedente particula descrie o *elicoidă* (ca filetul sau ghiventul unui

şurub) cu viteza $v_{\parallel} = v\cos\alpha$, paralel cu liniile de câmp, iar în planul transversal - un cerc. Timpul unei rotaţii (bucle) este independent de viteză şi unghiul α: $T = 2\pi m : (qB)$,

$$\ell = n \cdot h = n \cdot T v_{\perp} = n\,[2\pi m : (qB)]\, v\sin\alpha\,,\ n \in \mathbf{N}\,. \quad (1)$$

$$B = n \cdot (2\pi m v\cos\alpha) : (q\ell) = n \cdot 0{,}628\ \mathrm{T}\,. \quad (2)$$

3.4.11. ***Un ion, accelerat de o diferenţă de potenţial*** U = 15 kV, ***intră perpendicular pe un câmp electric şi un câmp magnetic*** **încrucişate.** ***Dacă*** E = 17 kV/m ***şi*** B = 10,0 m**,** ***ionul trece nedeviat. Aflaţi sarcina specifică a ionului.***

Rezolvare. Câmpurile $\vec{E}, \vec{B}$ încrucişate constituie un **selector de viteze :** trec ***nedeviate*** numai particulele (incidente normal pe câmpuri) cu o *anumită* viteză.

În adevăr, dacă particula este incidentă normal pe planul câmpurilor, atunci forţele electrică şi magnetică se pot compensa (anula reciproc) pentru o anumită viteză :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = 0 \ \rightarrow\ E = vB\,,\quad v = E : B\,. \quad (1)$$

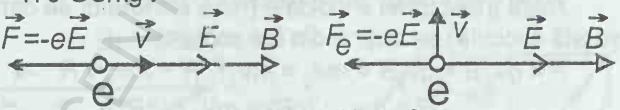
Pe de altă parte viteza este dată de tensiunea de accelerare :

$$(1/2)mv^2 = qU\,,\ v = \sqrt{2qU/m}\ .(2)$$ Rezultă : $v = E : B =$

$= \sqrt{2qU/m}$, $q/m = E^2 : (2UB^2) = 100$ MC/kg (3) (proton).

3.4.12. ***Un electron intră cu viteza*** v = 100 km/s ***: a) paralel, b)perpendicular, pe câmpurile*** paralele ***electric*** E = 4,0 kV/m ***şi magnetic*** B = 30 mT**,** ***ca în figură. Aflaţi acceleraţiile tangenţială şi normală în acest moment. Sarcina specifică a electronului*** e / m = = 176 GC/kg.

Fig.3.4.12



Rezolvare. a) $a_t = eE : m = 7{,}0 \cdot 10^{14}$ m/s^2, în sens opus câmpului $\vec{E}$; $a_n = 0$; forţa magnetică este zero fiindcă $\vec{v}$ este paralel cu $\vec{B}$, deci $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = 0$.

b) Forţele sunt arătate în figură. Rezultanta forţelor este perpendiculară pe viteză, deci dă acceleraţie *normală* :

$$a_n = \frac{1}{m}\sqrt{e^2E^2 + e^2v^2B^2} = \frac{e}{m}\sqrt{E^2 + v^2B^2} = 8{,}8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m/s^2}\,,$$

$$a_t = 0\,.$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.4.13. ***Un ion intră cu viteza*** v_0 = 20 Mm/s ***într-un condensator plan, paralel cu armături. Lungimea armăturilor*** ℓ = 10 cm, ***câmpul din condensator*** E = 20 kV/m . ***Ieşind din condensator ionul intră într-un câmp magnetic de inducţie*** B = 20 mT ***cu liniile de câmp paralele cu*** $\vec{v}_0$. ***Aflaţi raza orbitei elicoidale a ionului .***

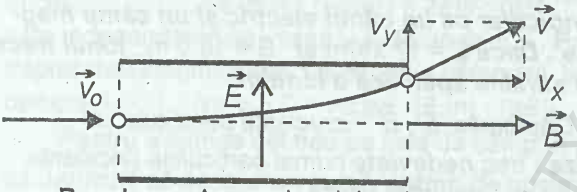


Fig.3.4.13

Rezolvare. Asupra ionului acţionează perpendicular pe armături forţa electrică qE , care îi imprimă acceleraţia $a_y = qE / m$ şi deci componenta $v_y = a_y t$. Paralel cu armături ionul se mişcă cu viteza v_o ($a_x = 0$) .

La ieşirea din condensator asupra ionului acţionează forţa magnetică *Lorentz* :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \ , \quad F = qvB\sin\alpha = qv_{\perp}B \ , \qquad (1)$$

deci ne interesează componenta vitezei perpendiculară pe $\vec{B}$. Cum $\vec{B}$ este paralel cu $\vec{v}_o$, ne trebuie componenta $v_y = v_{\perp}$.

$$F = qv_{\perp}B = qv_yB = qa_ytB \ , \quad \text{dar} \quad t = \ell / v_x = \ell / v_o \ ,$$

$$F = q\,(qE / m)\,(\ell / v_o)\,B \ . \qquad (1)$$

Raza traiectoriei elicoidale (raza cilindrului pe care este înfăşurată elicoida) se obţine din *lex secunda* :

$$F = qv_{\perp}B = qv_yB = ma_c = mv_{\perp}^2 / R = mv_y^2 / R \ \rightarrow$$

$$R = mv_{\perp} : (qB) = mv_y : (qB) = \qquad (2)$$

$$= F\,t : (qB) = [qE : (qB)]\,(\ell : v_o) = E\ell : (Bv_o) = 5{,}0 \text{ mm} \ . \qquad (3)$$

Observăm că acceleraţia în câmp *magnetic* este *normală* pe traiectorie, deci putem scrie

$$a = (v\sin\alpha)^2 : R = v^2 : \rho \ , \quad \rho = R : \sin^2\alpha \ , \qquad (4)$$

unde ρ ($> R$) este *raza de* ***curbură*** a elicei .

3.4.14. ***Un fascicul de protoni intră transversal într-un câmp magnetic de inducţie*** B = 0,10 T ***unde descrie un arc de cerc de rază*** R = 0,20 m , ***după care este absorbit de o "ţintă" (pusă la pământ). Aflaţi puterea calorică dezvoltată în ţintă,***

ştiind intensitatea fasciculului $I = 0{,}10$ mA *şi sarcina specifică a protonului* $e/m = 96$ MC/kg .

Rezolvare. Fiecare proton cedează energia sa cinetică ţintei, deci puterea disipată în ţintă (energia în unitatea de timp) este

$$W^* = N^* (1/2) mv^2 , \quad \text{dar} \quad R = mv : (eB) . \tag{1}$$

Pe de altă parte, numărul de purtători care lovesc ţinta în unitatea de timp este egal cu sarcina care intră în ţintă pe unitatea de timp, adică curentul I , împărţit la sarcina unui purtător , $N^* = I/e$,

$$W^* = (I/e) \cdot (1/2) m (ReB/m)^2 = [e/(2m)] R^2 B^2 I = 2{,}0 \text{ W} . \tag{2}$$

3.4.15. ***Printr-o placă de cupru, aflată în câmpul magnetic*** $B = 0{,}60$ T , ***se trece un curent transversal*** $I = 10{,}0$ A, ***ca în figură*** , $a = 0{,}10$ mm . ***Aflaţi diferenţa de potenţial transversal, considerând că fiecare atom de*** Cu ***contribuie cu un electron de conducţie. Se dă constanta lui Faraday .***

Rezolvare. Asupra purtătorilor de sarcină (electroni) acţionează *forţa* ***Lorentz*** $q\vec{v} \times \vec{B}$, perpendiculară pe $\vec{v}$ şi $\vec{B}$, care deplasează purtătorii spre marginile plăcii până când câmpul electric generat de aceste concentrări de sarcini va echilibra forţa *Lorentz* :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -q\vec{E} , \quad E = vB ,$$

(1) dar $E = U/b$, $U/b = vB$, $U = vBb$. (2)

Pe de altă parte, densitatea de curent $j = I/S$ este

$$\vec{j} = qn\vec{v} , \qquad I = jS = |q| nv ab . \tag{3}$$

Concentraţia purtătorilor de sarcină este egală cu cea a atomilor : $n = N_A : V_\mu = N_A : (\mu/\delta) = N_A \delta/\mu$, (4)

unde δ este densitatea şi μ masa **molară** . Strângând rezultatele avem :

$$U = vBb = [I : (qnab)] Bb = I B\mu : (qN_A \delta a) =$$

$$= I B\mu : (Fa\delta) = 4{,}6 \ \mu\text{V} .$$

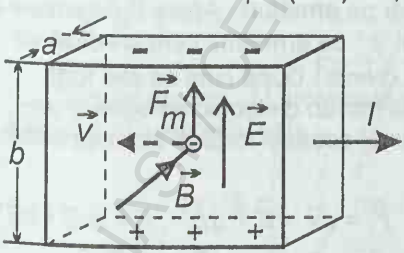


Fig.3.4.15

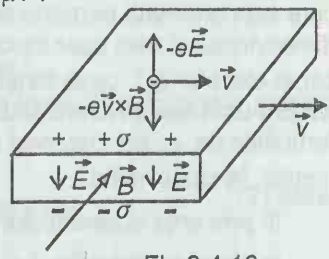


Fig.3.4.16

În figură este reprezentat cazul unei plăci metalice, în care purtătorii sunt electronii . În cazul unui semiconductor în care purtătorii sunt "*golurile*" (pozitive) viteza $\vec{v}$ a purtătorilor va fi în ace-

laşi sens cu curentul I, forţa *Lorentz* va avea acelaşi sens, deci polarizarea plăcii se *inversează* (sensul câmpului electric $\vec{E}$ depinde de sensul vitezei purtătorilor). Această experienţă permite aflarea ***semnului*** *purtătorilor de sarcină* (*efectul* ***Hall***).

3.4.16. ***O bandă de metal (nemagnetic) se mişcă cu viteza*** v = 11,3 m/s ***într-un câmp magnetic de inducţie*** B = 1,00 T ***,ca în figură . Aflaţi densitatea superficială a sarcinilor electrice care apar pe feţele laterale ale benzii .***

Rezolvare. Asupra electronilor va acţiona forţa *Lorentz* care îi redistribuie polarizând placa ca în figură, până când forţa *electrică* va echilibra forţa Lorentz :

$$q\vec{v}\times\vec{B}=-q\vec{E}\,,\qquad \vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}\,,\qquad E=vB\,. \tag{1}$$

Pe de altă parte, câmpul electric se exprimă prin densitatea superficială de sarcină de pe cele două feţe ale benzii :

$$E=\sigma:\varepsilon=vB\ \rightarrow\ \sigma=\varepsilon\,vB=1{,}0\cdot10^{-10}\ \mathrm{C/m^2}\,. \tag{2}$$

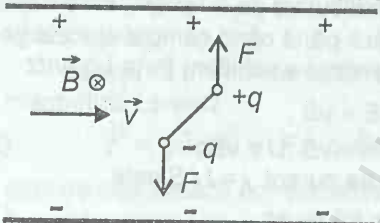


Fig.3.4.17

3.4.17. ***Între armăturile unui condensator plan-paralel, cu distanţa dintre armături*** d = 10 mm ***, curge cu viteza*** v =1,0 m/s ***un dielectric lichid*** dipolar ***cu constanta dielectrică*** ε_r = 2,5 ***. Transversal pe viteză şi paralel cu armături se aplică un câmp magnetic*** B = 0,10 T ***. Aflaţi tensiunea*** U ***care apare între armăturile condensatorului .***

Rezolvare. Sarcinile dipolilor în mişcare sunt supuse în primul rând la *forţa* ***Lorentz*** $\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$, (1)

care este orientată perpendicular pe armături . Apare o *polarizare* a dielectricului şi deci apar sarcini σ' pe armături, care creează un câmp electric $\vec{E}'$ opus forţei Lorentz . După cum se ştie forţa asupra unei sarcini libere situată într-un dielectric omogen şi uniform este de ε_r ori mai *mică* decât aceeaşi forţă în absenţa dielectricului. În cazul nostru :

în prezenţa dielectricului : $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}+q\vec{E}'$, $F=qvB-qE'$,

în absenţa dielectricului : $\vec{F}_o=q\vec{v}\times\vec{B}$, $F_o=qvB$.

$$F=F_o:\varepsilon_r\,,\quad qvB-qE'=qvB:\varepsilon r\,, \tag{2}$$

$$E'=[(\varepsilon_r-1):\varepsilon_r]\,vB\ \rightarrow\ U'=E'd=[(\varepsilon_r-1):\varepsilon_r]\,vBd=0{,}60\ \mathrm{mV}. \tag{3}$$

Se poate judeca şi astfel . Forţa Lorentz echivalează cu un câmp *electric* aplicat exterior $\vec{E}_o = \vec{v} \times \vec{B}$, care produce polarizarea dielectricului, deci sarcini induse de polarizare σ' şi câmpul indus, opus , $\vec{E}\,'$ produs de σ', care se compune cu $\vec{E}_o$ în dielectric :

$$E = E_o - E' \ , \quad \text{unde } E_o = vB \ , \quad E' = \sigma' : \varepsilon \ , \tag{4}$$

dar

$$E = E_o : \varepsilon_r \qquad [\text{sau } E' = (\varepsilon_r - 1)E] \ , \tag{5}$$

$$E = E_o : \varepsilon_r = E_o - E' \rightarrow E' = E_o(1 - 1/\varepsilon_r) = vB(1 - 1/\varepsilon_r) \ , \tag{6}$$

$$U' = E'd = (1 - 1/\varepsilon_r)\, vBd \ . \tag{7}$$

**** 3.4.18.** ***Într-o regiune a spaţiului există câmp electric*** $\vec{E}$ = = const ***şi câmp magnetic*** $\vec{B}$ = const , ***orientate după axa*** Oy , ***respectiv*** Oz ***ca în figură . La momentul*** t = 0 ***se lasă liberă în originea*** O ***o particulă de masă*** m ***şi sarcină*** q . ***Studiaţi mişcarea particulei.***

Rezolvare. Asupra particulei acţionează *forţa* ***Lorentz*** :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \ . \tag{1}$$

Particula va porni în direcţia *Oy* a câmpului $\vec{E}$ şi imediat va apare şi forţa *Lorentz magnetică* în planul *Oxy*, astfel încât particula se va mişca în continuare numai în planul *Oxy* .

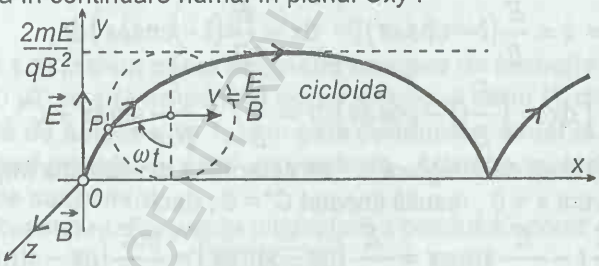


Fig.3.4.18

Scriem ecuaţia (1) proiectată pe axele *Oxy*. Expresia *analitică* a produsului *vectorial* este

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec{i}\, B\dot{y} - \vec{j} B\dot{x} \ , \tag{2}$$ astfel

încât avem : $m\ddot{x} = qB\dot{y} \ , \quad m\ddot{y} = qE - qB\dot{x} \ .$ (3)

Acest sistem de două ecuaţii diferenţiale se integrează uşor în etape succesive. Întâi integrăm o dată prima ecuaţie (3) :

$$m\ddot{x} = m\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = qB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \text{sau} \quad m\mathrm{d}\dot{x} = qB\mathrm{d}y,$$

$$\int m\mathrm{d}\dot{x} = \int qB\mathrm{d}y \rightarrow m\dot{x} = qBy + C$$

(ceea ce se putea scrie dintr-o dată), unde constanta de integrare C se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $\dot{x} = 0$, $y = 0$ şi $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$, rezultă imediat $C = 0$, deci

$$\dot{x} = \frac{qB}{m}y. \qquad (4)$$

Introducem această valoare în ecuaţia a doua (3) :

$$\ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = \frac{qE}{m}. \qquad (5)$$

Aceasta este binecunoscuta *ecuaţie diferenţială a* ***oscilatorului armonic*** (cu partea dreaptă) cu soluţia :

$y = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + mE : (qB^2)$, $\omega = qB : m$, (6)

unde $C_{1,2}$ sunt constantele de integrare care se determină din condiţiile *iniţiale*: la $t = 0$ avem $y = 0$: $0 = C_2 + mE : (qB^2)$, deci

$y = [mE : (qB^2)](1 - \cos\omega t)$, $\omega = qB : m$. (7)

Introducem acum această valoare în (4) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t), \quad \mathrm{d}x = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t)\mathrm{d}t,$$

$$x = \int \mathrm{d}x = \int \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t)\mathrm{d}t = \frac{E}{B}t - \frac{E}{B\omega}\sin\omega t + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $x = 0$, rezultă imediat $C' = 0$, deci

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{E}{B\omega}\sin\omega t = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t) = \frac{mE}{qB^2}(\omega t - \sin\omega t).$$

(8)

Ecuaţiile (7),(8) reprezintă ecuaţiile *cinematice* ale mişcării şi în acelaşi timp ecuaţiile *parametrice* ale tralectoriei (parametrul este $\theta = \omega t$). Recunoaştem curba ***cicloida*** generată de mişcarea unui punct al cercului de rază $R = mE : (qB^2)$, care se rostogoleşte fără lunecare pe axa Ox cu viteza E / B .

* *

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ

4.1. TENSIUNEA ELECTROMOTOARE INDUSĂ

4.1.1. ***Pe şine de cale ferată, izolate între ele şi la distanţa*** ℓ = 1,20 m ***între ele, merge un tren cu viteza*** v = 60 km/h . ***Componenta verticală a inducţiei magnetice terestre este*** B_v = 50 μT. ***Ce va arăta un voltmetru (ideal) conectat între şine dacă : a) trenul se apropie de voltmetru, b) trece pe deasupra , c) se depărtează de voltmetru ?***

Rezolvare. Arată aceeaşi tensiune :

$$U = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell = 1{,}0 \text{ mV} .$$

4.1.2. ***Într-un câmp magnetic omogen de inducţie verticală*** B = 80 μT ***se află un pendul conic simplu al cărui fir de suspensie de lungime*** ℓ = 1,00 m ***este conductor, izolat la capete, formând unghiul*** $\alpha = 60^o$ ***cu verticala . Aflaţi*** t.e.m. ***indusă în firul de suspensie.***

Rezolvare. Frecvenţa unghiulară a pendulului conic este

$$\omega = \sqrt{g/(\ell \cos\alpha)} . \qquad (1)$$

Produsul $\vec{v} \times \vec{B}$ este orientat *centripet* , deci proiectat pe firul BA , dă t.e.m. indusă E în sensul de la B la A . Deoarece punctele firului AB se mişcă cu viteze diferite , care variază *liniar* de la zero (în A) până la ωR (în B) , trebuie luată viteza *medie* $\omega R / 2$,

$$E = \left(\vec{v}_m \times \vec{B}\right)\vec{\ell} = v_m B \cdot \ell \cos(\pi/2 - \alpha) = (1/2)\omega R B \ell \sin\alpha =$$

$$= (1/2)\omega\ell\sin\alpha \; B\ell\sin\alpha = (1/2)\omega\ell^2\sin^2\alpha \; B , \qquad (2)$$

$$E = (1/2)\sqrt{g/(\ell\cos\alpha)} \; \ell^2\sin^2\alpha \; B = 0{,}133 \text{ mV} . \qquad (3)$$

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă închidem firul AB prin firele AC şi CB , obţinem un circuit închis ABC . În acest circuit nu se induce t.e.m., deoarece circuitul nu îmbrăţişează flux magnetic ($\vec{B}$ este paralel cu suprafaţa circuitului). Pe de altă parte, în firul vertical AC nu se induce t.e.m. deoarece el nu taie linii de câmp , dar atunci t.e.m. indusă în BC trebuie să fie egală în modul şi de sens opus cu t.e.m. indusă în firul BA . Problema s-a redus la calculul t.e.m. induse în BC . Dar BC taie linii de câmp cu viteza medie $\omega R/2$, deci

$$E = v_m BR = (1/2)\,\omega R^2 B = (1/2)\,\omega \ell^2 \sin^2\alpha\, B\,.$$

4.1.3. ***Într-un câmp magnetic vertical de inducţie*** B, ***ocupând o arie transversală de rază*** R , ***se mişcă perpendicular pe câmp un conductor cu viteza constantă*** v. ***Ce t.e.m. se induce în conductor?***

Rezolvare. T.e.m. indusă : $E = \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\vec{\ell} = vB\ell\,.$ (1)

Produsul $\vec{v}\times\vec{B}$ are sensul din figură, care dă şi sensul t.e.m. induse E . Lungimea *activă* ℓ se obţine din *teorema lui* ***Pitagora*** :

$$\ell = 2\cdot\sqrt{R^2-(R-vt)^2}\ ,$$

$$E = vB\ell = 2vB\sqrt{vt(2R-vt)}\ , \qquad t < 2R/v\,. \tag{2}$$

Sub radical suma factorilor este *constantă* (= 2*R* , independent de *t*), atunci produsul este maxim când factorii sunt egali :

$$vt = 2R - vt \ \rightarrow\ t = R/v\,, \tag{3}$$

adică în momentul când conductorul trece prin centrul cercului (când lungimea activă ℓ este maximă) .

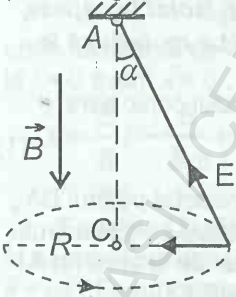


Fig.4.1.2

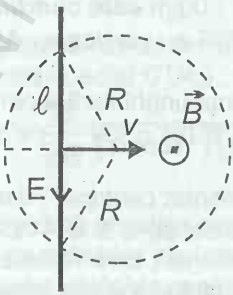


Fig.4.1.3

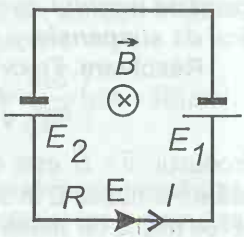


Fig.4.1.5

4.1.4. ***Din trei conductori identici s-au construit trei circuite închise sub formă de cerc, pătrat şi triunghi echilateral . Circuitele sunt aşezate în acelaşi câmp magnetic variabil . Dacă în primul circuit se induce un curent*** I_1, ***ce curent se induce în***

celelalte circuite ?

Rezolvare. Deoarece rezistenţa electrică a celor trei circuite este aceeaşi, curenţii induşi sunt proporţionali cu t.e.m induse. Conform *legii* ***inducţiei electromagnetice*** :

$$E = -d\Phi / dt = -d(BS) / dt = -S\, dB / dt \sim S , \qquad (1)$$

adică în cazul nostru t.e.m. sunt proporţionale cu ariile circuitelor .

Dacă notăm cu ℓ lungimea conductorului, obţinem :

$$l_1 \sim S_1 = \pi [\ell / (2\pi)]^2 , \quad l_2 \sim S_2 = (\ell / 4)^2 ,$$

$$l_3 \sim S_3 = (1/2)(\ell / 2)2\sqrt{3} / 2 \qquad (2) \text{ sau}$$

$$l_2 = l_1 \pi / 4 = 0{,}78\, l_1 , \quad l_3 = l_1 \pi\sqrt{3} / 9 = 0{,}60\, l_1 . \qquad (3)$$

4.1.5. ***În schema din figură*** $E_1 = 10{,}0$ V , $E_2 = 8{,}0$ V , ***rezistenţa circuitului*** $R = 4{,}0\ \Omega$ ***şi aria*** $S = 0{,}25$ m^2 . ***Inducţia magnetică, perpendiculară pe planul circuitului, variază după legea*** $B = k t$, ***unde*** $k = 16$ T/s . ***Aflaţi curentul prin circuit .***

Rezolvare. Conform *regulii lui* ***Lenz***, t.e.m. indusă E are sensul din figură, astfel încât curentul indus să producă un flux magnetic *opus* ***creşterii*** fluxului inductor dat . T.e.m. indusă este

$$|E| = \Delta\Phi / \Delta t = \Delta(BS) / \Delta t = S\Delta B / \Delta t = Sk\Delta t / \Delta t = Sk . \qquad (1)$$

Mergând pe circuit în sens trigonometric avem pentru ochiul de reţea *legea lui* ***Kirchhoff*** : $|E| - E_1 + E_2 = RI$,

$$I = (E_2 - E_1 + kS) : R = 0{,}50 \text{ A} . \qquad (2)$$

4.1.6. ***Dintr-un conductor sunt formate două bucle de raze*** $r_{1,2}$, ***ca în figură . Aflaţi tensiunea dintre punctele*** M , N . ***Se dau*** $B = bt$, $b = 1{,}0\ \mu$T/s , $r_1 = 60$ mm , $r_2 = 40$ mm .

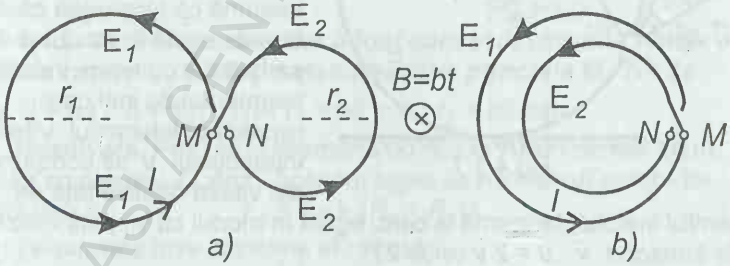


Fig.4.1.6

Rezolvare. Pentru fiecare buclă separat aflăm sensul t.e.m. induse , conform *regulii lui* ***Lenz*** . Aplicăm *legea lui* ***Kirchhoff*** pentru întregul circuit, mergând în sens trigonometric pe bucla ***1*** :

(a) $E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) I$, (b) $E_1 + E_2 = (R_1 + R_2) I$, (1)

Tensiunea între punctele M , N :

(a) $U = -R_1 I - (-\mathcal{E}_1) = R_2 I - (-\mathcal{E}_2) = (\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1) : (R_1 + R_2)$,(2)

(b) $U = -R_1 I - (-\mathcal{E}_1) = R_2 I - \mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1) : (R_1 + R_2)$, (3)

Reamintim că **tensiunea** *între două puncte* A , B *într-o reţea se calculează alegând un drum pe reţea de la* A *la* B *şi sumând căderile (diferenţele) de potenţial (tensiunile) şi scăzând t.e.m.* :

$$U_{AB} = V_A - V_B = \sum RI - \sum \mathcal{E} . \quad (4)$$

T.e.m. induse sunt: $|\mathcal{E}| = \Delta\Phi / \Delta t = \Delta(BS) / \Delta t =$

$$= S\Delta B / \Delta t = S\Delta(bt) / \Delta t = Sb = \pi r^2 b . \quad (5)$$

Rezistenţele circuitelor sunt : $R = \rho \ell / s = \rho\, 2\pi r / s$. (6)

Tensiunile cerute (2 ; 3) se scriu acum :

(a) $U = (\pi r_1^2 b \cdot r_2 + \pi r_2^2 b \cdot r_1) : (r_1 + r_2) = \pi r_1 r_2 b = 7{,}5$ mV , (7)

(b) $U = \pi r_1 r_2 b\,(r_1 - r_2) : (r_1 + r_2) = 15$ mV . (8)

4.1.7. ***Un inel de sârmă, având o foarte mică întrerupere (interstiţiu) de lungime*** ℓ ***, se rostogoleşte uniform fără lunecare cu viteza*** v ***pe un plan izolant, într-un câmp magnetic orizontal*** B ***perpendicular pe planul inelului. Aflaţi t.e.m.indusă în inel în funcţie de unghiul*** θ.

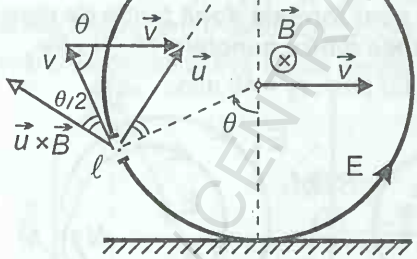


Fig.4.1.7

Rezolvare. Dacă am *închide* inelul, atunci fluxul îmbrăţişat ar fi *constant*, $\Delta\Phi = 0$, şi nu s-ar induce nimic $\mathcal{E} = 0$. Aceasta înseamnă că tensiunea căutată este egală în modul şi de sens opus cu t.e.m. indusă în segmentul de inel care reprezintă interstiţiul. Viteza interstiţiului $\vec{u}$ se compune din viteza *relativă* faţă de centrul inelului, tangentă la cerc, egală în modul cu v , plus viteza de *transport* $\vec{v}$:$u = 2v \sin(\theta/2)$. (1)

Produsul $\vec{u} \times \vec{B}$ are sensul din figură, deci în segmentul ℓ t.e.m. va fi în sens orar, atunci în restul inelului va fi în sens trigonometric : $\mathcal{E} = |(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}| = 2v \sin(\theta/2) \cdot B \cdot \ell \cos(\theta/2) =$

$$= v \sin\theta \cdot B\ell = vB\ell \sin\omega t = vB\ell \sin(vt / R) . \quad (2)$$

T.e.m. este maximă în momentele când interstiţiul trece prin extremităţile diametrului orizontal .

4.1.8. ***O bară conductoare de lungime*** ℓ = 0,50 m ***se roteşte în jurul unei axe verticale trecând printr-un capăt cu viteza unghiulară*** ω = 10 rad/s ***într-un câmp vertical*** B = 0,20 mT. ***Aflaţi t.e.m. indusă în bară .***

Rezolvare. Bara taie linii de câmp magnetic, deci

$$E = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \ . \qquad (1)$$

Deoarece diferitele puncte ale barei au viteze *diferite* variind *liniar* de la zero (în O) la $\omega\ell$ (în A) , trebuie luată o viteză *medie* $\omega\ell / 2$.

Produsul $\vec{v} \times \vec{B}$ este chiar de-a lungul barei , centrifug, deci

$$E = v_m B\ell \ , \quad v_m = \omega\ell / 2 \ \rightarrow \ E = (1/2)\omega\ell^2 B = 0{,}25 \text{ mV} \ . \qquad (2)$$

Se poate judeca şi cu formula $E = - \Delta\Phi / \Delta t$.

Alegem $\Delta t = T = 2\pi / \omega$, atunci $\Delta\Phi$ va fi fluxul cuprins de cercul descris de bară :

$$|E| = B\pi\ell^2 / T = \pi\ell^2 B : (2\pi / \omega)] = (1/2)\omega\ell^2 B \ . \qquad (3)$$

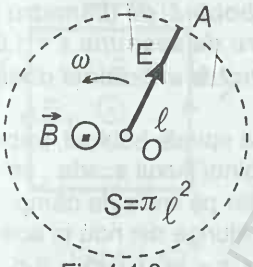


Fig.4.1.8

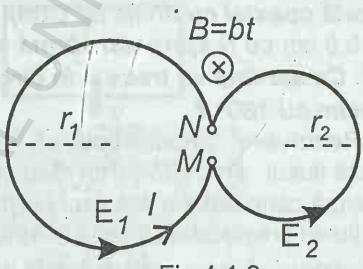


Fig.4.1.9

4.1.9. ***Dintr-un conductor a fost construit circuitul din figură cu razele*** $r_{1,2}$ ***. Aflaţi tensiunea între punctele M , N . Se dau*** B = b t , b = 1,0 μT/s , r_1 = 60 mm , r_2 = 40 mm .

Rezolvare. Problema seamănă cu 4.1.6. Aflăm sensul t.e.m. induse cu *regula lui* ***Lenz*** . Aplicăm *legea lui* ***Kirchhoff*** pentru întregul circuit : $E_1 + E_2 = (R_1 + R_2) I$. (1)

Tensiunea între punctele M , N este

$$U = - R_1 I - (- E_1) = R_2 I - E_2 = (E_1 R_2 - E_2 R_1) : (R_1 + R_2) \ . \qquad (2)$$

T.e.m. induse sunt :

$$|E| = \Delta\Phi / \Delta t = S \, \Delta B / \Delta t = S \, \Delta(bt) / \Delta t = Sb \qquad (3)$$

şi rezistenţele : $R = \rho\ell / s = \rho \, 2\pi r / s$, (4)

astfel încât tensiunea cerută este : $U = (E_1R_2 - E_2R_1) : (R_1 + R_2) =$

$$= \pi r_1 r_2 b\,(r_1 - r_2) : (r_1 + r_2) = 15 \text{ mV}, \qquad (5)$$

aceeaşi ca în cazul (b) din problema 4.1.6 .

4.1.10. ***Un inel conductor de rază*** $r = 10$ cm ***şi cu rezistenţa*** $R = 1{,}0\ \Omega$ ***stă pe o masă. Ce sarcină va trece prin inel dacă îl răsturnăm cu*** 180° ***? Componenta verticală a inducţiei terestre este*** $B_v = 50$ mT .

Rezolvare. Putem aplica direct formula pentru sarcina care trece într-un circuit datorită variaţiei fluxului îmbrăţişat :

$$q = -\Delta\Phi / R . \qquad (1)$$

În cazul nostru fluxul îmbrăţişat este BS . Prin răsturnarea inelului fluxul scade, se anulează (când planul spirei este vertical) şi apoi iar ajunge la BS dar în sens *invers*, deci variaţia de flux este $BS - (-BS) = 2BS$. Sarcina care va trece datorită inducţiei electromagnetice va fi deci: $q = 2BS / R = (2B_v / R)\,\pi r^2 = 3{,}14\ \mu C$.(2)

4.1.11. ***Într-un câmp magnetic de inducţie*** $B = 34$ mT ***este aşezată coaxial cu liniile de câmp*** $\vec{B}$ ***o bobină de diametru*** $D = 5{,}0$ cm ***cu*** N ***spire din sârmă de cupru de secţiune*** $s = 1{,}0$ mm^2***. Ce sarcină va trece prin circuitul închis al bobinei dacă o răsucim cu*** 180° ***?***

Rezolvare. Circuitul bobinei, deci *toate* spirele bobinei, îmbrăţişează fluxul $\Phi = NBS$. Prin răsucirea bobinei fluxul scade , se anulează când bobina are axul perpendicular pe liniile de câmp, apoi fluxul creşte, dar în sens invers, până ajunge din nou la aceeaşi valoare Φ, deci variaţia totală de flux $\Delta\Phi = \Phi - (-\Phi) = 2\Phi$. Atunci conform formulei cunoscute pentru sarcina indusă :

$$q = 2\Phi / R = 2NBS : (\rho \ell_c / s) = (2NB\pi D^2 / 4) : (\rho N \pi D / s) =$$

$$= BDs : (2\rho) = 50 \text{ mC} .$$

4.1.12. ***Un conductor flexibil de rezistenţă*** $R = 1{,}00\ \Omega$ ***este închis sub formă de pătrat de latură*** $\ell = 10{,}0$ cm ***şi aşezat transversal pe un câmp de inducţie*** $B = 5{,}0$ T . ***Ce sarcină electrică va trece prin conductor dacă transformăm pătratul în triunghi echilateral ?***

Rezolvare. Prin trecerea de la pătrat la triunghi fluxul îmbrăţişat de circuit variază, deci se induce un curent şi va trece o sarcină electrică, dată de formula $q = -\Delta\Phi / R$. Iniţial aria este $S_1 = \ell^2$, deci lungimea conductorului 4ℓ , deci latura triunghiului

echilateral va fi $4\ell/3$, atunci aria triunghiului va fi $S_2 = (1/2)(4\ell/3)2\sqrt{3}/2$. Prin urmare,

$|q| = B(S_1 - S_2) : R = [B\ell^2 : (9R)](9 - 4\sqrt{3}) = 12$ mC .

4.1.13. ***Lângă un conductor rectiliniu lung străbătut de un curent*** I = 10,0 A ***se află un cadru dreptunghiular cu laturile*** a = = 6,0 cm , b = 6,0 cm , ***în acelaşi plan cu conductorul, la distanţa*** r = 2,0 cm ***de acesta, ca în figură . La un moment dat i se imprimă cadrului o viteză*** v = 2,0 m/s ***în planul comun, perpendicular pe conductor . Aflaţi t.e.m. indusă in cadru în acest moment .***

Rezolvare. Câmpul $\vec{B}$ produs de *I* este perpendicular pe cadru . Laturile *active* care taie linii de câmp magnetic sunt laturile *b* (în laturile *a* nu se induce t.e.m, deoarece nu taie linii de câmp) .

Produsul $\vec{v} \times \vec{B}$ este paralel cu curentul , t.e.m. indusă rezultantă va fi : $E = E_1 - E_2 = vB_1 b - vB_2 b =$

$= [(\mu Ivb) : (2\pi)][1/r - 1/(r + a)] = [\mu Iv : (2\pi)]\, ab : [r(r + a)] = 9{,}0$ mV.

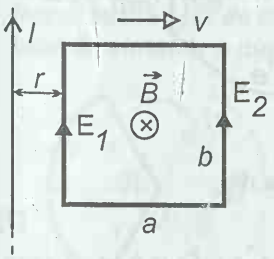


Fig.4.1.13

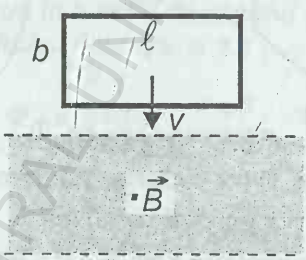


Fig.4.1.14

4.1.14. ***Un cadru dreptunghiular orizontal de rezistenţă*** R= = 1,00 Ω , ***de lungime*** ℓ = 10,0 cm ***şi lăţime*** b = 5,0 cm , ***se mişcă cu viteza*** v = 4,0 m/s ***în direcţia laturilor*** b ***şi traversează o fâşie lată*** (> b) ***de câmp magnetic vertical de inducţie*** B = 0,50 T. ***Aflaţi căldura degajată în cadru datorită traversării câmpului magnetic.***

Rezolvare. În momentul în care latura ℓ frontală intră în câmp, ea taie linii de câmp şi în ea se induce $E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{\ell} = vB\ell =$ const până în momentul când şi cealaltă latură ℓ intră în câmp, din acest moment t.e.m. induse în laturile ℓ se compensează , fluxul îmbrăţişat ($B\ell b$) rămâne *constant*, deci nu se induce global nimic până când latura ℓ frontală iese din câmp, când se induce

iarăşi $E = vB\ell$, până când cadrul iese complet din câmp . Prin urmare, se degajă căldură la intrarea şi la ieşirea cadrului din câmp :

$$Q = 2 \cdot E^2 t : R = 2\,[(vB\ell)^2 / R]\; b / v = 1{,}0 \text{ mJ} .$$

4.1.15. ***Un conductor de lungime*** $\ell = 0{,}50$ m ***, parcurs de un curent*** $I = 4{,}0$ A ***şi având rezistenţa*** $R = 25$ mΩ ***, se mişcă cu viteza*** $v = 0{,}80$ m/s ***perpendicular pe un câmp magnetic de inducţie*** $B = 5{,}0$ mT ***. Aflaţi de câte ori puterea termică (calorică) dezvoltată în conductor este mai mare decât puterea dezvoltată pentru deplasarea conductorului . Discutaţi bilanţul*** puterilor.

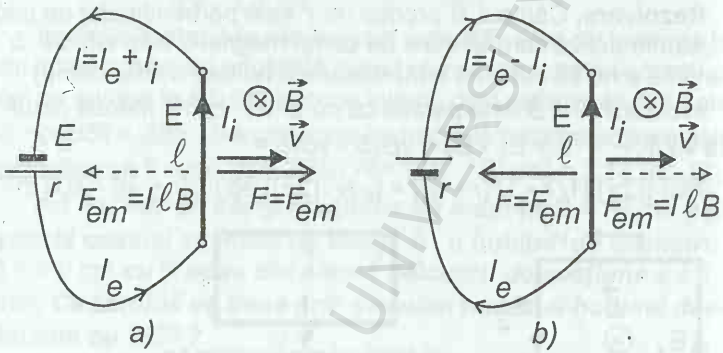


Fig.4.1.15

Rezolvare. În conductor se induce o t.e.m.

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell = 2{,}0 \text{ mV} , \qquad (1)$$

care ar da un curent prin bară $E / R = 80$ mA $< I = 4{,}0$ A, deci sigur bara este conectată la o sursă exterioară adecvată . Fie E şi r t.e.m. şi rezistenţa internă a acestei surse . Putem avea cele două cazuri din figură (semnele superioare se referă la primul caz, cele inferioare - la al doilea caz) : $E \pm E = (R + r)\, I$,

$$I = I_e \pm I_i , \quad I_e = E : (r + R) , \quad I_i = E : (r + R) , \qquad (2)$$

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell .$$

Forţa exterioară trebuie să fie egală în modul şi de sens opus cu forţa electromagnetică pentru a realiza mişcarea rectilinie uniformă ($\vec{v}$ = const) . Lucrul mecanic exterior efectuat pentru deplasarea barei : $L = \vec{F}\vec{v} = \pm F_{em}\, v = \pm I\ell B v = \pm E\, I$. (3)

Bilanţul ***puterilor*** pentru bara aflată în câmpul magnetic este :

Energia furnizată de sursa exterioară $E\,I - r\,I^2$ plus lucrul mecanic efectuat $\vec{F}\vec{v} = \pm E\,I$ se disipă în bară sub formă de căldură $R\,I^2$: $E\,I - r\,I^2 \pm E\,I = R\,I^2$ sau $(E \pm E)\,I = (r + R)\,I^2$

sau $E \pm E = (r + R)\,I$, (4)

regăsim, evident, prima formulă (2), deci bilanţul energetic se putea obţine imediat înmulţind prima ecuaţie (2) (*legea* ***Ohm***) cu I. Observăm că în al doilea caz lucrul mecanic exterior pentru deplasarea barei este *negativ*, aceasta înseamnă că sursa exterioară suportă şi căldura disipată şi acest lucru mecanic spre exterior.

Raportul cerut: $R\,I^2 : L = R\,I^2 : (I\,\ell\,B\,v) =$

$= R\,I^2 : E\,I = R\,I : E = R\,I : (vB\ell) = 50$. (5)

4.1.16. ***Un circuit în formă de contur de sector de cerc de rază*** r = 10 cm, ***unghi la centru*** α ***şi rezistenţă*** R = 314 mΩ, ***ca în figură, efectuează o rotaţie completă cu viteza unghiulară*** ω = 100 rad/s ***în câmpul*** B = 0,10 T ***care ocupă un semiplan. Ce cantitate de căldură se degajă în circuit ? Reprezentaţi grafic fluxul îmbrăţişat de circuit în funcţie de unghiul de rotaţie al axei de simetrie a circuitului.*** *Aplicaţie:* $\alpha = \pi$.

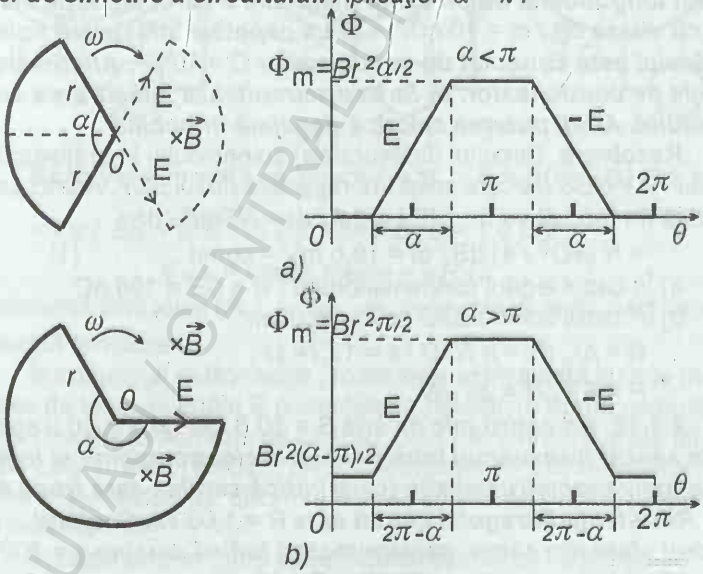


Fig.4.1.16

Rezolvare. Partea activă a conturului este constituită de cele două raze în care se induce o t.e.m. radială în sens centrifug :

$\mathcal{E} = \Delta\Phi / \Delta t = B\Delta S / \Delta t = Br^2\,(\Delta\theta / 2) / \Delta t = (1/2)Br^2\omega$ (1)
($\omega = \Delta\theta / \Delta t$) . Această tensiune E se induce în circuit atâta timp cât un singur conductor radial se află în câmp (când sunt amândouă sau nici unul, nu se induce nimic).

Dacă timpul unei rotaţii complete este $T = 2\pi / \omega$, timpul cât un singur conductor se mişcă în câmp este

$t = T \cdot 2\alpha : (2\pi) = (2\pi / \omega)\,(\alpha / \pi) = 2\alpha / \omega$, dacă $\alpha < \pi$,

respectiv: $t = T \cdot 2(2\pi - \alpha) : (2\pi) = [(2\pi - \alpha) / \pi] \cdot (2\pi / \omega =$

$= 2(2\pi - \alpha) / \omega$, dacă $\alpha > \pi$, (2)

ceea ce se poate vedea urmărind mişcarea celor două conductoare radiale.

Căldura degajată la o rotaţie rezultă acum imediat :

$Q = rI^2t = r\,(\mathcal{E} / r)^2\,t = [1 / (4r)]\,(Br^2\omega)^2 \cdot 2\alpha / \omega$, $(\alpha < \pi)$,

respectiv, $Q = [1 / (4r)]\,(Br^2\omega)^2 \cdot 2(2\pi - \alpha) / \omega$, $(\alpha > \pi)$. (3)

În cazul numeric $\alpha = \pi$, ambele formule dau acelaşi rezultat $Q = 0{,}50$ mJ .

4.1.17. ***Un solenoid de diametru*** D = 5,0 cm ***cu*** N = 1000 ***spire din sârmă de cupru de secţiune*** s = 0,20 mm^2 ***este străbătut longitudinal de un câmp magnetic a cărui inducţie variază cu viteza*** dB / dt = 10 mT/s . ***a) La capetele înfăşurării solenoidului este conectat un condensator*** C = 10 μF. ***Aflaţi sarcina de pe condensator. b) Se scurtcircuitează înfăşurarea solenoidului. Aflaţi puterea calorică degajată în bobină .***

Rezolvare. Circuitul (înfăşurarea) solenoidului îmbrăţişează fluxul $\Phi = NBS$ (fiecare spiră îmbrăţişează fluxul BS) . Atunci t.e.m. indusă (în modul) va fi : $|\mathcal{E}| = d\Phi / dt = NS\,dB / dt =$

$= N\,(\pi D^2 / 4)\,dB / dt = 19{,}6$ mV = const . (1)

a) În cazul legării condensatorului : $q = C\mathcal{E} = 196$ nC . (2)

b) În cazul solenoidului scurt-circuitat :

$R = \rho \ell_c / s = \rho\, N\pi D / s = 13{,}74\ \Omega$, (3)

$P = \mathcal{E}^2 / R = 28$ μW . (4)

4.1.18. ***Un cadru mic de arie*** S = 10,0 cm^2 ***şi*** N = 10,0 spire ***este aşezat transversal între polii unui electromagnet şi legat la un galvanometru*** balistic ***(care indică sarcina care trece prin el). Rezistenţa întregului circuit este*** R = 1,00 Ω . ***Scoţând cadrul afară din câmp, galvanometrul indică sarcina*** q = 100 μC. ***Aflaţi inducţia magnetică între polii electromagnetului .***

Rezolvare. Circuitul (cadrul) îmbrăţişează fluxul magnetic $\Phi = NBS$, care prin scoaterea cadrului afară, se anulează. Sarcina care trece prin galvanometru va fi atunci : $q = -\Delta\Phi / R = -(0 - NBS)/R = NBS/R$, $B = qR/(NS) = 10{,}0$ mT .

4.1.19. ***O roată metalică de rază*** R = 10 cm , ***cu o singură spiţă, se roteşte în jurul axului său cu viteza unghiulară*** ω = 20 rad/s. ***Roata este situată într-un câmp magnetic*** B = 10 mT ***perpendicular pe roată. Un voltmetru ideal este conectat la axul şi periferia roţii cu ajutorul unor contacte glisante, ca în figură . Ce tensiune va arăta voltmetrul ? Dar dacă roata are mai multe spiţe ? Dar dacă roata este un disc metalic? Prin ce se deosebesc aceste cazuri între ele?***

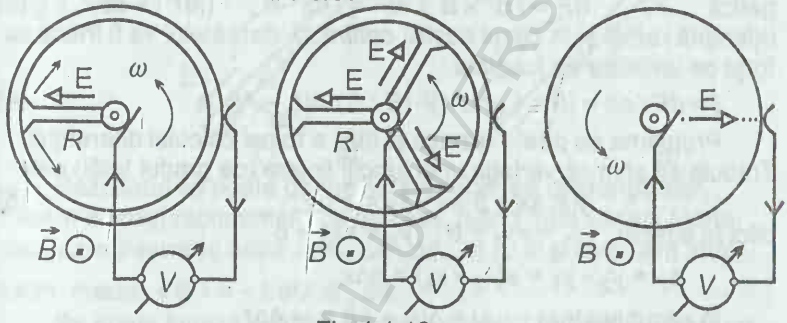


Fig.4.1.19

Rezolvare. În spiţă se induce t.e.m. $E = \left|\left(\langle\vec{v}\rangle \times \vec{B}\right)\vec{R}\right| =$

$= \langle v \rangle BR = (\omega R/2)\,BR = \omega R^2 B/2 = 1{,}0$ mV ,

$\langle v \rangle$ = viteza medie = $\omega R/2$.

Voltmetrul fiind ideal ($R_V \to \infty$) , nu consumă curent , deci va arăta această tensiune .

În cazul mai multor spiţe , roata este echivalentă cu mai multe surse de tensiuni egale E conectate în *paralel* (o bornă comună în ax şi cealaltă la periferie pe obadă), deci voltmetrul va arăta tot E , la fel ca şi în cazul discului plin. Deosebirea va fi în rezistenţa internă a generatorului, deci în valoarea curentului debitat pe o sarcină externă .

În cazul unei singure spiţe rezistenţa internă va fi dată de rezistenţa spiţei plus contribuţia obadei. în cazul mai multor spiţe, rezistenţa internă echivalentă va fi mai mică, iar în cazul discului (de aceeaşi grosime) va fi şi mai mică .

(*) 4.1.20. ***Prin înfăşurarea unui solenoid de lungime*** ℓ ***, cu*** N ***spire, trece un curent care se anulează după legea*** $I = I_0 - At$. ***În interiorul solenoidului se află un inel transversal de arie*** S ***şi rezistenţă electrică*** R. ***Calculaţi forţa exercitată pe unitatea de lungime a inelului .***

Rezolvare. Inelul îmbrăţişează fluxul variabil :

$$\Phi = BS = (\mu NI / \ell)\, S = (\mu N / \ell)\,(I_0 - At)S\,, \qquad (1)$$

deci în el se induce o t.e.m. şi un curent :

$$E = -\,d\Phi / dt = (\mu / \ell)NAS\,,\quad i = E / R = \mu NAS / (\ell R)\,. \qquad (2)$$

Asupra unui ***element*** de inel ds va acţiona forţa electromagnetică : $d\vec{F} = i\,d\vec{r} \times \vec{B}$, $dF = i\,ds \cdot B$, $(|d\vec{r}\,| = ds)$, (3) orientată radial şi în cazul nostru *centrifug*, deci inelul va fi întins cu forţe pe unitatea de lungime :

$$f = dF / ds = iB = (\mu N / \ell)^2\,(S / R)\,A(I_0 - At)\,. \qquad (4)$$

Problema se poate rezolva şi fără a folosi calculul diferenţial. Trebuie să ştim că variaţia unei funcţii *liniare* (de gradul întâi) este

$$y = ax + b \;\rightarrow\; \Delta y = a\,\Delta x\,, \qquad (5)$$

căci în adevăr, $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) = a\Delta x\,.$$

În cazul nostru : $\Delta I = \Delta(I_0 - At) = -A\Delta t$,

deci $\langle E \rangle = -\,\Delta\Phi / \Delta t = -\,\Delta[(\mu NI / \ell)S]\ : \Delta t =$

$= -\,(\mu NS / \ell)\,\Delta I : \Delta t = \mu NSA / \ell = \text{const} = E$.

Luăm apoi un *element* foarte mic de inel Δs , calculăm forţa electromagnetică $i\Delta s \cdot B$ şi o raportăm la lungimea Δs , etc.

(**) 4.1.21. ***O bară conductoare se roteşte neuniform în jurul unei axe ce trece prin punctul care împarte bara în segmentele*** $\ell_1 = 0{,}50$ m , $\ell_2 = 1{,}00$ m ***şi este perpendiculară pe bară, într-un câmp magnetic , paralel cu axa de rotaţie, de inducţie*** $B = 10$ mT . ***Aflaţi t.e.m. indusă între capetele barei în momentul când viteza unghiulară a barei este*** $\omega = 20$ rad/s .

Rezolvare. În cele două segmente $\ell_{1,2}$ se induc t.e.m. de sensuri *opuse* . Să considerăm mai întâi , de exemplu, segmentul ℓ_2 .

Într-un timp *infinitezimal* dt bara se roteşte cu unghiul *infinitezimal* $d\theta$ şi segmentul ℓ_2 mătură aria *elementară* :

$$dS = (1/2)\,\ell_2 ds = (1/2)\,\ell_2 \cdot \ell_2 d\theta = (1/2)\,\ell_2^2\, d\theta\,.$$

Conform *legii* ***inducţiei*** : $E_2 = -\,d\Phi/dt = -\,B dS/dt =$

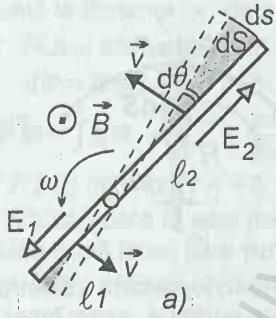
$$= -\,(B\ell_2^2/2)d\theta : dt = -\,(1/2)\,B\ell_2^2\omega\,,(d\theta/dt = \omega)\,. \quad (2)$$

Analog, în celălalt segment : $E_1 = -\,(1/2)\,B\ell_1^2\omega\,,$ (3)

de unde t.e.m. totală între capetele barei :

$$E_2 - E_1 = (1/2)\,B\omega(\ell_1^2 - \ell_2^2) = -\,75\ \text{mV}\,. \quad (4)$$

Fig.4.1.21



Rezultatul se poate obţine şi fără folosirea diferenţialelor. Facem acelaşi raţionament ca mai sus, luând întâi *variaţii foarte mici*, care descresc către zero, Δs , $\Delta\theta$, Δt , $\Delta\Phi$ şi calculăm întâi t.e.m. medie $\langle E \rangle = -\,\Delta\Phi/\Delta t$, etc.

Se poate judeca şi altfel, folosind *calculul* ***integral*** . Luăm un ***element*** de bară dr la distanţa r de axa de rotaţie. El are viteza ωr şi în el se induce t.e.m. *elementară* :

$$dE = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{r} = vB\, dr = B\omega\, r\, dr\,. \quad (5)$$

Însumăm (integrăm) pe segmentul $(0\,,\,\ell_2)$:

$$E_2 = \int_0^{\ell_2} B\omega r\, dr = \frac{1}{2} B\omega \ell_2^2\,, \quad (6)$$

la fel pentru segmentul ℓ_1 şi regăsim rezultatul (4).

** **4.1.22.** ***Un disc metalic de rază*** R = 50 mm ***se roteşte cu turaţia*** n = 4,0 rot/s ***într-un plan perpendicular pe un câmp magnetic de inducţie*** B = 0,10 T . ***a) Aflaţi t.e.m.indusă între contactele glisante din figură . b) Dar dacă*** B = 0 ***?***

Rezolvare. a) Într-un timp *infinit mic* dt raza conductoare CP se va deplasa *infinit* de *puţin* măturând un unghi *infinit mic* $d\theta$ şi o arie *infinit mică* $dS = (1/2)\,R \cdot R ds\,.$ (1)

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

Conform *legii* ***inducţiei*** : $E = -d\Phi/dt = -BdS/dt =$

$$= -B\,(1/2)\,R^2 d\theta/dt\,, \qquad (2)$$

dar $$d\theta/dt = \omega = 2\pi n\,, \qquad (3)$$

deci $$E = -\pi n B R^2 = -3{,}14\ \text{mV}\,. \qquad (4)$$

Rezultatul se poate obţine şi fără calculul diferenţial luând ***elemente*** *foarte mici*, care descresc către zero : ΔS , $\Delta\theta$, Δt , $\Delta\Phi$ şi calculând întâi valoarea *medie* $\langle E \rangle = -\Delta\Phi/\Delta t$, etc.

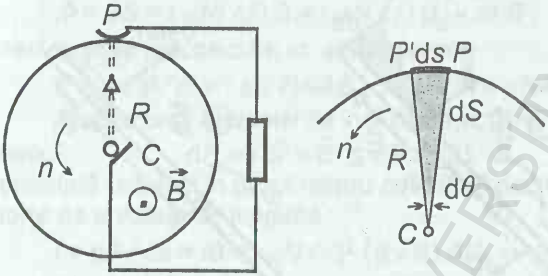


Fig.4.1.22

b) Datorită *rotaţiei*, purtătorii de sarcină - electronii - se vor redistribui, deplasându-se spre periferie, astfel încât va apare un câmp electric orientat radial *centrifug*, de la centrul cercului spre periferie (electronii au sarcină *negativă* !). Acest câmp electric acţionează asupra electronilor *centripet*, obligându-i la mişcarea *circulară* a discului, şi conform *principiului II* al dinamicii :

$$F = e\,E = ma_n = m\omega^2 r\,,\ E(r) = (m/e)\,\omega^2 r\,. \qquad (5)$$

Diferenţa de potenţial dintre centrul discului şi periferie este atunci:

$$U = \int_0^R E(r)\,dr = \int_0^R \frac{m}{e}\,\omega^2 r\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{m}{e}\,\omega^2 R^2 = 4{,}5\ \text{pV}\,. \qquad (6)$$

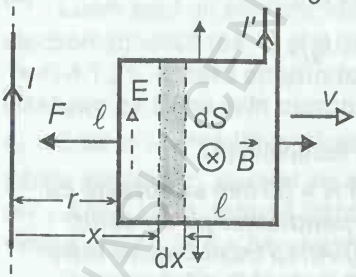


Fig.4.1.23

**** 4.1.23.** ***În montajul din figură se dau :*** I = 10,0 A , I' = 20,0 A , ℓ = 6,0 cm , r = 2,00 cm . ***Aflaţi : a) forţa exercitată asupra cadrului, b) fluxul magnetic prin cadru când*** I' = 0 , ***c) t.e.m. indusă în cadru dacă acesta are viteza instantanee*** v = 2,0 m/s ***spre dreapta, d) sarcina electrică care ar curge prin cadru dacă distanţa*** r ***devine de*** n = 5,0 ori ***mai mare, rezistenţa cadrului fiind*** R = = 1,00 Ω (I' = 0).

Rezolvare. a) $$\vec{F} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}\,, \qquad (1)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

asupra laturii proximale acţionează o forţă de atracţie, iar asupra laturii distale, o forţă de respingere . Asupra celorlalte două laturi, perpendiculare pe *l*, acţionează forţe distribuite , egale în modul dar de sensuri opuse, care caută să întindă cadrul şi dau rezultantă zero. Prin urmare, forţa rezultantă este *atractivă* :

$$F = I'\ell \cdot \mu I : (2\pi r) - I'\ell \cdot \mu I : [2\pi(r+\ell)] =$$

$$= [\mu / (2\pi)]\, I I' \cdot \ell^2 : [r(r+\ell)] = 90\ \mu\text{N} . \qquad (2)$$

b) Considerăm o arie *elementară* dS de forma unei fâşii paralele cu I , situată la distanţa x , deci de grosime *infinit mică* dx:

d$S = \ell\ \mathrm{d}x$. Fluxul *elementar* prin această arie *elementară* :

$$\mathrm{d}\Phi = B\ \mathrm{d}S = [\mu I / (2\pi x)]\ \ell\ \mathrm{d}x , \qquad (3)$$

prin integrare : $\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_r^{r+\ell} \frac{\mu I \ell}{2\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu I \ell}{2\pi}\int_r^{r+\ell} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$

$$= [\mu I \ell / (2\pi)]\ \ln[(r+\ell)/r] = 0{,}166\ \mu\text{Wb} . \qquad (4)$$

c) T.e.m. indusă apare în cele două laturi paralele cu l şi nu se induce în celelalte două laturi care ***nu*** taie linii de câmp, deci

$$E = vB(r)\,\ell - vB(r+\ell)\,\ell = v\{\mu I : (2\pi r) - \mu I : [2\pi(r+\ell)]\}\,\ell =$$

$$= [\mu I / (2\pi)]\ \cdot \{\ell^2 : [r(r+\ell)]\}\, v = 9{,}0\ \mu\text{V} . \qquad (5)$$

Se poate aplica şi cealaltă lege : $E = -\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t =$

$$= -\frac{\mu I \ell}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{r+\ell}{r} = -\frac{\mu I \ell}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln\frac{r+\ell}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} =$$

$$= -\frac{\mu I \ell}{2\pi}\left[\frac{1}{r+\ell} - \frac{1}{r}\right]\cdot v = \frac{\mu I}{2\pi}\,\frac{\ell^2}{r(r+\ell)}\,v .$$

d) Conform formulei (37) *Breviar* : $q = -\Delta\Phi / R =$

$$= -\frac{1}{R}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = -\frac{\mu I \ell}{2\pi R}\left[\ln\frac{r'+\ell}{r'} - \ln\frac{r+\ell}{r}\right] =$$

$$= [\mu I \ell : (2\pi R)]\ln[n(r+\ell) : (nr+\ell)] = 0{,}11\ \mu\text{C} . \qquad (6)$$

**** 4.1.24.** ***Un multiplicator fix cu*** N spire ***de rază*** R ***se află într-un câmp magnetic omogen a cărui inducţie*** B ***formează un unghi*** α ***cu normala la multiplicator . Ştiind că în multiplicator se induce o t.e.m.*** $E = -A\sqrt{B}$ (A = const) , ***aflaţi legea de variaţie în timp a inducţiei magnetice*** B(t) ***şi a t.e.m.*** E(t), ***ştiind că la momentul iniţial*** $t = 0$ ***avem*** $E = 0$.

Rezolvare. Conform *legii* ***inducţiei*** : $E = -A\sqrt{B} = -\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t =$

$$= -\mathrm{d}(NBS\cos\alpha) / \mathrm{d}t = -NS\cos\alpha\ \mathrm{d}B / \mathrm{d}t . \qquad (1)$$

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ

Separăm variabilele şi integrăm : $Adt = (NS\cos\alpha)\, dB/\sqrt{B}$,

$$\int Adt = At = NS\cos\alpha \int \frac{dB}{\sqrt{B}} = 2NS\cos\alpha\ \sqrt{B} + C\ ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia iniţială*: la $t = 0$ avem $E = 0$ şi $B = 0$; rezultă $C = 0$, deci

$At = 2NS\cos\alpha\ \sqrt{B}$, $B = A^2 t^2 : (2NS\cos\alpha)^2$.(2)

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t A\ dt = At = NS\cos\alpha \int_0^B \frac{dB}{\sqrt{B}} = 2NS\cos\alpha\ \sqrt{B}\ .$$

Acum rezultă $$E = -A\sqrt{B} = -\frac{A^2}{2NS\cos\alpha}\, t\ . \qquad (3)$$

4.2. CÂMP ELECTRIC INDUS

4.2.1. ***Un cadru metalic pătratic de latură*** $\ell = 20$ mm ***este străpuns perpendicular de un câmp de inducţie*** $B = b\,t$, $b = 20$ mT/s ***. Aflaţi intensitatea câmpului electric din cadru .***

Rezolvare. În cadru se induce o t.e.m.

$$E = -\Delta\Phi/\Delta t = -\ell^2\, \Delta B/\Delta t = -\ell^2 b \qquad (1)$$

şi va trece curentul corespunzător $I = E/R$.

Dacă prin cadru trece o sarcină q , atunci putem scrie *bilanţul energetic* : $E\,q = \sum q\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} \rightarrow E = -\Delta\Phi/\Delta t = \sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$. (2)

Reţinem acest rezultat pe care îl vom folosi şi la alte probleme. Nu confundaţi ***tensiunea*** în general $\sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$ cu cazul particular al ***diferenţei*** de potenţial din electrostatică .

În cazul nostru, câmpul electric este acelaşi în fiecare latură :

$$\sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = 4E\ell = -\Delta\Phi/\Delta t = -\ell^2 b\ ,$$

$$E = -\ell b/4 = -10\ \text{kV/m}\ . \qquad (3)$$

Semnul minus are aceeaşi semnificaţie de convenţie de semn ca şi pentru t.e.m. indusă , conform *regulii lui* ***Lenz*** .

4.2.2. ***Un ion cu sarcina*** q ***şi masa*** m ***se află în interiorul unui solenoid la distanţa*** r ***de axă. Într-un timp foarte scurt*** Δt ***inducţia magnetică din solenoid creşte de la*** B ***la*** $B + \Delta B$ ***.***

Evaluaţi energia cinetică a ionului. *Aplicaţie :* proton ,r = 10 mm, ΔB = 100 mT .

Rezolvare. Vom folosi rezultatele problemei precedente 4.2.1. Luăm un contur circular de rază *r* cu axa de-a lungul axei solenoidului. În virtutea *simetriei* ***cilindrice***, câmpul *E* de-a lungul acestui contur este constant în modul, deci

$$\sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = E \cdot 2\pi r = E = -\Delta \Phi / \Delta t = -\pi r^2 \Delta B / \Delta t ,$$

$$E = -(1/2)\, r \Delta B / \Delta t . \qquad (1)$$

Sub acţiunea acestui câmp ionul capătă acceleraţia $a = qE/m$ şi pentru intervalul scurt Δt capătă viteza $v = a\Delta t$, deci capătă energia cinetică : $E_c = (1/2)\, mv^2 = (1/2)\, m(a\Delta t)^2 =$

$$= [1/(8m)]\, (q\, r\, \Delta B)^2 = 1{,}9 \text{ aJ} = 12 \text{ eV} . \qquad (2)$$

4.2.3. ***Prin secţiunea unui miez cilindric din fier trece un câmp magnetic uniform care produce un flux*** $\Phi = \varphi^* t$ ***, unde*** $\varphi^* = 1{,}0\ \mu$Wb/s. ***Peste miez este trecut un inel dielectric de rază*** R = 5,0 cm. ***Aflaţi câmpul electric din dielectric .***

Rezolvare. Folosim rezultatele problemelor precedente . În virtutea *simetriei* ***cilindrice*** câmpul electric în inelul dielectric este constant în modul, deci

$$\sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = E \cdot 2\pi R = E = -\Delta \Phi / \Delta t = -\varphi^* , \qquad (1)$$

$$E = -\varphi^* : (2\pi R) = -3{,}18\ \mu\text{V/m} . \qquad (2)$$

4.2.4. ***Într-un solenoid, la distanţa*** r *de axă,* ***se află în repaus o particulă de masă*** m ***şi sarcină*** q ***. Într-un timp foarte scurt*** Δt ***câmpul magnetic din solenoid creşte de la zero până la o valoare finală constantă*** B_0 ***. Neglijând gravitaţia şi rezistenţa aerului, aflaţi viteza şi traiectoria particulei în regim staţionar.*** *Aplicaţie: proton ,* r = 10 mm, B_0 = 0,10 T.

Rezolvare. Folosim rezultatele problemei 4.2.2:

$$E = -(1/2)\, r \Delta B / \Delta t , \quad v = a\Delta t =$$

$$= (qE/m)\Delta t = -(1/)\, (rq/m)\, B_0 =$$

$$= -48 \text{ km/s} . \qquad (1)$$

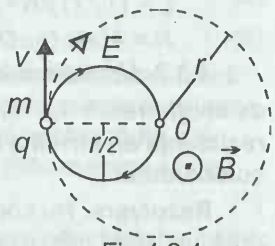


Fig.4.2.4

Particula câştigă această viteză într-un timp foarte scurt, după care câmpul în solenoid rămâne constant B_0 şi particula va descrie un cerc cu raza : $R = m|v| : (qB_0) = r/2$; (2) particula va descrie cercul mic din figură.

** 4.2.5. ***Prin secţiunea unui miez cilindric din fier trece un câmp magnetic care produce un flux* $\Phi = \Phi_0 \cos\omega t$ *. Peste miez este trecut un inel dielectric de rază* R *. Aflaţi câmpul electric din dielectric. Se dau :* $\Phi_0 = 10$ μWb , $\nu = 5{,}0$ kHz, R = 5,0 cm *.*

Rezolvare. Avem t.e.m. $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = E = -\frac{d\Phi}{dt} =$

$$= -\frac{d}{dt}(\Phi_0 \cos\omega t) = \omega \Phi_0 \sin\omega t\,, \qquad (1)$$

dar în cazul nostru "circulaţia" câmpului indus $\vec{E}$ se calculează imediat, deoarece inelul dielectric reprezintă chiar o *linie de câmp* şi în virtutea *simetriei cilindrice* E este constant pe această linie de câmp, deci ($|d\vec{r}| = ds$) :

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = \oint E\, ds = E \oint ds = E \cdot 2\pi R\,, \qquad (2)$$

deci $E = [1 : (2\pi R)]\, \omega \Phi_0 \sin\omega t = 1{,}00 \sin(10^4\, \pi\, t)$. V/m . (3)

4.3. INDUCTANŢA

4.3.1. ***Un solenoid cu aer de diametru*** D = 4,0 cm ***şi de inductanţă*** L = 2,00 mH, ***are înfăşurarea dintr-un singur strat din sârmă de diametru*** d = 0,40 mm ***, cu spirele strâns lipite între ele . Aflaţi numărul de spire.***

Rezolvare. Inductanţa unui solenoid :

$$L = (1/\ell)\, \mu N^2 S\,, \quad \text{dar} \quad \ell = Nd\,, \qquad (1)$$

$$N = 4Ld : (\pi \mu D^2) = 500 \text{ spire}\,. \qquad (2)$$

4.3.2. ***Un solenoid cu aer este bobinat cu sârmă de cupru de secţiune*** s = 1,0 mm^2. ***Lungimea solenoidului*** ℓ = 20 cm ***şi rezistenţa electrică a înfăşurării*** R = 1,7 Ω ***. Aflaţi inductanţa solenoidului .***

Rezolvare. Nu confundaţi lungimea solenoidului ℓ care reprezintă lungimea *miezului* (feromagnetic) sau lungimea porţiunii bobinate , cu lungimea sârmei (a conductorului) cu care este bobinat solenoidul .

$$L = (1/\ell)\, \mu N^2 S\,, \quad \text{dar} \quad R = \rho\, \ell_c / s\,, \quad \ell_c = N \cdot \pi D\,, \qquad (1)$$

$$L = (1/\ell)\,\mu N^2 \pi D^2/4 = [\pi\mu/(4\ell)]\,(ND)^2 = [\pi\mu/(4\ell)](\ell_c/\pi)^2 =$$

$$= [\mu : (4\pi\ell)]\,(Rs/\rho)^2 = 5{,}0 \text{ mH} . \qquad (2)$$

4.3.3. ***Un solenoid lung, bobinat uniform, are o priză mediană, astfel încât inductanţele celor două secţiuni sunt*** $L_1 = 90$ mH ***şi*** $L_2 = 160$ mH . ***Aflaţi inductanţa întregului solenoid şi raportul numărului de spire ale secţiunilor în ipoteza : solenoid cu a) aer, b) miez feromagnetic .***

Rezolvare. a) Deoarece $L_{1,2}$ sunt comparabile între ele şi solenoidul este lung, fiecare secţiune va fi la rândul ei un solenoid, deci

$$L_{1,2} = (1/\ell_{1,2})\,\mu_o N_{1,2}^2 S ,$$

$$L = [1/(\ell_1 + \ell_2)]\,\mu_o (N_1 + N_2)^2 S . \qquad (1)$$

Deoarece solenoidul este bobinat ***uniform*** :

$$N_1 : \ell_1 = N_2 : \ell_2 = (N_1 + N_2) : (\ell_1 + \ell_2) = n , \qquad (2)$$

unde *n* este *numărul de spire pe unitatea de lungime* a miezului . Atunci inductanţele (1) se scriu :

$$L_{1,2} = \mu_o N_{1,2}\, n\, S , \quad L = \mu_0 (N_1 + N_2)\, n\, S = L_1 + L_2 = 250 \text{ mH}, \qquad (3)$$

$$N_1 / N_2 = L_1 / L_2 = 0{,}56 . \qquad (4)$$

b) Observăm că în cazul solenoidului cu aer lungimea ℓ reprezintă lungimea *înfăşurării*, iar în cazul solenoidului cu miez feromagnetic (care canalizează liniile de câmp sau fluxul magnetic) lungimea ℓ reprezintă lungimea acestui *miez* , deci

$$L_{1,2} = (1/\ell)\,\mu N_{1,2}^2 S , \quad L = (1/\ell)\,\mu (N_1 + N_2)^2 S =$$

$$= (1/\ell)\,\mu N_1^2 S + (1/\ell)\,\mu N_2^2 S + 2\cdot(1/\ell)\,\mu N_1 N_2 S =$$

$$= L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2} = \left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2}\right)^2 = 490 \text{ mH} , \qquad (5)$$

$$N_1 / N_2 = \sqrt{L_1 / L_2} = 0{,}75 . \qquad (6)$$

Observăm că în cazul cuplajului *maxim* a două bobine, când *toate* liniile de câmp ale unei bobine străbat *toate* spirele celeilalte bobine (de exemplu, bobinate pe acelaşi miez feromagnetic sau bobinate una peste alta), inductanţa *mutuală* este *maximă* şi are valoarea :

$$M_{max} = \sqrt{L_1 L_2} , \qquad (7)$$

ca în problema noastră , legea de compunere a inductanţelor în serie fiind :

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \qquad (8)$$

(unde semnul - se referă la cazul când fluxurile bobinelor sunt de sensuri *opuse*) .

4.3.4. ***Câte spire are o bobină de inductanţă*** $L = 1{,}00$ mH , ***dacă la un curent*** $I = 1{,}00$ A ***fluxul magnetic prin secţiunea*** **miezului** ***bobinei este*** $\Phi_1 = 2{,}00$ μWb ***?***

Rezolvare. Nu confundaţi fluxul îmbrăţişat de un *circuit*, de exemplu, de o bobină, deci de ***toate spirele*** bobinei, cu fluxul prin **miezul** bobinei, deci îmbrăţişat de o ***singură spiră*** .

*Prin definiţie , **inductanţa** unui circuit, de exemplu, a unei bobine , este* def

$$L = \Phi : I , \qquad (1)$$

unde Φ este fluxul îmbrăţişat de circuit (de bobină, deci de ***toate*** *spirele* bobinei) la trecerea unui curent I prin circuit .

Prin urmare în cazul nostru :

$$\Phi = N\,\Phi_1 , \quad \Phi = L\,I \rightarrow \quad N = L\,I : \Phi_1 = 500 \text{ spire.} \qquad (2)$$

4.3.5. ***Pe un solenoid de lungime*** $\ell = 0{,}20$ m , ***secţiune*** $S = 20$ cm^2 , ***număr de spire*** $N_1 = 250$, ***străbătute de un curent*** $I_1 = 1{,}0$ A , ***cu miez de fier cu permeabilitatea relativă*** $\mu_r = 400$, ***sunt înfăşurate*** $N_2 = 25$ spire, ***formând un circuit deschis. Aflaţi t.e.m. medii induse în cele două înfăşurări , dacă curentul*** I_1 ***se anulează într-un timp*** $\Delta t = 1{,}0$ ms .

Rezolvare. Inductanţele celor două înfăşurări sunt :

$$L_1 = (1/\ell)\,\mu N_1^2 S = 314 \text{ mH} , \; L_2 = (1/\ell)\,\mu N_2^2 S = 3{,}14 \text{ mH} . \qquad (1)$$

Fluxurile iniţiale îmbrăţişate de cele două înfăşurări sunt :

$$\Phi_1 = N_1 B_1 S = L_1 I_1 = 314 \text{ mWb} , \qquad (2)$$

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S = (1/\ell)\,\mu N_1 N_2 S I_1 = M I_1 = 31{,}4 \text{ mWb} ,$$

unde M este inductanţa ***mutuală*** a celor două bobine :

$$M = (1/\ell)\,\mu N_1 N_2 S = \sqrt{L_1 L_2} = 31{,}4 \text{ mH} . \qquad (3)$$

Deoarece *toate* liniile de câmp ale câmpului produs de prima bobină sunt îmbrăţişate de *toate* spirele celeilalte bobine, cuplajul este *maxim* posibil şi în acest caz inductanţa mutuală are expresia (3) , aşa cum am dedus-o mai sus .

Deoarece secundarul este un circuit deschis, prin el nu trece curent. Altfel lucrurile s-ar complica fiindcă curentul din secundar, fiind variabil, ar produce la rândul lui un câmp magnetic şi deci flux variabil, care ar induce în circuite t.e.m. de inducţie corespunzătoare.

T.e.m. medie autoindusă în primar este $\bar{E}_1 = -\Delta\Phi_1 / \Delta t =$

$$= -L_1 \Delta I_1 / \Delta t = L_1 I_1 / \Delta t = \Phi_1 / \Delta t = 314 \text{ V} . \qquad (4)$$

T.e.m. medie indusă în secundar este

$$\bar{E}_2 = -\Delta\Phi_2 / \Delta t = -M\,\Delta I_1 / \Delta t = MI_1 / \Delta t = 31{,}4\ \text{V}. \quad (5)$$

$$\bar{E}_1 : \bar{E}_2 = L_1 / M = \sqrt{L_1 / L_2} = N_1 / N_2 = 10. \quad (6)$$

4.4. ENERGIA MAGNETICĂ

4.4.1. ***Câte amper-spire*** NI *(*tensiune magnetomotoare $F_m = NI$) ***sunt necesare pentru a crea în interiorul unui solenoid de lungime*** $\ell = 25$ cm ***şi permeabilitate relativă*** $\mu_r = 500$ ***o densitate de energie magnetică*** $w = 314$ J/m^3 ***?***

Rezolvare. Să deducem formula *densităţii de energie* (energia din unitatea de volum). Luăm cazul solenoidului pentru care cunoaştem formulele pentru câmp şi pentru inductanţă, de asemenea câmpul din interiorul solenoidului este uniform şi omogen, iar în exteriorul solenoidului este practic nul (neglijăm efectele de *margine*, considerând un solenoid *ideal*, suficient de lung).

Energia unei bobine (a *câmpului* magnetic al bobinei) este binecunoscută : $W = (1/2)LI^2 = (1/2)\Phi I = (1/2)\Phi^2 / L$. (1)

În cazul solenoidului: $L = (1/\ell)\,\mu N^2 S$, $B = \mu NI / \ell$. (2)

Rezultă : $w = W / V = W / (S\ell) =$

$= (1/2)LI^2 / (S\ell) = (1/2)\,\mu N^2 I^2 / \ell^2 = B^2 / (2\mu)$, (3) ultima formulă merită a fi reţinută : *oriunde în spaţiu există câmp magnetic, acolo există energie magnetică distribuită în spaţiu cu densitatea* $w_m = B^2 / (2\mu)$, aşa cum *oriunde în spaţiu există câmp electric, acolo există energie electrică distribuită cu densitatea* $w_e = (1/2)\,\varepsilon E^2$. Aceste formule sunt ***universale***.

$$B = \mu NI / \ell \rightarrow NI = \ell B / \mu = (\ell / \mu)\sqrt{2\mu w} = \ell\sqrt{2w / \mu} = 250\ \text{As}. \quad (4)$$

4.4.2. ***Un inel de fier de lungime*** $\ell = 2{,}50$ m ***are un întrefier (interstiţiu) de lungime*** $\ell_0 = 1{,}00$ cm ***şi o înfăşurare cu*** $N = 1000$ spire ***prin care trece un curent*** $I = 1{,}50$ A, ***producând o inducţie***

magnetică (medie) în întrefier $B_0 = 1{,}26$ T. ***Aflaţi : a) permeabilitatea relativă a fierului în aceste condiţii, b) densităţile de energie magnetică în întrefier şi în fier .***

Rezolvare. a) Legea unui *circuit magnetic* simplu (***Hopkinson***), analogă legii lui ***Ohm*** :

$$\Phi = F_m : R_m , \qquad (1)$$

unde F_m - tensiune (forţă) magnetomotoare , R_m - ***reluctanţa*** circuitului magnetic (rezistenţa magnetică).

$F_m = NI$ - număr de amper-spire ,

$R_m = \ell / (\mu S)$ pentru un conductor magnetic simplu . (2)

Reluctanţele se compun la fel ca rezistenţele electrice .

În cazul inelului cu întrefier reluctanţa va fi :

$$R_m = R_{Fe} + R_{aer} = \ell / (\mu S) + \ell_o / (\mu_o S) , \qquad (3)$$

unde am luat aceeaşi secţiune S, neglijând dispersia liniilor de câmp în întrefier .

Fluxul magnetic este acelaşi în fier şi în întrefier :

$$\Phi = BS = B_o S = \frac{NI}{\frac{1}{\mu_o S}\left(\frac{\ell}{\mu_r} + \ell_o\right)} \rightarrow \mu_r = \frac{B_o \ell}{\mu_o NI - B_o \ell_o} = 500. \qquad (4)$$

b) $w_o = B_o^2 / (2\mu_o) = 0{,}63$ MJ/m^3 , (5)

$w = B_o^2 / (2\mu) = w_o / \mu_r = 1{,}26$ kJ/m^3 . (6)

4.4.3. ***În montajul din figură inductanţa este ideală cu*** $L =$ $= 2{,}00$ mH , $R_1 = 10{,}0\ \Omega$, $R_2 = 9{,}0\ \Omega$, $E = 10{,}0$ V , $r = 1{,}00\ \Omega$. ***Aflaţi căldura care se degajă după deschiderea întrerupătorului şi unde se degajă ea .***

Rezolvare. Inductanţa fiind ideală (deci cu rezistenţa proprie zero) curentul va trece prin inductanţă şi nu va trece prin R_1 legat în derivaţie pe inductanţă, deci curentul va fi

$$I = E : (r + R_2) . \qquad (1)$$

Bobina va înmagazina în câmpul său magnetic energia

$$W = (1/2)\, L\, I^2 . \qquad (2)$$

Deschizând întrerupătorul, prin baterie şi prin R_2 nu va mai trece curent, în schimb în circuitul LR_1 va trece curent de autoinducţie prin care energia magnetică a bobinei se va disipa sub formă de căldură pe R_1 , deci

$Q = (1/2)\, L\, I^2 = (1/2)\, L\, [E : (r + R_1)]^2 = 1{,}00$ mJ , (3)

pe rezistorul R_1 .

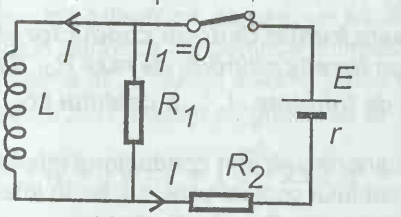


Fig.4.4.3

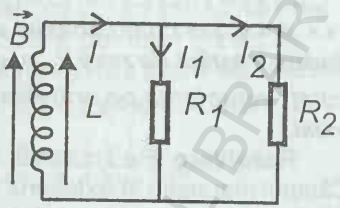


Fig.4.4.4

4.4.4. ***În montajul din figură se cunosc*** $R_{1,2}$, L ***(bobina este ideală),*** $\vec{B}$ ***este un câmp exterior. Imediat după înlăturarea câmpului magnetic exterior*** $\vec{B}$ ***, curentul prin*** R_1 ***este*** I_1 ***. Aflaţi căldurile degajate în rezistoare.*** *Aplicaţie :* L = 0,10 H , I_1 =1,0 A, $R_1 / R_2 = 3{,}0$.

Rezolvare. Prin înlăturarea câmpului magnetic se induce în bobină o t.e.m. şi va trece un curent I care se bifurcă în rezistoarele $R_{1,2}$: $I_1 = I \cdot R_2 : (R_1 + R_2) \rightarrow I = I_1 \cdot (R_1 + R_2) : R_2 =$

$= I_1 (1 + R_1 / R_2) = 4{,}0$ A . (1)

Ştiind care a fost curentul prin bobină putem afla energia magnetică a bobinei : $W = (1/2)\, L I^2 = Q_1 + Q_2 = 0{,}80$ J . (2)

Această energie se disipă pe cele două rezistoare legate în paralel: dacă tensiunea lor comună instantanee este u , căldurile disipate sunt: $Q_{1,2}^* = u^2 : R_{1,2}$, deci $Q_1 : Q_2 = R_2 : R_1$,

atunci din (2) rezultă : $Q_{1,2} = W \cdot R_{2,1} : (R_1 + R_2) =$

$= (1/2)\, L I^2 \cdot R_{2,1} : (R_1 + R_2) = 0{,}20$ J, respectiv 0,60 J . (3)

4.4.5. ***Un electromagnet de forma unui solenoid are lungimea*** ℓ = 40 cm , ***secţiunea*** S = 25 cm^2 ***şi permeabilitatea relativă*** μ_r = 400 ***şi produce o inducţie*** B = 125,6 mT ***la un curent*** I= 0,25 A . ***Ştiind că la întreruperea curentului acesta ajunge la zero înr-un timp*** Δt = 25 ms , ***calculaţi : a) Numărul de spire, b) Inductanţa solenoidului , c) Tensiunea care apare între două spire vecine, d) Energia magnetică a bobinei .***

Rezolvare. a) $B = \mu N I / \ell \rightarrow N = B\ell : (\mu_o \mu_r I) = 400$. (1)

b) $L = \mu_o \mu_r N^2 S / \ell = 0{,}50$ H. (2)

c) Tensiunea între două spire vecine este t.e.m. de inducţie calculată pentru o singură spiră :

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

$$E_1 = E / N = -(L\,\Delta I / \Delta t) : N = 12{,}5 \text{ mV} . \quad (3)$$

d) $W = (1/2)\, L\, I^2 = 15{,}6 \text{ mJ}$. (4)

**** 4.4.6.** ***Un cablu coaxial este format dintr-un conductor cilindric interior de rază*** R_1 ***şi un înveliş cilindric de rază*** R_2. ***Calculaţi inductanţa pe unitatea de lungime*** , L^* , ***a cablului coaxial.***

Rezolvare. Fie I curentul care circulă prin conductorul interior. Câmpul magnetic în exteriorul cablului coaxial este nul, iar în interior, între conductori, este dat de I : $B = \mu I / (2\pi r)$. (1)

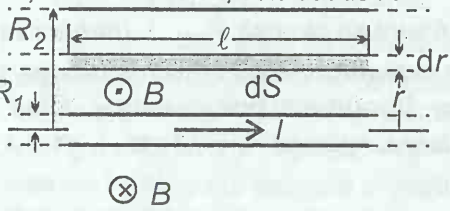


Fig.4.4.6

Putem calcula inductanţa în două moduri :

a) Prin definiţie : $L = \Phi : I$, (2)

unde Φ este fluxul (**total**) îmbrăţişat de circuit, produs de curentul I.

Luăm un segment de cablu de lungime ℓ şi alegem o arie *elementară* sub forma unei fâşii *infinitezimale* , paralelă cu axul cablului, situată în planul radial care trece prin axul cablului la distanţa r de ax şi având o grosime infinit mică dr , $dS = \ell dr$, ca în figură. Fluxul elementar prin această arie elementară este :

$$d\Phi = B\, dS = [\mu I : (2\pi r)]\, \ell\, dr . \quad (3)$$

Acest flux străbate perpendicular aria aleasă. Integrăm acum (3) pe toată suprafaţa din planul radial prin care trece fluxul (adică liniile de câmp) :

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r}\, \ell\, dr = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} , \quad (4)$$

de unde $L = \Phi : I = [\mu \ell / (2\pi)] \ln (R_2 / R_1)$ (5)

(neglijăm efectele de ***margine***, luând un cablu suficient de **lung**).

Inductanţa pe unitatea de lungime a cablului :

$$L^* = L : \ell = [\mu / (2\pi)] \ln (R_2 / R_1) . \quad (6)$$

b) Pe de o parte, **energia** unei bobine este $W = (1/2)\, L\, I^2$. (7)

Pe de altă parte, ştiind densitatea de **energie** magnetică :

$$w = dW : dV = B^2 / (2\mu) , \quad (8)$$

BUCUREŞTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

calculăm energia totală a câmpului magnetic . Ţinând seama de *simetria* ***cilindrică***, alegem un element de volum sub forma unei pături cilindrice concentrice infinitezimale, de rază r şi deci de grosime dr . Volumul acestei pături este egal cu suprafaţa laterală a păturii $2\pi r\ell$ înmulţit cu grosimea dr : $dV = 2\pi r\ell\, dr$. Atunci

$$W = \int w\, dV = \int \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r\ell\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2 2\pi\ell r\, dr =$$

$$= \frac{\mu I^2 \ell}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 \ell}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (9)$$

şi prin identificare cu (7) : $L = 2W : I^2 = [\mu\ell / (2\pi)] \ln (R_2 / R_1)$,

$$L^* = L : \ell = [\mu / (2\pi)] \ln (R_2 / R_1) .$$

*

4.5. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ ŞI MIŞCAREA MECANICĂ

4.5.1. ***Tija din figură, de rezistenţă*** R = 0,20 kW , ***se mişcă orizontal fără frecare cu viteza*** v = 2,0 m/s ***sub acţiunea forţei orizontale*** F = 4,0 N , ***într-un câmp magnetic vertical .Celelalte rezistenţe sunt neglijabile . Aflaţi curentul prin tijă .***

Rezolvare. T.e.m. indusă şi curentul indus în tijă sunt :

$$E = \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\vec{\ell} = v B \ell , \quad I = E : R = v B \ell : R . \qquad (1)$$

Asupra tijei străbătute de curentul I acţionează forţa electromagnetică :

$$\vec{F}_{em} = I\vec{\ell}\times\vec{B} , \quad F_{em} = I\ell B , \qquad (2)$$

care trebuie să fie în echilibru cu forţa aplicată F pentru a avea o mişcare *uniformă* (v = const) :

$$F = F_{em} = I\ell B = I\ell \cdot R\, I : (v\ell) \rightarrow I = \sqrt{Fv/R} = 0{,}20 \text{ A} . \qquad (3)$$

Puterea dezvoltată de forţa aplicată, Fv, se transformă ireversibil în *căldura* disipată pe R (RI^2) (frecări neglijabile, $\Delta E_c = 0$).

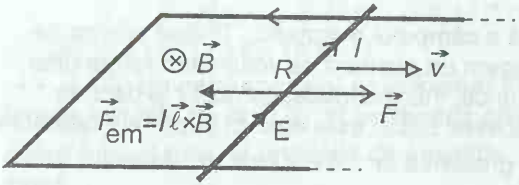


Fig.4.5.1

4.5.2. ***Aflaţi curentul de inducţie*** I ***prin tija de lungime*** ℓ ***şi rezistenţă*** R, ***care lunecă cu viteza*** v ***pe două şine paralele legate la capete pe rezistenţele*** $R_{1,2}$ ***într-un câmp magnetic perpendicular*** B , ***ca în figură .*** *Aplicaţie :* ℓ = 10 cm , R = 0,10 Ω , v = 2,5 m/s , B = 10 mT , R_1 = 6,0 Ω , R_2 = 4,0 Ω .

Rezolvare. În tijă se induce t.e.m. $E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell$, (1)

tija reprezintă o sursă (un generator) cu t.e.m. E şi rezistenţa internă R , debitând pe cele două rezistenţe $R_{1,2}$ legate la bornele A, B ale tijei, deci $I = E : [R + R_1R_2 / (R_1 + R_2)] =$

$= vB\ell : [R + R_1R_2 / (R_1 + R_2)] = 1{,}0$ mA . (2)

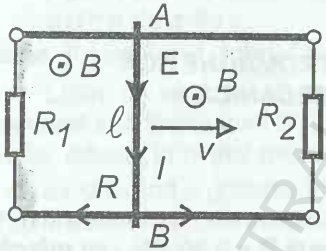


Fig.4.5.2

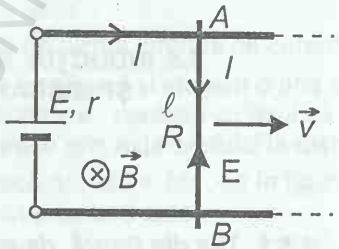


Fig.4.5.3

4.5.3. ***În montajul din figură se dau :*** r = 0,20 Ω , B = 0,10 T, ***rezistenţa firului AB :*** R = 0,10 Ω , ℓ = 10 cm . ***Ştiind că la viteza*** v_0 = 40 m/s ***a tijei curentul din circuit se anulează, aflaţi curentul la viteza*** v = 10 m/s .

Rezolvare. În fir se induce t.e.m. în sensul din figură :

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell \, . \qquad (1)$$

Pentru ochiul de reţea format avem (mergând în sens orar) :

$E - E = I\,(r + R)$, $\qquad I = (E - vB\ell) : (r + R)$. (2)

Dar pentru $v = v_0$ curentul se anulează, deci

$$0 = E - vB\ell \rightarrow E = v_0B\ell \, . \qquad (3)$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Atunci curentul pentru o viteză oarecare :

$I = (E - vB\ell) : (r + R) = (v_0 - v)B\ell : (r + R) = 1{,}0$ A (de la A la B). (4)

4.5.4. ***Cu ce viteză trebuie deplasată bara*** AB ***din figură pentru ca în timpul*** $\tau = 1{,}0$ s ***temperatura conductorului de oţel*** CD ***să crească cu*** $\Delta t = 0{,}10$ grd ***? Sistemul se află într-un câmp magnetic transversal*** $B = 1{,}0$ T ***. Bara şi şinele au rezistenţă neglijabilă, pierderile de căldură sunt neglijabile.***

Rezolvare. T.e.m. indusă şi curentul indus sunt

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell\,, \quad I = E : R = vB\ell : (\rho\ell / S)\,. \tag{1}$$

Pe de altă parte căldura degajată : $W = RI^2\tau = E^2\tau : R =$

$$= (vB\ell)^2\tau : (\rho\ell / S) = Q = mc\Delta t = \delta\ell Sc\Delta t\,, \tag{2}$$

$$v = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{1}{\tau}\rho\delta c\Delta t} = 0{,}14 \text{ m/s}\,. \tag{3}$$

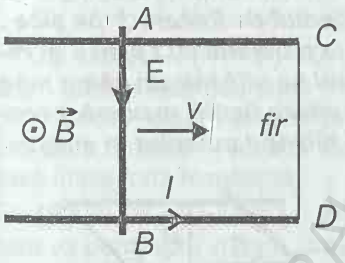


Fig.4.5.4

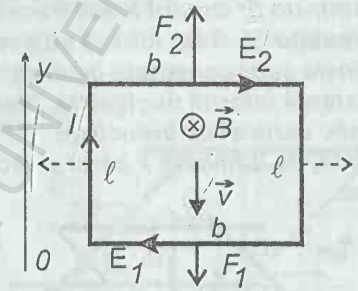


Fig.4.5.5

4.5.5. ***Un cadru dreptunghiular de arie*** S , ***rezistenţă*** R ***şi masă*** m ***cade liber într-un câmp magnetic transversal (orizontal) care variază cu înălţimea după legea*** $B(y) = B_0 + ky$, ***unde*** k ***este o constantă cunoscută . Aflaţi viteza*** **limită** ***(maximă) de cădere liberă a cadrului .***

Rezolvare. Pe măsură ce cadrul cade sub acţiunea forţei de greutate, fluxul îmbrăţişat de cadru scade, deoarece inducţia *B* scade, deci în cadru se induce o t.e.m. E şi un curent *I* cu sensul dat de *regula lui* **Lenz** .

Putem afla E considerând laturile active *b* care taie linii de câmp (laturile ℓ **nu** taie linii de câmp, deci în ele **nu** se induce nimic) .

$$E = E_2 - E_1 = vB(y + \ell)b - vB(y)b =$$

$$= v[B_0 + k(y + \ell) - (B_0 + ky)]\, b = vk\ell_b = vkS\,. \tag{1}$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Asupra fiecărei laturi a cadrului va acţiona o forţă electromagnetică, dar forţele asupra laturilor verticale se echilibrează, fiind egale în modul şi de sensuri opuse . Rămân forţele $F_{1,2}$ asupra laturilor orizontale : $F = F_2 - F_1 = I\,|\vec{b} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)| =$

$$= I\,b\,[B(y + \ell) - B(y)] = I\,b\,k\,\ell = I\,k\,S = \quad (2)$$

$$= (E / R)\,kS = [(kS)^2 / R]\,v\,. \quad (3)$$

La limită, când se atinge viteza *maximă* ***constantă***, de cădere liberă, acceleraţia se anulează, deci forţa rezultantă se anulează şi forţa electromagnetică (3) echilibrează forţa de greutate a cadrului :

$$[(kS)^2 / R]\,v_o = mg \;\rightarrow\; v_o = mgR : (kS)^2\,. \quad (4)$$

4.5.6. ***Pe două şine orizontale paralele, conductoare, de rezistenţă neglijabilă şi cu distanţa*** ℓ ***între ele, lunecă o bară transversală conductoare de masă*** m ***şi rezistenţă*** R, ***legată printr-un fir izolant ideal, trecut peste un scripete ideal, de o greutate*** G . ***Bara lunecă cu coeficientul de frecare*** f ***pe şine . Şinele sunt conectate la un capăt la o baterie cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţă internă neglijabilă. Sistemul se află într-un câmp magnetic vertical de inducţie*** B . ***Aflaţi viteza limită, maximă, constantă, de lunecare a barei şi faceţi bilanţul*** puterilor ***în acest caz.***

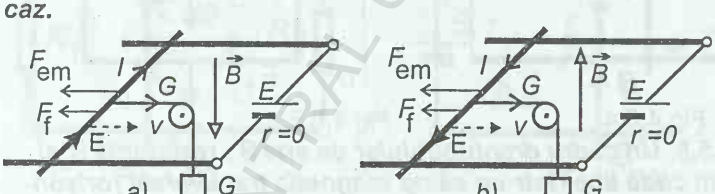


Fig.4.5.6 a, b

Rezolvare. a) Iniţial când bara este în repaus asupra ei acţionează forţa rezultantă : $F = G - fmg + (E / R)\,\ell B\,.$ (1)

Dacă $F > 0$, bara va porni spre dreapta şi se va induce în bară t.e.m. $E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell$ (2)

şi atunci curentul şi forţa electromagnetică vor fi

$I = (E - E) : R\,, \qquad F_{em} = I\,\ell\,B = [(E - E) : R]\,\ell\,B\,.$ (3)

Pe măsură ce creşte viteza, creşte E şi F_{em} până când forţele îşi fac echilibru şi bara se va mişca *uniform* :

$$G - fmg - [(E - E) : R]\,\ell\,B = 0\,, \quad (4)$$

$$E = E + [R / (\ell B)]\,(G - fmg)\,, \qquad E = vB\ell\,,$$

$v = [E\,\ell B + R(G - fmg)] : (\ell^2 B^2)$. (5)

Înmulţim ecuaţia (4) cu viteza :

$G\,v - fmg\,v - [(E - E) : R]\,v\,B\,\ell = 0$,

$G\,v = fmg\,v + [(E - E) : R]\,(E - E) + [(E - E) : R]\,E$,

$G\,v = fmg\,v + R\,I^2 + E\,I$, (6)

adică lucrul mecanic al forţei de greutate $Gv\Delta t$ (scăderea energiei potenţiale) care intră în sistem se regăseşte sub formă de căldură disipată prin frecare $fmg\,v\,\Delta t$ şi în rezistor $R\,I^2\Delta t$ plus energia absorbită de baterie $E\,I\Delta t$ care este *consumatoare* (curentul trece în sens invers) .

b) În acest caz, iniţial forţa rezultantă este

$F = G - fmg - (E / R)\,\ell\,B.$ (7)

Dacă $F > 0$, bara va porni spre dreapta şi obţinem viteza limită din (5) schimbând pe B în $-B$. Bilanţul puterilor va fi

$G\,v - fmg\,v - I\,\ell\,B\,v = 0$, unde $I = (E + E) / R$, $vB\ell = E = R\,I - E$,

$G\,v - fmg\,v - I\,(R\,I - E) = 0 \;\rightarrow\; Gv + E\,I = fmgv + R\,I^2$, (8)

acum bateria este debitoare de energie.

c) Dacă F din (7) este negativă, bara rămâne în repaus sau dacă iniţial forţa rezultantă

$F' = (E / R)\,\ell B - G - fmg > 0$, (9)

bara va porni spre stânga , se va induce o t.e.m. E şi forţa rezultantă spre stânga va fi

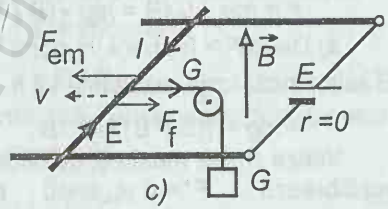


Fig.4.5.6c

$I\,\ell\,B - G - fmg$, unde

$I = (E - \mathrm{E}) / R$, $E = vB\ell$. (10)

Această forţă *scade* şi se anulează la limită când se atinge viteza maximă : $[(E - \mathrm{E}) / R]\,\ell B - G - fmg = 0 \;\rightarrow$

$\mathrm{E} = [E\ell B - R(G - fmg)] : (\ell B)$, $v = [E\ell B - R(G - fmg)] : (\ell B)^2$. (11)

Bilanţul ***puterilor*** se obţine din (10) :

$I\,\ell\,Bv - Gv - fmgv = 0$, dar $\mathrm{E} = vB\ell = E - R\,I$,

$I(E - R\,I) - Gv - fmgv = 0 \;\rightarrow\; E\,I = Gv + fmgv + R\,I^2$, (12)

bateria furnizează energie $E\,I$ (pe unitatea de timp) atât pentru a mări energia potenţială Gv (greutatea G urcă), cât şi pentru căldura disipată prin frecare $fmgv$ şi în rezistor, $R\,I^2$.

BCU CLUJ-NAPOCA BIBLIOTECA CENTRALĂ

4.5.7. ***Pe două şine conductoare paralele verticale de rezistenţă neglijabilă lunecă fără frecare, păstrând contact electric bun cu şinele, o bară conductoare, de masă*** m , ***rezistenţă*** R ***şi lungime*** ℓ , ***ca în figură . Perpendicular pe planul şinelor acţionează un câmp magnetic de inducţie*** B . ***În partea inferioară şinele sunt conectate la o baterie cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţă internă neglijabilă . Aflaţi viteza staţionară cu care bara va luneca pe şine şi faceţi bilanţul puterilor .***

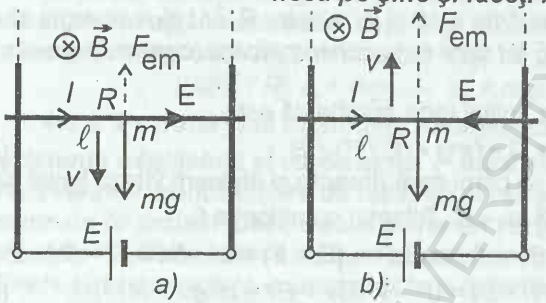


Fig.4.5.7

Rezolvare. Iniţial forţa rezultantă asupra tijei este

$$F = mg - I_E \ell B = mg - (E / R)\, \ell B \,. \qquad (1)$$

a) Dacă $F > 0$, bara va porni în jos şi în ea se induce o t.e.m. E astfel încât forţa rezultantă va fi : $F' = mg - F_{em} = mg - I\ell B =$

$$= mg - [(E + \mathrm{E}) / R]\, \ell B \,, \quad \mathrm{E} = vB\ell \,. \qquad (2)$$

Viteza *limită*, maximă, de cădere se obţine când forţele se echilibrează : $F' = 0$, $a = 0$, $v = \text{const}$,

$$mg - [(E + vB\ell) / R]\, \ell B = 0 \;\rightarrow\; v = (mgR - E\ell B) : (\ell B)^2 \,. \qquad (3)$$

Bilanţul ***puterilor*** se obţine din penultima ecuaţie :

$$mgv - [(E + vB\ell) / R]\, vB\ell = 0 \,, \text{ dar } vB\ell = \mathrm{E} = RI - E \,, \qquad (4)$$

$$mgv - I(RI - E) = 0 \;\rightarrow\; mgv + EI = RI^2 \,, \qquad (5)$$

puterea dezvoltată de forţa de greutate, mgv (prin scăderea energiei potenţiale a barei) plus puterea dezvoltată de baterie, EI, se trans-formă în puterea calorică RI^2 disipată în bară .

b) Dacă $F < 0$ (1) bara va porni în sus. Pentru viteza *limită* staţionară, constantă, forţa rezultantă se anulează :

$$I\ell B - mg = 0 \,, \quad I = (E - \mathrm{E}) / R \,, \quad \mathrm{E} = vB\ell \,, \qquad (6)$$

de unde rezultă $v = (E\ell B - mgR) : (\ell B)^2 \,. \qquad (7)$

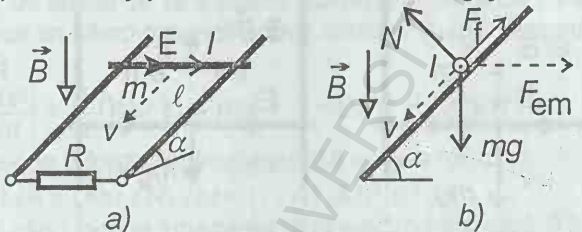
Bilanţul ***puterilor*** : $I\ell Bv - mgv = 0$,

$$I \cdot (E - RI) - mgv = 0 \,, \quad EI = mgv + RI^2 \,, \qquad (8)$$

bateria furnizează energie (EI) pentru mărirea energiei potenţiale (mgv)(bara urcă) şi pentru căldura disipată (RI^2) .

4.5.8. ***Pe două şine paralele conductoare, înclinate cu unghiul*** $\alpha = 60^o$ ***faţă de orizontală, lunecă cu viteza constantă*** $v = 10$ m/s ***o bară conductoare orizontală de masă*** $m = 50$ g ***şi lungime*** $\ell = 10$ cm ***într-un câmp magnetic de inducţie*** B ***vertical în jos. La bază şinele sunt legate între ele printr-un rezistor*** $R = 0{,}10\ \Omega$. ***Unghiul de frecare între şine şi bară este*** $\varphi = 15^o$. ***Rezistenţa şinelor şi a barei este neglijabilă. Aflaţi inducţia*** B ($g = 10$ m/s^2) . ***Calculaţi puterea calorică totală degajată*** .

Fig.4.5.8



Rezolvare. Deoarece $\alpha > \varphi$, bara va porni în jos şi în ea se induce o t.e.m. E : $E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\cos\alpha \cdot \ell$,

$$F_{em} = I\,|\vec{\ell} \times \vec{B}| = I\,\ell\,B\,, \qquad I = E/R\,. \tag{1}$$

Deoarece viteza este *constantă*, rezultanta tuturor forţelor este zero : $mg\sin\alpha - F_f - F_{em}\cos\alpha = 0$,

$$N - mg\cos\alpha - F_{em}\sin\alpha = 0\,, \quad F_f = \mu N\,. \tag{2}$$

De aici rezultă : $mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F_{em}\sin\alpha) - F_{em}\cos\alpha = 0$ (3)

$\rightarrow F_{em} = mg\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) : (\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg\ \mathrm{tg}(\alpha - \varphi)$, (4)

dar $F_{em} = I\,\ell B = (E/R)\,\ell B = (v/R)\,(\ell B)^2\cos\alpha$, (5)

$$B = \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{R}{v}}\sqrt{\frac{mg\ \mathrm{tg}(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha}} = 1{,}00\ \mathrm{T}. \tag{6}$$

Bilanţul ***puterilor*** : $mg\sin\alpha \cdot v - F_f\,v - F_{em}v\cos\alpha = 0$, (7)

unde $F_{em}v\cos\alpha = (v/R)(\ell B)^2\cos\alpha \cdot v\cos\alpha = E^2/R = RI^2$, (8)

rezultă : $mg\sin\alpha \cdot v = F_f\,v + RI^2 = 4{,}33$ W . (9)

Forţa de greutate furnizează energie ($mg\sin\alpha \cdot v$) (prin scăderea energiei potenţiale) care se transformă în caldură prin frecare ($F_f\,v$) şi în rezistor (RI^2) .

4.5.9. ***Pe două şine conductoare paralele verticale, legate în partea superioară printr-un rezistor*** $r = 1{,}10\ \Omega$ ***şi o baterie cu t.e.m.*** $E = 1{,}00$ V, ***lunecă fără frecare o tijă orizontală de lungime*** $\ell = 10{,}0$ cm ***şi masă*** $m = 10{,}0$ g, ***păstrând contact electric cu şinele. Perpendicular pe planul cadrului acţionează un câmp magnetic*** $B = 1{,}00$ T. ***Rezistenţele conductoarelor sunt neglijabile. Aflaţi viteza limită staţionară a tijei. Scrieţi bilanţul puterilor.***

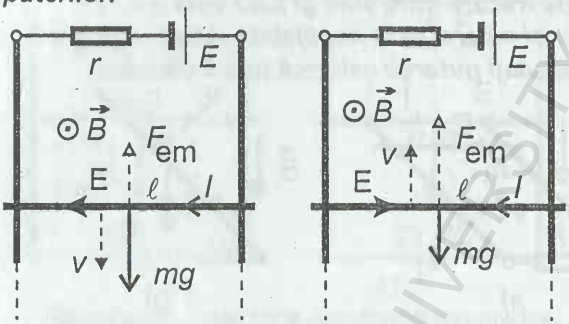


Fig.4.5.9

Rezolvare. Iniţial, asupra tijei în repaus acţionează forţa rezultantă : $F = mg - (E/r)\,\ell\,B$. (1)

a) Dacă $F > 0$ tija va porni în jos şi în ea se va induce o t.e.m. E , forţa rezultantă va fi : $F' = mg - I\,\ell\,B$,

$$I = (E + \mathrm{E})/r\,, \quad \mathrm{E} = vB\ell\,. \tag{2}$$

În regim *staţionar* viteza atinge valoarea sa limită *constantă* şi forţele se echilibrează : $mg - [(E + vB\ell)/r]\,\ell\,B = 0 \rightarrow$

$$v = (mgr - E\ell B)/(\ell B)^2\,, \quad \text{(în jos)}\,. \tag{3}$$

Bilanţul ***puterilor*** se obţine înmulţind forţa cu viteza :

$$mgv - I\,\ell Bv = 0\,, \quad mgv - I\,(rI - E) = 0\,,$$

$$mgv + E\,I = r\,I^2\,. \tag{4}$$

Puterea dezvoltată de forţa de greutate, mgv (prin scăderea energiei potenţiale a tijei), plus puterea dezvoltată de baterie, $E\,I$, se transformă în căldură disipată pe rezistor , $r\,I^2$.

b) Dacă $F < 0$ (1) , tija va porni în sus. Viteza *staţionară* se obţine atunci când forţa rezultantă se anulează :

$$F' = I\,\ell\,B - mg = 0\,, \quad I = (E - \mathrm{E})/r = (E - vB\ell)/r\,, \tag{5}$$

$$v = (E\,\ell\,B - mgr)/(\ell B)^2\,, \quad \text{(în sus)}\,. \tag{6}$$

Bilanţul ***puterilor*** rezultă din (5) :

$$I\,\ell\,Bv - mgv = 0 \quad \text{sau} \quad I\,(E - r\,I) - mgv = 0\,,$$

$$E\,I = mgv + r I^2 , \qquad (6)$$

puterea dezvoltată de baterie, $E\,I$, merge în creşterea energiei potenţiale, mgv (tija urcă) şi în căldura $r I^2$.

(*) **4.5.10.** ***În sistemul din figură*** $R = 5{,}0\ \Omega$, $\ell = 1{,}00$ m , $b = 30$ cm , $m = 50$ g, ***coeficientul de frecare la lunecare între tijă şi şine :*** $\mu = 0{,}15$. ***La un moment dat se aplică un câmp vertical*** $B = A \cdot t$, $A = 5{,}0$ T/s . ***După cât timp porneşte tija 1 ? Rezistenţele şinelor şi a tijei sunt neglijabile.***

Rezolvare. Fluxul îmbrăţişat de cadru : $\Phi = BS = At \cdot b\ell$ (1)
este *variabil*, de aceea se va induce în cadru o t.e.m. şi un curent care să creeze un câmp magnetic opus *creşterii* fluxului magnetic *(legea* ***Lenz****)* :

$$|E| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{d}{dt}(Ab\ell\, t) = Ab\ell , \quad I = E / R = Ab\ell / R . \qquad (2)$$

Atunci va acţiona o forţă electromagnetică asupra tijei :

$$F = I\,\ell B = (Ab\ell / R)\,\ell\Delta t = (1 / R)\,(A\ell)^2\, b\, t . \qquad (3)$$

În momentul când începe lunecarea forţa electromagnetică F învinge forţa de frecare: $F = F_f = \mu N = \mu mg$,

$$t = \mu mgR \ : (A^2 b^2 \ell) = 50 \text{ ms} . \qquad (4)$$

Problema se poate rezolva foarte simplu, fără folosirea derivatelor. Observăm că variaţia unei funcţii *liniare* este

$$y = ax + b \ \rightarrow \ \Delta y = a\Delta x ,$$

$$y_{1,2} = ax_{1,2} + b , \quad \Delta y = y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) = a\Delta x .$$

În cazul nostru : $\Delta\Phi = \Delta(Ab\ell t) = Ab\ell\ \Delta t$,

$$\bar{E} = \Delta\Phi / \Delta t = Ab\ell = \text{const} = E . \qquad (6)$$

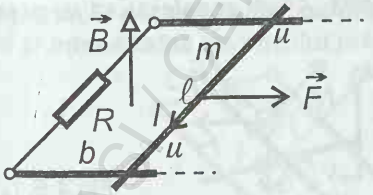


Fig.4.5.10

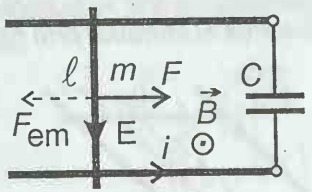


Fig.4.5.11

(*) **4.5.11.** ***În montajul din figură şinele şi bara au rezistenţa neglijabilă, sunt aşezate orizontal şi frecarea este neglijabilă;*** $\ell = 1{,}00$ m, $C = 100\ \mu$F , $B = 10{,}0$ T , $F = 40$ mN, ***masa barei*** $m = 10{,}0$ g ***şi viteza iniţială zero . Aflaţi sarcina pe condensator în momentul*** $\tau = 1{,}00$ s ***de la pornirea barei .***

Rezolvare. Pe condensator vom avea tensiunea egală cu t.e.m. indusă E (nu avem căderi de potenţial pe drum fiindcă rezistenţele sunt neglijabile), deci sarcina pe condensator : $q = C\,E = C\,vB\ell$,

(1) dar $$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CvB\ell) = CB\ell\,\frac{dv}{dt} = CB\ell\,a\,, \qquad (2)$$

unde *a* este *acceleraţia* barei . Datorită mişcării şi curentului *i* asupra barei va acţiona o forţă electromagnetică $F_{em} = i\ell B$. Atunci *lex secunda* a mecanicii dă :

$$F = -\,i\ell B = ma \quad \text{sau} \quad F - CB\ell a \cdot \ell B = ma\,, \qquad (3)$$

de unde $$a = F : (m + CB^2\ell^2) = \text{const}$$

şi $$i = CB\ell F : (m + CB^2\ell^2) = \text{const}\,. \qquad (4)$$

Atunci sarcina cerută de pe condensator :

$$q = CE = CvB\ell = CB\ell \cdot a\tau =$$

$$= [CB\ell F : (m + CB^2\ell^2)]\,\tau = i\tau = 2{,}0\ \text{mC}\,. \qquad (5)$$

Problema se rezolvă imediat şi fără folosirea derivatelor :

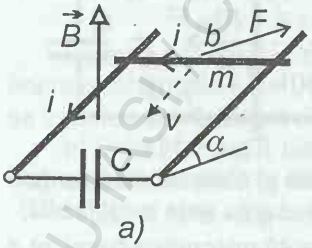
$$\bar{i} = \Delta q / \Delta t = \Delta(CB\ell v) / \Delta t = CB\ell\,\Delta v / \Delta t = CB\ell\,\bar{a}\,, \qquad (6)$$

$$F - \bar{i}\ell B = m\,\bar{a} \quad \text{sau} \quad F - CB\ell\,\bar{a} \cdot \ell B = m\,\bar{a}\,, \qquad (7)$$

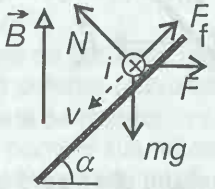
de unde $$\bar{a} = F : (m + CB^2\ell^2) = \text{const}\,!$$

deci $$\bar{a} = a\,, \text{ etc.} \qquad (8)$$

(*) 4.5.12. ***Pe două şine conductoare paralele, cu distanta*** b ***dintre ele, înclinate cu unghiul*** α ***faţă de orizontală, lunecă liber o tijă conductoare de masă*** m ***cu coeficientul de frecare la lunecare*** μ ***. La baza planului înclinat şinele sunt conectate între ele printr-un condensator de capacitate*** C. ***Asupra sistemului acţionează vertical un câmp magnetic de inducţie*** B. ***Rezistenţa conductoarelor este neglijabilă. Aflaţi acceleraţia tijei şi intensitatea curentului prin tijă .***



a)



b)

Fig.4.5.12

Rezolvare. În tijă se induce t.e.m.

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{b} = v \cdot B\sin\left(\vec{v},\vec{B}\right) \cdot b = vBb\cos\alpha\,. \qquad (1)$$

Condensatorul se încarcă cu sarcina $q = C\,\mathcal{E}$ (nu avem căderi de potenţial pe drum, deoarece rezistenţele sunt neglijabile). Intensitatea curentului : $i = dq / dt = d(CvBb\cos\alpha) / dt =$

$= CBb\cos\alpha \cdot dv / dt = CBb\cos\alpha \cdot a$, (2)

unde a este acceleraţia, sau , judecând cu valori medii fără derivate : $\bar{i} = \Delta q / \Delta t = \Delta(CvBb\cos\alpha) / \Delta t =$

$= CBb\cos\alpha \ \Delta v / \Delta t = CBb\cos\alpha \cdot \bar{a}$. (3)

Asupra tijei va acţiona o forţă electromagnetică :

$\vec{F} = i\,\vec{b} \times \vec{B}$, $F = i\,bB$, respectiv $\bar{F} = \bar{i}\,bB$, (4)

$F = C(bB)^2\cos\alpha \cdot a$, respectiv $\bar{F} = C(bB)^2\cos\alpha \cdot \bar{a}$. (5)

Lex secunda a mecanicii dă :

$mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) - F\cos\alpha = ma$, (6)

$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - C(bB)^2\cos\alpha \cdot a(\mu\sin\alpha + \cos\alpha) = ma$,

de unde acceleraţia : $a = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) :$

$: [m + C(bB)^2\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha)] = \text{const} = \bar{a}$ (7)

şi curentul $i = CbB\cos\alpha \cdot a = CbB\,mg\,\cos\alpha \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) :$

$: [m + C(bB)^2\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha)]$. (8)

Dacă se inversează sensul câmpului $\vec{B}$, se inversează numai sensul curentului i .

(*) **4.5.13.** ***Pe două şine perfect conductoare, paralele, situate la distanţa*** b ***între ele şi înclinate cu unghiul*** α ***faţă de orizontală, alunecă cu coeficientul de frecare la alunecare*** μ ***, sub acţiunea greutăţii, o tijă perfect conductoare , orizontală , de masă*** m ***. Capetele superioare ale şinelor sunt legate între ele printr-un condensator*** C***. De asemenea acţionează un câmp magnetic*** $\vec{B}$ ***perpendicular pe planul şinelor . Aflaţi acceleraţia tijei şi intensitatea curentului prin tijă .***

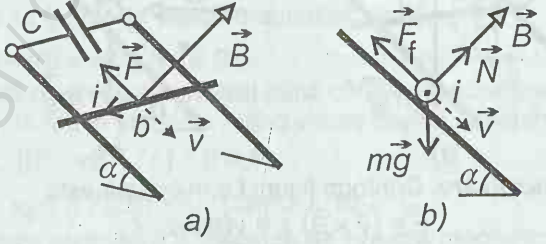


Fig.4.5.13

Rezolvare. T.e.m. indusă :

$\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B})\vec{b} = vBb$. (1)

Condensatorul se va încărca până la tensiunea E (nu avem rezistenţe active) : $q = C\,E$,

$i = dq/dt = C\,dE/dt = CBb\,dv/dt = CBb\,a$, $a = dv/dt$ (2)

sau dacă judecăm cu valori *medii*, fără a folosi derivate :

$\bar{i} = \Delta q/\Delta t = C\,\Delta E/\Delta t = CBb\,\Delta v/\Delta t = CBb\,\bar{a}$. (3)

Forţa electromagnetică asupra tijei :

$\vec{F} = i\,\vec{b}\times\vec{B}$, $F = i\,bB$, respectiv $\bar{F} = \bar{i}\,bB$. (4)

Exprimând pe i prin (2) , respectiv (3), avem

$F = C(bB)^2 a$, respectiv $\bar{F} = C(bB)^2\,\bar{a}$. (5)

Principiul II al mecanicii pe direcţia paralelă cu şinele dă :

$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - F = ma$

sau $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \bar{F} = m\,\bar{a}$, (6)

înlocuind pe F (5), găsim de aici acceleraţia :

$a = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) : [m + C(bB)^2] = \bar{a} = \text{const}$, (7)

$i = CbB\,a = CbB\,mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) : [m + C(bB)^2]$. (8)

Dacă se inversează sensul câmpului magnetic $\vec{B}$, se va inversa numai sensul curentului i .

(*) 4.5.14. ***Pe două şine perfect conductoare, paralele, situate la distanţa ℓ una de cealaltă şi înclinate cu un unghi α faţă de planul orizontal, alunecă cu coeficientul de frecare la lunecare μ sub acţiunea greutăţii o tijă orizontală de masă m , perfect conductoare. Capetele superioare ale şinelor sunt legate între ele printr-un condensator C . De asemenea, acţionează un câmp magnetic orizontal B perpendicular pe tijă . Aflaţi acceleraţia tijei şi intensitatea curentului prin tijă .***

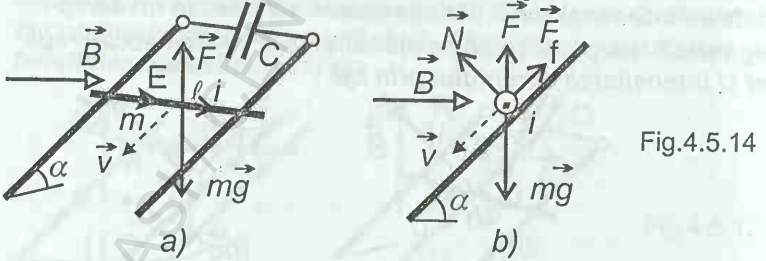


Fig.4.5.14

Rezolvare. Conform figurii t.e.m.indusă este

$E = (\vec{v}\times\vec{B})\,\vec{\ell} = vB\sin\alpha\cdot\ell$, (1)

forţa electromagnetică : $\vec{F} = i\,\vec{\ell}\times\vec{B}$, $F = i\,\ell B$, respectiv $F = \bar{i}\,\ell B$. (2)

BCU ASE BUCUREŞTI UNIVERSITY LIBRARY

Condensatorul se va încărca până la tensiunea E (nu avem rezistenţe) : $q = C\,E$. (3)

Curentul care va trece prin circuit : $i = dq/dt = C\,dE/dt =$

$= C\,\ell\,B\sin\alpha \cdot dv/dt = C\ell B\sin\alpha \cdot a$, $a = dv/dt$ (4)

sau judecând cu valori *medii*, fără a folosi derivate : $\bar{i} = \Delta q/\Delta t =$

$= C\,\Delta E/\Delta t = C\ell B\sin\alpha \cdot \Delta v/\Delta t = C\ell B\sin\alpha \cdot \bar{a}$. (5)

Principiul II al mecanicii dă pe direcţia paralelă cu şinele:

$$(mg - F)\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = ma$$

sau $$(mg - \bar{F})\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m\,\bar{a}\,.$$ (6)

Folosind F (2) şi i (4), (5) , găsim de aici acceleraţia :

$$a = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) : [m + C(\ell B)^2\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)] =$$

$$= \text{const} = \bar{a}\,,$$ (7)

$$i = C\,\ell\,B\sin\alpha \cdot a = C\,\ell\,B\,mg\sin\alpha\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) :$$

$$: [m + C(\ell B)^2\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)]\,.$$ (8)

Dacă se inversează sensul câmpului $\vec{B}$, se inversează numai sensul curentului i .

* **4.5.15.** ***Pe două şine paralele conductoare orizontale la distanţa*** ℓ = 10 cm ***una de alta poate luneca o bară conductoare cu o forţă de frecare la lunecare*** F_f = 60 mN. ***La un capăt şinele sunt conectate la o baterie cu t.e.m.*** E = 3,0 V ***şi rezistenţă internă*** r = 5,0 Ω ***(celelalte rezistenţe sunt neglijabile). Pentru ce valoare a inducţiei*** B ***orientată vertical viteza staţionară a barei va fi maximă şi care este valoarea acestei viteze ?***

Rezolvare. Pentru bară în repaus : $F_o = I_o\ell\,B = (E/r)\,\ell\,B$.(1)

Dacă $F_o > F_f$,bara porneşte spre dreapta (altfel va rămâne în repaus). Atunci se induce un curent $I_{ind} = vB\ell/r$ (2)

de sens contrar lui I_o şi forţa electromagnetică va fi :

$$F = I\ell B = [(E - vB\ell)/r]\,\ell\,B\,,$$ (3)

care scade odată cu creşterea vitezei până când va fi echilibrată de forţa de frecare, în regim staţionar, când viteza devine constantă (spre dreapta) : $[(E - vB\ell)/r]\,\ell\,B = F_f$,

de unde $$v_o = E/(\ell B) - F_f/(\ell B)^2 = f(B)\,.$$ (4)

Prin urmare, viteza *staţionară* v_o depinde de inducţia magnetică B . Condiţia de *extremum* pentru v_o este *anularea* ***derivatei*** :

$$f'(B) = -E : (\ell B^2) + 2F_f r : (\ell^2 B^3) = 0 \qquad (5)$$

(se putea deriva şi în raport cu variabila $1/B$), de unde

$$B_m = 2F_f r : (E\ell) = 2{,}0 \text{ T}. \qquad (6)$$

Natura extremului se obţine din *semnul* derivatei a *doua*:

$$f''(B) = [2 : (\ell^2 B^4)](E\ell B - 3F_f r), \qquad (7)$$

care pentru rădăcina (6) este *negativă*, deci avem un *maxim*. Pentru câmpul magnetic B_m (6) forţa statică $F_o = 2F_f$ şi viteza *staţionară maximă*:

$$v_{o\,max} = E^2 : (4F_f r) = 7{,}5 \text{ m/s}. \qquad (8)$$

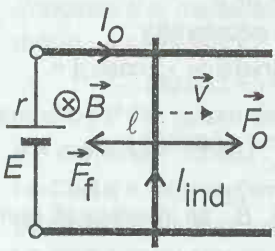


Fig.4.5.15

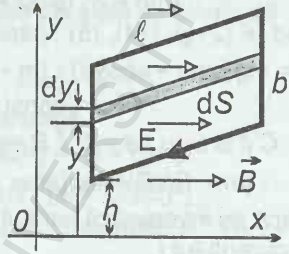


Fig.4.5.16

(* *) 4.5.16. ***Un cadru dreptunghiular de arie*** S ***cade cu viteza*** v ***într-un câmp magnetic orizontal, orientat normal pe cadru. Câmpul magnetic scade uniform cu înălţimea având gradientul*** $-dB/dy = B^* = \text{const}$. ***Aflaţi t.e.m. indusă în cadru.***

Rezolvare. Avem succesiv:

$$-dB/dy = B^* = \text{const}, \qquad dB = -B^* dy,$$

$$\int dB = B = -\int B^* dy = -B^* y + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiţia la *margine*: de exemplu, pentru $y = 0$ avem $B = B_o$, rezultă $B_o = C$, deci

$$B = B_o - B^* y. \qquad (1)$$

Acest rezultat se poate scrie imediat dacă ne amintim că variaţia unei funcţii *liniare* este:

$$y = ax + b \rightarrow \Delta y = a\Delta x, \qquad (2)$$

deci în cazul nostru:

$$-\Delta B = B^* \Delta y \rightarrow B = -B^* y + B_o, \qquad (3)$$

unde B_o este valoarea lui B pentru $y = 0$.

T.e.m. indusă poate fi aflată în două moduri, fie cu formula $E = (\vec{v} \times \vec{B})\,\vec{\ell}$, fie cu formula $E = -d\Phi/dt$.

a) T.e.m. se induce numai pe laturile orizontale care taie linii de câmp magnetic: $E = \ell vB(h + b) - \ell vB(h) =$

$= \ell v[B_0 - B^*(h + b)] - \ell v[B_0 - B^*h] = - \ell vB^*b = - vB^*S$ (4)

şi are sensul rezultant indicat în figură .

b) Să calculăm fluxul îmbrăţişat de cadru la un moment dat. Alegem o arie *elementară* de forma unei fâşii infinitezimale de lungime ℓ şi lăţime dy, ca în figură : $dS = \ell dy$. Fluxul magnetic *elementar* prin această arie *elementară* este

$$d\Phi = B\,dS = (B_0 - B^*y)\,\ell dy . \quad (5)$$

Prin integrare obţinem : $\Phi = \int d\Phi = \int_h^{h+b} (B_0 - B^*y)\,\ell\,dy =$

$= B_0\ell b - B^*\ell\,(1/2)\,[(h + b)^2 - h^2] = B_0S - (1/2)B^*S(b + 2h)$.(6)

Fluxul magnetic îmbrăţişat este *variabil* datorită descreşterii lui h .

T.e.m. indusă : $E = - d\Phi / dt = (1/2)B^*S\cdot 2\,dh / dt = - B^*Sv$. (7)

**** 4.5.17. *Pe două şine conductoare paralele orizontale, cu distanţa ℓ între ele, poate luneca fără frecare o tijă de masă* m . *Şinele sunt legate la un capăt printr-un rezistor* R *şi aşezate într-un câmp magnetic vertical* B . *Se imprimă tijei o viteză orizontală perpendiculară* v_0 . *Aflaţi distanţa străbătută de tijă până la oprire şi timpul până când viteza scade la* $v = v_0 / e$.**

Aplicaţie: ℓ = 10 cm , m = 1,0 g, R = 1,0 Ω , B = 0,10 T .

Rezolvare. În tijă se induce o t.e.m. $E = (\vec{v} \times \vec{B})\,\vec{\ell} = vB\ell$, (1)

ca în figură. Atunci va acţiona o forţă electromagnetică :

$$f = i\,|\vec{\ell} \times \vec{B}| = i\,\ell\,B = (E / R)\,\ell B = [(\ell B)^2 / R]\,v \quad (2)$$

care frânează tija . *Lex secunda* a mecanicii dă :

$$- f = ma \quad \text{sau} \quad - [(\ell B)^2 / R]\,v = m\,dv/dt , \quad (3)$$

$$-\frac{1}{R}\,\ell^2B^2\,\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dt} \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{R}\,\ell^2B^2dx = m\,dv .$$

Integrăm (limitele de integrare se corespund : lui $x = 0$ îi corespunde $v = v_0$) : $-\frac{1}{R}\,\ell^2B^2\int_0^x dx = m\int_{v_0}^{v} dv$, $x = \frac{mR}{\ell^2B^2}(v_0 - v)$. (5)

Putem integra şi *nedefinit* : $-\frac{1}{R}\,\ell^2B^2\int dx = m\int dv \quad \rightarrow$

$- (1 / R)\,(\ell B)^2\,x = mv + C$,

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia iniţială* : la $x = 0$ avem $v = v_0$, $0 = mv_0 + C$, de unde $C = - mv_0$, etc.

Distanţa parcursă până la *oprire* (facem $v \rightarrow 0$) :

$$x_m = mRv_o : (\ell B)^2 . \quad (6)$$

Revenim la ecuaţia (3) şi separăm variabilele :

$$dt = -[Rm : (\ell B)^2]\, dv / v , \quad (7)$$

integrăm (limitele de integrare se corespund : lui $t = 0$ îi corespunde $v = v_o$): $\int_0^t dt = -\frac{Rm}{\ell^2 B^2}\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v}$ sau $t = \frac{Rm}{\ell^2 B^2}\ln\frac{v_o}{v}$. (8)

Putem integra şi *nedefinit* :

$$t = \int dt = -\frac{Rm}{\ell^2 B^2}\int\frac{dv}{v} = -\frac{Rm}{\ell^2 B^2}(\ln v + C) ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $v = v_o$, $0 = (\ln v_o + C)$, de unde $C = -\ln v_o$, etc.

Timpul cerut în problemă se obţine punând $v = v_o / e$:

$$t = [Rm : (\ell B)^2] \ln e = Rm : (\ell B)^2 = 10 \text{ s} . \quad (9)$$

Observăm că deşi distanţa până la oprire este *finită* , timpul până la oprire iese *infinit* : când $v \to 0$, rezultă $t \to \infty$ (totuşi , practic aproape toată distanţa până la oprire este parcursă într-un timp de ordinul lui t de mai sus).

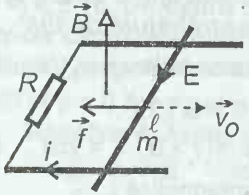


Fig.4.5.17

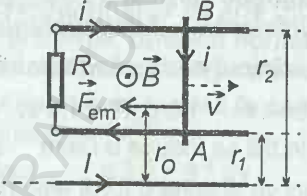


Fig.4.5.18

**** 4.5.18.** ***Paralel cu un curent rectiliniu lung*** I ***avem două şine conductoare, situate la distanţele*** $r_{1,2}$ ***de curentul amintit, pe care lunecă fără frecare cu viteza*** v ***o tijă conductoare , ca în figură . Şinele sunt conectate între ele la capăt printr-un rezistor*** R. ***Aflaţi: a) curentul prin şine, b) forţa electromagnetică exercitată asupra tijei şi punctul ei de aplicaţie, c) bilanţul puterilor.***

Rezolvare. a) Luăm un *element* de tijă dr situat la distanţa r de curentul I . În acest *element* se induce o t.e.m. *elementară* :

$$dE = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{r} = vB\, dr = v\,[\mu I : (2\pi r)]\, dr . \quad (1)$$

Însumăm (integrăm) aceste t.e.m. elementare pe toată tija :

$$E = \int dE = \int_{r_1}^{r_2} v\frac{\mu I}{2\pi}\frac{dr}{r} = v\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} . \quad (2)$$

BCU TRANSILVANIA LIBRARY

Intensitatea curentului indus :

$$i = E : R = [v\,\mu l : (2\pi R)] \ln(r_2 / r_1)\,. \qquad (3)$$

b) Forţa electromagnetică *elementară* asupra *elementului* de tijă : $d\vec{F} = i\,d\vec{r} \times \vec{B}$, $dF = i\,dr\,B = i\,[\mu l : (2\pi r)]\,dr$, (4)

de unde prin integrare : $F = \int dF = \int_{r_1}^{r_2} i \frac{\mu l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{i\mu l}{2\pi} \ln\frac{r_2}{r_1} =$

$$= \left[\frac{\mu l}{2\pi} \ln\frac{r_2}{r_1}\right]^2 \cdot \frac{v}{R} = \frac{Ri^2}{v}\,. \qquad (5)$$

Punctul de aplicaţie al forţei electromagnetice F se obţine din condiţia de momente :

$$F \cdot r_o = \int_{r_1}^{r_2} r\,dF = \int_{r_1}^{r_2} ri \frac{\mu l}{2\pi r}\,dr = \frac{i\mu l}{2\pi}(r_2 - r_1)\,,$$

$$r_o = \frac{i\mu l}{2\pi F}(r_2 - r_1) = \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2/r_1)}\,. \qquad (6)$$

c) Pentru a mişca tija trebuie aplicată o forţă care să învingă forţa electromagnetică . Deci asupra tijei se aplică puterea :

$$P = F \cdot v = R\,i^2\,, \qquad (7)$$

care, după cum se vede, este disipată în *căldura Joule* în rezistorul R.

** **4.5.19.** ***Un cadru dreptunghiular cu laturile*** ℓ = 40 cm , h = 50 cm , ***masa*** m = = 10,0 g ***şi rezistenţa*** R = 0,100 Ω ***este situat într-un plan vertical, astfel încât latura inferioară se află între polii unui magnet care produce o inducţie orizontală*** B = 250 mT, ***ca în figură. La un moment dat cadrul este lăsat să cadă liber fără viteză iniţială. Calculaţi : a) viteza limită maximă*** c ***pe care o poate atinge cadrul, considerând că latura superioară nu intră în regiunea câmpului magnetic, iar cea inferioară nu iese din câmp, b) timpul în care se atinge*** f = 0,99 = = 99 % ***din viteza limită*** c , ***c) distanţa străbătută de cadru în acest timp.***

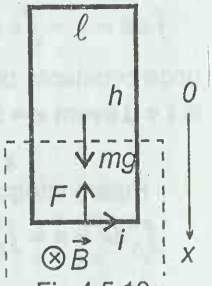


Fig.4.5.19

Rezolvare. a) Avem: $E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \vec{\ell} = vB\ell$, $i = E / R = vB\ell / R$,

$$\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}\,, \qquad F = i\,\ell\,B = (\ell B)^2 v / R\,. \qquad (1)$$

Principiul II al mecanicii dă:

$$mg - F = ma \text{ sau } mg - (\ell B)^2 v / R = m\,dv / dt\,. \qquad (2)$$

Viteza *limită maximă (constantă)* se obţine când forţa electromagnetică F echilibrează greutatea mg sau altfel din (2) când membrul drept se anulează fiindcă v = const, deci $a = dv/dt = 0$, deci : $c = mgR : (\ell B)^2 = 0{,}98$ m/s . (3)

b) Separăm variabilele în (2) şi integrăm :

$$dt = \frac{m\,dv}{mg - \ell^2 B^2 v/R} = \frac{1}{g}\frac{dv}{1 - v/c},$$

$$\int dt = t = \frac{1}{g}\int \frac{dv}{1-v/c} = -\frac{c}{g}\ln(1-v/c) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $v = 0$, rezultă imediat $C = 0$, deci

$$t = -(c/g)\ln(1 - v/c), \quad v = c(1 - e^{-gt/c}). \tag{5}$$

Se putea integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = t = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{dv}{1-v/c} = -\frac{c}{g}\ln(1-v/c).$$

$$\tau = -(c/g)\ln(1 - f) = 0{,}46 \text{ s}. \tag{6}$$

Viteza limită c nu se poate atinge teoretic decât pentru $t \to \infty$, aşa cum se vede din (5), dar practic 99 % din c se atinge foarte repede în 0,46 s (6) .

c) Putem continua integrarea : $dx = v\,dt$,

$$\int dx = x = \int v\,dt = \int c\left(1 - e^{-gt/c}\right)dt = ct + \frac{1}{g}c^2 e^{-gt/c} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $x = 0$: $0 = c^2/g + C'$, $C' = -c^2/g$, deci

$$x = ct + (c^2/g)(e^{-gt/c} - 1). \tag{7}$$

Putem integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t c\left(1 - e^{-gt/c}\right)dt = ct\Big|_0^t + \frac{1}{g}c^2 e^{-gt/c}\Big|_0^t =$$

$$= ct + (c^2/g)(e^{-gt/c} - 1).$$

Dacă introducem în (7) pe t din (5), obţinem x funcţie de viteză:

$$x = \frac{c^2}{g}\left(\ln\frac{1}{1-v/c} - \frac{v}{c}\right). \tag{8}$$

Această relaţie se poate obţine şi prin integrare directă: înmulţim ecuaţia (4) cu v : $v\,dt = dx = (1/g)\,v\,dv : (1 - v/c)$, (9)

integrăm : $$\int dx = x = \frac{c}{g}\int \frac{(v/c - 1 + 1)\,dv}{1 - v/c} =$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= -\frac{c}{g}\int dv + \frac{c}{g}\int \frac{dv}{1-v/c} = -\frac{c}{g}v - \frac{c^2}{g}\ln(1-v/c) + C'',$$

unde constanta de integrare C'' se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $v = 0$ şi $x = 0$, rezultă imediat $C'' = 0$ şi regăsim (8) .

Se putea integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = -\frac{c}{g}\int_0^v dv + \frac{c}{g}\int_0^v \frac{dv}{1-v/c} =$$

$$= - (c/g)\, v - (c^2/g) \ln (1 - v/c) .$$

Punând în (8) condiţia $v = f\,c$, găsim distanţa parcursă cerută:

$$s = (c^2/g)\{\ln[1/(1-f)] - f\} = 35 \text{ cm} < h = 50 \text{ cm} , \qquad (10)$$

deci mai puţin decât latura $h = 50$ cm .

Teoretic viteza c se atinge pentru $t \to \infty$ şi distanţa parcursă $x \to \infty$.

* * *

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. CURENTUL ALTERNATIV

5.1. VALORILE EFECTIVE

5.1.1. ***La un oscilograf baza de timp este dată de o tensiune sinusoidală*** U_1***, iar pe plăcile de deflexie verticală se aplică o tensiune*** U_2 ***în trepte , ca în figură . Ce figură descrie spotul pe ecran ?***

Rezolvare. Spotul, deviat fiind vertical cu U_2 , de deplasează la început rapid (dungă subţire) apoi mai lent până în punctul *2* când se opreşte (dungă groasă), sare la $-U_2$ (*2 - 3*) şi se întoarce înapoi la axa verticală, sare din nou la $+U_2$ şi deviază spre stânga, la început rapid (dungă subţire), apoi mai lent până în punctul *6* , după care sare la $-U_2$, ş.a.m.d. , conform figurii.

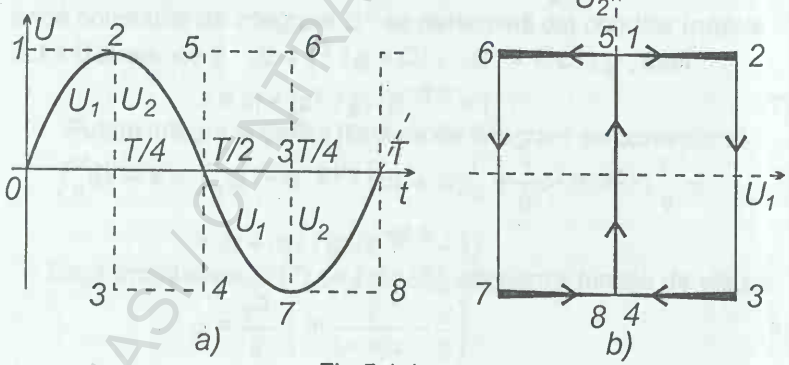


Fig.5.1.1

5.1.2. ***Prin spirala unui încălzitor trece un curent continuu. Cu câte procente se schimbă căldura degajată , dacă prin spirală va trece simultan şi un curent alternativ având intensitatea efectivă egală cu intensitatea curentului continuu ? (Rezistenţa spiralei este practic constantă).***

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. În primul caz, la curent continuu, puterea dezvoltată este $P = RI_o^2$. În al doilea caz puterea *medie* este

$$P' = R\langle i^2\rangle = R\langle (I_o + I_m\sin\omega t)^2\rangle =$$

$$= R\langle I_o^2 + I_m^2\sin^2\omega t + 2I_oI_m\sin\omega t\rangle . \quad (1)$$

Dar după cum se ştie : $\langle \text{const}\rangle = \text{const}$,

$$\langle f+g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle , \langle \text{const}\cdot f\rangle = \text{const}\cdot\langle f\rangle ; \quad (2)$$

$$\langle \sin\omega t\rangle = 0 , \langle \cos\omega t\rangle = 0 , \langle \sin^2\omega t\rangle = 1/2 = \langle \cos^2\omega t\rangle . \quad (3)$$

Atunci rezultă :

$$P' = R(I_o^2 + I_m^2/2) = R(I_o^2 + I^2) , \quad I = I_m/\sqrt{2} . \quad (4)$$

Raportul cerut : $(P' - P) : P = I^2 : I_o^2 = 1{,}00 = 100\ \%$. (5)

5.1.3. ***Tensiunea unei reţele de c.a. a scăzut de la*** $U = 220$ V ***la*** $U' = 190$ V ***. Pentru a menţine puterea nominală a unui reşou s-a conectat în serie o tensiune continuă*** U_o ***. Aflaţi*** U_o ***.***

Rezolvare. Puterea medie a reşoului :

$$P = (1/R)\langle (\sqrt{2}\,U'\sin\omega t + U_o)^2\rangle = (1/R)\langle 2U'^2\sin^2\omega t +$$

$$+ U_o^2 + 2\sqrt{2}\,U'U_o\sin\omega t\rangle = (U'^2 + U_o^2)/R , \quad (1)$$

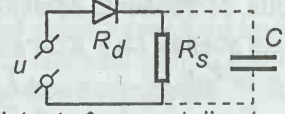
unde am folosit rezultatele cunoscute pentru valori medii de la problema precedentă 5.1.2.

Tensiunea cerută : $P = U^2/R = (U'^2 + U_o^2)/R \rightarrow$

$$U_o = \sqrt{U^2 - U'^2} = 111\ \text{V} . \quad (2)$$

5.1.4. ***În montajul din figură dioda are curba caracteristică reprezentată printr-o dreaptă ce trece prin origine, de pantă*** $S = 10{,}0$ mA/V ***, iar rezistorul de sarcină are rezistenţa*** $R_s = 4{,}3$ kΩ***. Tensiunea alternativă aplicată este cea industrială . Aflaţi : a) Componenta continuă a curentului şi tensiunii la bornele rezistorului de sarcină , b) Factorul de ondulaţie , c) Randa-mentul de redresare definit prin raportul dintre puterea de c.c. în sarcină şi puterea activă în sarcină, d) De câte ori creşte puterea disipată pe rezistorul de sarcină prin legarea în paralel pe acesta a unui condensator de netezire a tensiunii redresate, condensator de capacitate suficient de mare .***

Fig.5.1.4



Rezolvare. a) Rezistenţa în curent direct a diodei este:

$$R_d = 1/S = 100\ \Omega , \quad (1)$$

atunci amplitudinea curentului redresat va fi :

$$I_m = U_m : (R_d + R_s) = 70{,}7 \text{ mA} . \qquad (2)$$

Curentul redresat este format din alternanţele pozitive ale sinusoidei şi după cum se ştie componenta *continuă* sau valoarea *medie* este : $I_o = I_m : \pi = 22{,}5$ mA , $U_o = R_s I_o = 76{,}5$ V . (3)

b) **Factorul de ondulaţie** la redresarea *monoalternanţă* :

$$\gamma = \pi / 2 . \qquad (4)$$

c) Valoarea efectivă a curentului redresat *mono*alternanţă este *jumătate* din valoarea efectivă a curentului redresat *bi*alternanţă, care la rândul ei este evident $I_m / \sqrt{2}$ (fiindcă sinusoida la pătrat coincide cu sinusoida redresată *bi*alternanţă la pătrat) .

Atunci **randamentul de redresare** :

$\eta = R_s I^2 : [R_s I_m^2 / (2\sqrt{2})^2] = 8 / \pi = 80$ % .

d) În timpul alternanţelor pozitive condensatorul se încarcă repede, practic până la tensiunea de vârf U_m , deoarece încărcarea se face prin rezistenţa diodei $R_d = 100\ \Omega$ şi constanta de timp la încărcare va fi deci $\tau = R_d C \sim 1$ ms $\ll T/2 = 10$ ms .

Dimpotrivă , descărcarea se face prin rezistenţa de sarcină în timpul alternanţelor negative, constanta de timp fiind acum $\tau' = R_s C \sim 43$ ms $> T/2$. Deci tensiunea pe rezistorul de sarcină este apropiată de tensiunea de *vârf* şi avem aproximativ :

$$(U_m^2 / R_s) : [R_s I_m^2 / (2\sqrt{2})^2] = 8(1 + R_d / R_s)^2 \sim 8 \text{ ori} .$$

5.1.5. Încărcarea unui acumulator cu curent continuu de intensitate I ***durează un timp*** $\tau = 24$ h ***. Cât timp va fi necesar pentru încărcare dacă încărcarea se face cu un curent alternativ redresat*** **bi***alternanţă, a cărui intensitate măsurată de un ampermetru termic sau electrodinamic arată tot*** I ***?***

Rezolvare. Încărcarea acumulatorului este determinată de valoarea ***medie*** a curentului care trece prin el (ca la legile electrolizei), pe când un ampermetru termic sau electrodinamic indică valoarea *efectivă* a curentului (deviaţia fiind proporţională cu $\langle i^2 \rangle$) .

După cum se ştie valoarea *medie* a curentului redresat **bi**alternanţă (sau altfel spus, componenta *continuă*) este $I_m \cdot 2/\pi$, iar valoarea *efectivă* este aceeaşi ca şi a curentului sinusoidal redresat (deoarece $|\sin\omega t|^2 = \sin^2\omega t$) : $\langle I \rangle = I_m \cdot 2/\pi$,

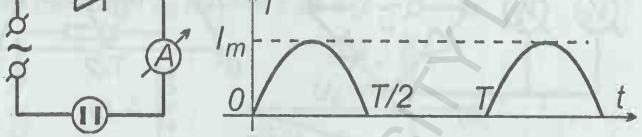
$$I_{ef} = I_m : \sqrt{2} \ \rightarrow \ \langle I \rangle = I_{ef} \cdot 2\sqrt{2} / \pi . \qquad (1)$$

Timpul de încărcare fiind invers proporţional cu $\langle I \rangle$, va creşte în raportul : $\tau' : \tau = I : \langle I \rangle = \pi / (2\sqrt{2}) = 1{,}11$ ori ,

$\tau' = 26$ h 40 min . (2)

** **5.1.6.** ***O baie electrolitică este conectată printr-o diodă ideală la o tensiune alternativă. În timpul*** t = 1,00 h ***pe catod se depun*** m =1,078 g *cupru* (K = 0,33 mg/C) . ***Aflaţi indicaţia ampermetrului termic din figură .***

Fig.5.1.6



Rezolvare. Prin circuit vor trece numai alternanţele pozitive , ca în figură. $dm = K\,dq = K\,i\,dt$,

$$m = \int dm = K\int i\,dt = K\langle i\rangle \Delta t = K\langle i\rangle\, t, \qquad (1)$$

unde $\langle i \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t \cdot dt = -\frac{1}{\omega T} I_m \cos\omega t \Big|_0^{T/2} =$

$$= -\,[1/(2\pi)]\, I_m\, [\cos(\omega t/2) - \cos 0] = I_m/\pi\,, \qquad (2)$$

deci $$m = (1/\pi)\, K\, I_m\, t\,. \qquad (3)$$

Depunerea de substanţă în baia electrolitică răspunde (este proporţională) la intensitatea **medie** a curentului, în timp ce ampermetrul *termic* răspunde la *căldura Joule* $\langle R\, i^2 \rangle$, deci este gradat în valori *efective* ale intensităţii curentului :

$$I_{ef}^2 = \langle i^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2\omega t \cdot dt =$$

$$= I_m^2 \frac{1}{2T}\int_0^{T/2} (1 - \cos 2\omega t)\, dt = \frac{1}{4} I_m^2\,. \qquad (4)$$

Scoatem pe I_m din (3) şi-l introducem aici în (4) :

$$I_{ef} = \pi m : (2Kt) = 1{,}43 \text{ A}\,. \qquad (5)$$

** **5.1.7.** ***O tensiune alternativă*** U = 220 V ***(valoare efectivă) este măsurată prin intermediul unei punţi redresoare ideale, cu ajutorul a două voltmetre ideale: unul magnetoelectric*** V_1 ***şi altul termic*** V_2***, ca în figură . Ce vor arăta voltmetrele dacă au fost gradate (etalonate) după o tensiune continuă ?***

Rezolvare. Curentul redresat va fi cu *ambele* alternanţe (v. figura) . Voltmetrul magnetoelectric răspunde la forţa electromagnetică, $\langle i \rangle\, \ell B$, deci la valoarea ***medie*** a curentului :

$$\langle i\rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t \cdot dt = -\frac{1}{\pi}\cos\omega t\,\Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} I_m \qquad (1)$$

(valoarea medie la redresarea **bi**alternanţă este **dublă** faţă de cea **mono**alternanţă), deci acest voltmetru arată :

$$U_1 = (2/\pi)\, U_m = (2/\pi)\, U\sqrt{2} = 198 \text{ V} . \qquad (2)$$

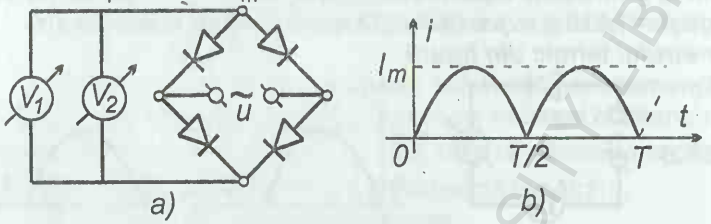


Fig.5.1.7

Voltmetrul **termic** răspunde la *efectul termic* ***Joule*** : $\langle R\, i^2\rangle = R\langle i^2\rangle$, deci la valoarea **efectivă** a intensităţii curentului :

$$\langle i^2\rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2\omega t \cdot dt = I_m^2 \frac{1}{T}\int_0^{T/2}(1-\cos 2\omega t)\, dt = \frac{1}{2} I_m^2 . \qquad (3)$$

Deci acest voltmetru arată valoarea efectivă a tensiunii :

$$U_2 = U = 220 \text{ V} . \qquad (4)$$

5.2. CIRCUITE RLC

5.2.1. Un condensator plan-paralel are aria unei armături S, ***distanţa dintre armături*** d ***şi dielectric cu constanta dielectrică*** ε_r ***şi rezistivitatea*** ρ ***. I se aplică condensatorului o tensiune alternativă*** U ***. Ce curent va trece prin condensator ?***

Rezolvare. Un condensator **real** care **nu** are dielectric ideal, perfect izolant, prezintă o rezistenţă între armături şi se poate reprezenta printr-un condensator ideal (partea *reactivă*) **şuntat** de un rezistor (partea *activă*), analog cum o bobină **reală** se reprezintă printr-o bobină ideală (partea *reactivă*) în **serie** cu un rezistor (partea *activă*). Prin urmare, condensatorul real dat este echivalent cu un condensator ideal $C = \varepsilon S / d$ legat în **paralel** cu un rezistor $R = \rho\, d / S$. Avem deci un circuit **RC** paralel :

$I = U\, Y = U\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2}$, unde $Y = 1/Z$ este ***admitanţa*** .

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.2.2. ***Se dă un circuit*** RLC ***serie. Dacă i se aplică o tensiune alternativă*** U ***de frecvenţă*** $\nu = 1{,}00$ kHz , ***atunci un ampermetru ideal conectat la bornele condensatorului arată un curent*** $I_1 = 100$ mA ***defazat cu*** $\varphi_1 = \pi/6$ ***faţă de tensiunea aplicată*** U, ***iar dacă se conectează la bornele condensatorului un voltmetru ideal, el arată o tensiune*** $U_1 = 20{,}0$ V ***defazată cu*** $\varphi_2 = \pi/6$ ***faţă de*** U . ***Aflaţi*** R, L, C . ***Pentru ce frecvenţă a tensiunii aplicate defazajul*** φ_2 ***devine*** $\pi/2$ ***?***

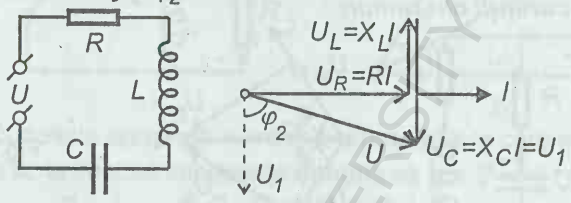


Fig.5.2.2

Rezolvare. La conectarea ampermetrului **ideal**, condensatorul va fi scurt-circuitat şi curentul indicat este determinat de R, L în serie : $I_1 = U : \sqrt{R^2 + X_L^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = X_L : R \rightarrow$

$$I_1 = (U/R) : \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_1} = (U/R)\cos\varphi_1 . \qquad (1)$$

La conectarea voltmetrului ideal el arată tensiunea :

$$U_1 = X_C \cdot I = X_C U : \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} . \qquad (2)$$

Fiind circuit RLC *serie*, diagrama fazorială este cea din figură, unde compunem tensiunile . Circuitul trebuie să fie de tip *capacitiv*, altfel φ_2 ar fi obtuz , $\operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi_2) = (X_C - X_L) : R$,

$$X_C = X_L + R\operatorname{ctg}\varphi_2 = R(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2) , \qquad (3)$$

$$U_1 = U\frac{R(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2)}{R\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi_2}} = \frac{I_1}{\cos\varphi_1} R(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2)\sin\varphi_2 \rightarrow (4)$$

$$R = \frac{U_1}{I_1}\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_2}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2} = 150\ \Omega. \qquad (5)$$

$$X_L = R\operatorname{tg}\varphi_1 , \quad L = [1/(2\pi\nu)]\, R\operatorname{tg}\varphi_1 = 14\ \text{mH} . \qquad (6)$$

$$X_C = R(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_2) = \frac{U_1}{I_1}\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_2} ,$$

$$C = \frac{1}{2\pi\nu}\frac{I_1}{U_1}\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1} = 0{,}46\ \mu\text{F} . \qquad (7)$$

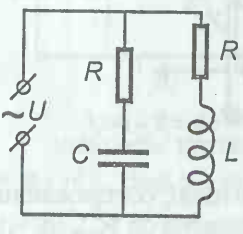
Din figură se vede condiţia : $\varphi_2 = \pi/2 \rightarrow U_L = U_C$ sau

$$X_L = X_C \text{ sau } \nu' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} =$$

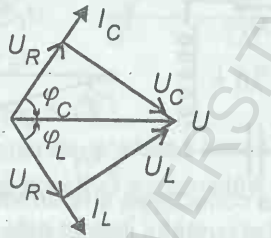
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi\nu}{R\,\mathrm{tg}\varphi_1}\cdot 2\pi\nu R\left(\mathrm{tg}\varphi_1 + \mathrm{ctg}\varphi_2\right)} = \nu\sqrt{1+\mathrm{ctg}\varphi_2 : \mathrm{tg}\varphi_1} = 2\nu =$$

$$= 2{,}0 \text{ kHz} . \qquad (8)$$

5.2.3. ***În circuitul din figură se cunosc :*** $\omega L = 1/(\omega C)$ ***şi*** $\omega L / R = 10$. ***Aflaţi de câte ori curentul principal este mai mic decât curenţii din ramuri .***



a)



b)

Fig.5.2.3

Rezolvare. *Defazajele* din ramuri sunt :

$$\mathrm{tg}\varphi_L = \omega L / R \,,\quad \mathrm{tg}\varphi_C = -1/(\omega CR) \rightarrow \varphi_L = -\varphi_C . \qquad (1)$$

Impedanţele ramurilor sunt :

$$Z_L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \,,\quad Z_C = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$$

$$\rightarrow\ Z_L = Z_C \,,\quad I_L = I_C . \qquad (2)$$

Curentul principal este atunci :

$$I = 2I_L \cos\varphi_L = 2I_L R : \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \,,$$

$$I_L : I = [1/(2R)]\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = (1/2)\sqrt{1+(\omega L/R)^2} = 5{,}0 . \qquad (3)$$

5.2.4. ***În montajul din figură se cunosc*** $R_{1,2}$, L ***şi*** ω . ***Aflaţi impedanţa circuitului folosind diagrama fazorială . Cunoscând*** I_L ***aflaţi tensiunea*** U .

Rezolvare. Tensiunea U_2 (la bornele ansamblului R_2C) este defazată înainte faţă de I :

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = R_2/(\omega L) \rightarrow \cos^2\varphi_2 = \omega^2 L^2 : (R_2^2 + \omega^2 L^2) . \qquad (1)$$

Curentul I_2 este în fază cu U_2 , iar I_L este defazat înapoi cu $\pi/2$ faţă de U_2 .

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 I \cos\varphi_2 . \qquad (2)$$

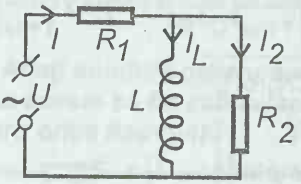
Teorema ***cosinusului*** în triunghiul tensiunilor ne dă : $U = ZI =$

$$= \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi_2} = I\sqrt{R_1^2 + R_2^2\cos^2\varphi_2 + 2R_1R_2\cos^2\varphi_2} \,,$$

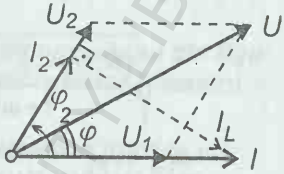
$$Z = \sqrt{R_1^2 + \left(R_2^2 + 2R_1R_2\right)\omega^2L^2 : \left(R_2^2 + \omega^2L^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{R_1^2R_2^2 + \omega^2L^2\left(R_1 + R_2\right)^2}{R_2^2 + \omega^2L^2}} . \qquad (3)$$

Fig.5.2.4



a)



b)

Cine cunoaşte aplicarea *numerelor* ***complexe*** la curent alternativ poate scrie imediat impedanţa ***complexă*** ($j = \sqrt{-1}$):

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 j\omega L}{R_2 + j\omega L} = \frac{R_1R_2 + j\omega L\left(R_1 + R_2\right)}{R_2 + j\omega L} ,$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{\left|R_1R_2 + j\omega L\left(R_1 + R_2\right)\right|}{\left|R_2 + j\omega L\right|} = \frac{\sqrt{R_1^2R_2^2 + \omega^2L^2\left(R_1 + R_2\right)^2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2L^2}} . \qquad (4)$$

Din diagrama fazorială rezultă :

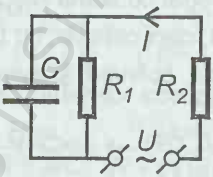
$$I = \sqrt{I_2^2 + I_L^2} = \sqrt{\left(I_L \operatorname{tg}\varphi_2\right)^2 + I_L^2} = I_L\sqrt{\omega^2L^2/R_2^2 + 1} ,$$

$$U = ZI = \sqrt{\frac{R_1^2R_2^2 + \omega^2L^2\left(R_1 + R_2\right)^2}{R_2^2 + \omega^2L^2}}\, I_L \sqrt{\frac{R_2^2 + \omega^2L^2}{R_2^2}} =$$

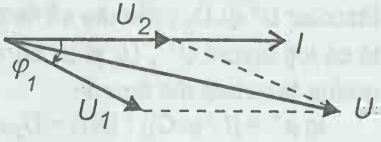
$$= I_L \frac{1}{R_2}\sqrt{R_1^2R_2^2 + \omega^2L^2\left(R_1 + R_2\right)^2} . \qquad (5)$$

5.2.5. ***În montajul din figură se cunosc*** $R_{1,2}$, C , U . ***Aflaţi curentul .***

Fig.5.2.5



a)



b)

Rezolvare. Defazajul tensiunii U_1 (la bornele ansamblului R_1C) faţă de curentul *I* este

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\omega C R_1 \rightarrow \cos\varphi_1 = 1 : \sqrt{1+\omega^2 C^2 R_1^2}\,, \qquad (1)$$

$$U_1 = Z_1 I = I : \sqrt{1/R_1^2 + \omega^2 C^2} = I R_1 : \sqrt{1+\omega^2 C^2 R_1^2}\,, \quad U_2 = R_2 I\,. \qquad (2)$$

Din triunghiul tensiunilor avem : $U = Z\,I =$

$$= \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi_1} = I\sqrt{\frac{R_1^2}{1+\omega^2C^2R_1^2} + R_2^2 + 2\frac{R_1R_2}{1+\omega^2C^2R_1^2}} =$$

$$= I\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}{1+\omega^2C^2R_1^2}}\,. \qquad (3)$$

Cu ajutorul *numerelor* **complexe** : $\bar{U} = \bar{Z}\,\bar{I}$,

$$\bar{Y} = 1 : \bar{Z} = \frac{(1/R_2)(1/R_1 + j\omega C)}{1/R_2 + 1/R_1 + j\omega C} = \frac{1 + j\omega C R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}\,. \qquad (4)$$

$$Z = |\bar{Z}| = \frac{|R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2|}{|1 + j\omega C R_1|} = \frac{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}{\sqrt{1+\omega^2C^2R_1^2}}\,. \qquad (5)$$

5.2.6. ***În "puntea lui* Wien*" din figură se cunosc*** R , C. ***Pentru ce frecvenţă tensiunea la ieşire*** U_2 ***va fi în fază cu tensiunea de intrare*** U_1 ***şi cât va fi raportul*** U_2 / U_1 ***în acest caz ?***

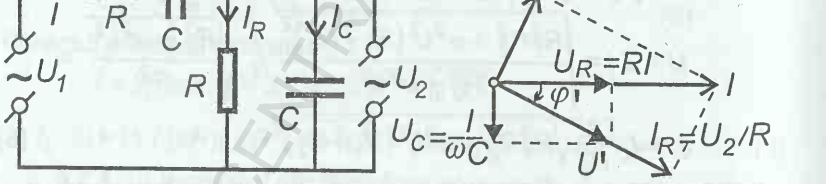


Fig.5.2.6

Rezolvare. Deoarece fazorul U_1 , egal cu suma "vectorială" a fazorilor U' şi U_2 , trebuie să fie în fază, deci coliniar, cu U_2 , rezultă că toţi fazorii U' , U_2 şi U_1 sunt în fază, coliniari, şi avem diagrama fazorială din figură .

$$\operatorname{tg}\varphi' = [I/(\omega C)] : (RI) = U_2\omega C : (U_2/R) \rightarrow (\omega CR)^2 = 1\,, \qquad (1)$$

$$\omega = 1 : (RC)\,, \qquad \varphi' = \pi/4\,. \qquad (2)$$

$$U' = \sqrt{2}\,RI\,, \quad I = \sqrt{2}\,U_2/R \rightarrow U' = 2U_2\,, \qquad (3)$$

$$U_1 = U' + U_2 = 3U_2 \rightarrow U_2/U_1 = 1/3\,. \qquad (4)$$

BCU - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

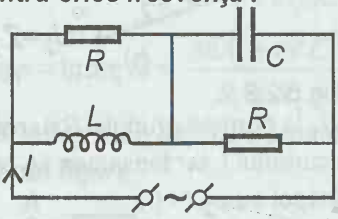
Cu ajutorul *numerelor* ***complexe***, aplicând formula divizorului de tensiune, avem :

$$\bar{U}_2 = U_1 : \left[1+\left(\frac{1}{R}+j\omega C\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)\right] = U_1 : \left[3+j\left(R\omega C-\frac{1}{R\omega C}\right)\right]. \quad (5)$$

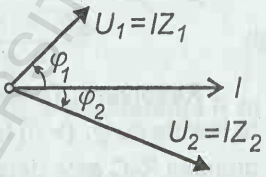
U_2 în fază cu U_1 implică anularea parantezei : $\omega C = 1 / R$ şi atunci $U_2 = U_1 / 3$.

5.2.7. ***Aflaţi condiţia pentru parametrii circuitului din figură, astfel ca acesta să fie echivalent cu un rezistor (element activ) pentru orice frecvenţă .***

Fig.5.2.7



a)



b)

Rezolvare. Faţă de curentul I tensiunea U_1 la bornele grupului RL este defazată înainte cu φ_1 (> 0) , iar tensiunea U_2 la bornele grupului RC este defazată înapoi cu φ_2 (< 0) :

$$\sin\varphi_1 = \frac{1/(\omega L)}{\sqrt{1/R^2+1/(\omega L)^2}}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{-\omega C}{\sqrt{1/R^2+(\omega C)^2}}. \quad (1)$$

Pentru ca tensiunea rezultantă $\bar{U}_1 + \bar{U}_2$ să fie în fază (coliniară) cu I , adică circuitul să fie pur *rezistiv*, trebuie ca :

$$U_1\sin\varphi_1 + U_2\sin\varphi_2 = 0 , \quad (2)$$

dar $U_1 = I : \sqrt{1/R^2+1/(\omega L)^2}$, $U_2 = I : \sqrt{1/R^2+(\omega C)^2}$ (3)

şi atunci condiţia (2) devine :

$$\frac{1/(\omega L)}{1/R^2+1/(\omega L)^2} - \frac{\omega C}{1/R^2+(\omega C)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{L/C}. \quad (4)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{Z} = \frac{Rj\omega L}{R+j\omega L} + \frac{R/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)} =$$

$$= \frac{Rj\omega L(R-j\omega L)}{R^2+(\omega L)^2} + \frac{[R/(j\omega C)][R-1/(j\omega C)]}{R^2+1/(\omega C)^2}, \quad (5)$$

condiţia cerută înseamnă : Im $\bar{Z} = 0$,

$$\frac{R^2\omega L}{R^2+(\omega L)^2}-\frac{R^2/(\omega C)}{R^2+1/(\omega C)^2}=0 \;\rightarrow\; R=\sqrt{L/C}\,. \qquad (6)$$

5.2.8. ***Aflaţi impedanţa circuitului din figură .***

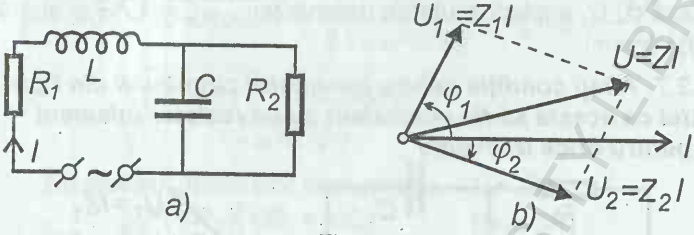


Fig.5.2.8

Rezolvare. Tensiunea U_1 la bornele grupului R_1L este defazată înainte cu φ_1 (> 0) faţă de curentul I, iar tensiunea U_2 la bornele grupului R_2C este defazată înapoi cu φ_2 (< 0) :

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \omega L / R_1\,, \quad \mathrm{tg}\varphi_2 = -\omega C R_2\,. \qquad (1)$$

Din diagrama fazorială rezultă :

$$Z^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1Z_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \qquad (2)$$

$$Z_1^2 = R_1^2 + \omega^2L^2\,, \quad Z_2^2 = 1 : \left(1/R_2^2 + \omega^2L^2\right), \qquad (3)$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 =$$

$$= \frac{R_1 - \omega L\,\omega C R_2}{\sqrt{R_1^2+\omega^2L^2}\sqrt{1+(\omega CR_2)^2}}\,, \qquad (4)$$

$$Z^2 = R_1^2 + \omega^2L^2 + \frac{R_2^2}{1+(\omega CR_2)^2} + 2\sqrt{R_1^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R_2}{\sqrt{1+(\omega CR_2)^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{R_1-\omega^2LCR_2}{\sqrt{R_1^2+\omega^2L^2}\sqrt{1+(\omega CR_2)^2}} = \frac{(R_1+R_2-\omega^2LCR_2)^2+(\omega L+\omega CR_1R_2)^2}{1+(\omega CR_2)^2}\,, \qquad (5)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Z_1\sin\varphi_1 + Z_2\sin\varphi_2}{Z_1\cos\varphi_1 + Z_2\cos\varphi_2} = \frac{\omega L\left(1+\omega^2C^2R_2^2\right)-\omega CR_2^2}{R_1\left(1+\omega^2C^2R_2^2\right)+R_2}\,. \qquad (6)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{Z} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2/(j\omega C)}{R_2+1/(j\omega C)} =$$

BCU "ŞTEFAN CEL MARE" SUCEAVA UNIVERSITY LIBRARY

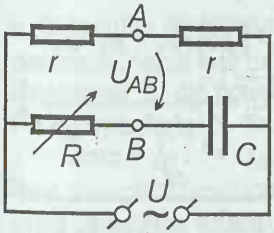
$$= \frac{R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega(L + CR_1R_2)}{1 + j\omega CR_2} =$$

$$= \frac{R_1 + R_2 + \omega^2 C^2 R_1 R_2^2 + j(\omega L + \omega^3 C^2 L R_2^2 - \omega C R_2^2)}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}, \quad (7)$$

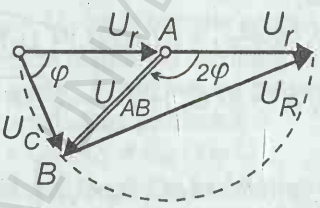
$$Z = |\bar{Z}| = \frac{\sqrt{(R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2)^2 + \omega^2 (L + CR_1R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega CR_2)^2}}, \quad (8)$$

$$\text{tg}\varphi = \text{tg}\arg \bar{Z} = \frac{\omega L(1 + \omega^2 C^2 R_2^2) - \omega C R_2^2}{R_1 + R_2 + \omega^2 C^2 R_1 R_2^2}. \quad (9)$$

5.2.9. ***Aflaţi cum depinde tensiunea*** U_{AB} ***de rezistenţa*** R ***în montajul din figură .***



a)



b)

Fig.5.2.9

Rezolvare. Tensiunea *U* se compune pe de o parte din cele două tensiuni în fază U_r, iar pe de altă pare se compune fazorial din tensiunile U_R şi U_C care sunt defazate cu $\pi/2$ între ele. Dar atunci punctul B se află pe un cerc, deci U_{AB} = const = $U/2$ şi se schimbă doar defazajul lui U_{AB} faţă de *U* :

$$\text{tg}\varphi = U_R : U_C = R : [1/(\omega C)] = \omega CR. \quad (1)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{U}_{AB} = -U/2 + U\frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{U}{2}\frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR} =$$

$$= (U/2)\, e^{-j2\varphi}, \quad \text{unde} \quad \text{tg}\varphi = \omega CR. \quad (2)$$

Montajul poate servi ca *rotitor de fază* .

5.2.10. ***În montajul din figură se cunosc*** U , R , $C_{1,2}$, ω .
Aflaţi tensiunea U_1 ***de pe rezistor .***

Rezolvare. $I = U_1 Y_1 = U_1 \sqrt{1/R^2 + \omega^2 C_1^2}$,

$$U_2 = \frac{1}{\omega C_2} I = U_1 \frac{1}{\omega C_2} \sqrt{1/R^2 + \omega^2 C_1^2} ,$$

(1)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\omega C_1 R \rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{-\omega C_1 R}{\sqrt{1+(\omega C_1 R)^2}}. \qquad (2)$$

Conform diagramei *fazoriale* :

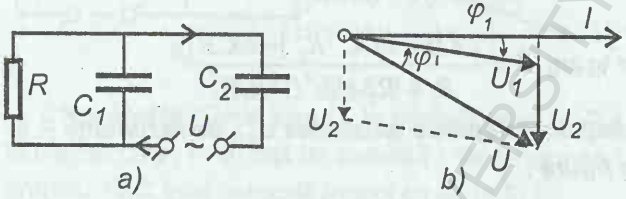


Fig.5.2.10

$$U^2 = U_1^2 \cos^2\varphi_1 + (U_1|\sin\varphi_1| + U_2)^2 = U_1^2 \left[\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega^2 C_2^2}\left(1/R^2 + \omega^2 C_1^2\right) + 2\frac{1}{\omega C_2}\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C_1^2} \cdot \frac{\omega C_1}{\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C_1^2}} \right] =$$

$$= U_1^2 \cdot \frac{1}{\omega^2 C_2^2}\left[1/R^2 + (\omega C_1 + \omega C_2)^2\right], \; U_1 = U \frac{\omega C_2}{\sqrt{1/R^2 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2}}. \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\omega C_1 R , \quad \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi_1) = \frac{U_2 - U_1 \sin\varphi_1}{U_1 \cos\varphi_1} =$$

$$= \frac{1 + \omega^2 C_1 (C_1 + C_2) R^2}{\omega C_2 R}. \qquad (4)$$

Defazajul tensiunii U_1 faţă de U : $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi_1 + \varphi_1) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi_1) + \operatorname{tg}\varphi_1}{1 - \operatorname{tg}(\varphi' - \varphi_1) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{1}{\omega (C_1 + C_2) R}. \qquad (5)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{U}_1 = \frac{U}{1 + (1/R + \mathrm{j}\omega C_1)/(\mathrm{j}\omega C_2)} = U \frac{\omega C_2}{\omega (C_1 + C_2) - \mathrm{j}/R}, \qquad (6)$$

$$U_1 = |\bar{U}_1| = U \frac{\omega C_2}{|\omega (C_1 + C_2) - \mathrm{j}/R|} = U \frac{\omega C_2}{\sqrt{\omega^2 (C_1 + C_2)^2 + 1/R^2}} \qquad (7)$$

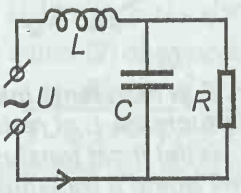
BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi *defazajul* tensiunii U_1 faţă de U rezultă din (6) :

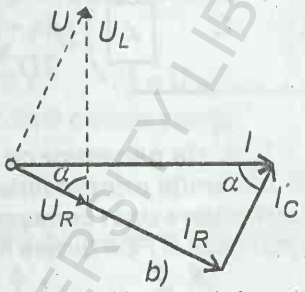
$$\mathrm{tg}\varphi' = (1/R) : [\omega(C_1 + C_2)] . \qquad (8)$$

5.2.11. ***În montajul din figură*** U = 220 V , L = 1,00 H , C = = 1,00 μF . ***Arătaţi că la frecvenţa*** $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ***curentul prin rezistor*** nu ***depinde de rezistor şi aflaţi valoarea acestui curent.***

Fig.5.2.11



a)



b)

Rezolvare. Faţă de curentul I, tensiunea U_L este defazată cu $\pi/2$ înainte, iar tensiunea $U_R = U_C$ de la bornele grupului RC este defazată înapoi faţă de I, conform diagramei fazoriale din figură. Unghiurile α din figură sunt egale , având laturile perpendiculare. Pe de altă parte, în virtutea condiţiei din problemă :

$$\cos\alpha = I_C : I = U_R\omega C : I = U_R : U_L = U_R : (I\omega L) , \qquad (1)$$

deci triunghiul tensiunilor este *dreptunghic* şi asemenea cu triunghiul curenţilor, atunci : $I_R = I_C\mathrm{tg}\alpha = I_C \cdot U : U_R = U_R\omega C \cdot U : U_R =$

$$= U\,\omega C = U : (\omega L) = U \cdot \sqrt{C/L} = 0{,}22 \text{ A} \qquad (2)$$

şi este defazat cu $\pi/2$ în urma tensiunii U .

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** : $\bar{I}_R = \bar{U}_R / R =$

$$= \frac{1}{R}\frac{U}{1+\mathrm{j}\omega L(1/R+\mathrm{j}\omega C)} = \frac{U}{R(1-\omega^2 LC)+\mathrm{j}\omega L} .$$

(3) Condiţia de independenţă a curentului I_R de R este atunci

$1 - \omega^2 LC = 0$ şi curentul va fi $U : (\omega L)$, defazat înapoi cu $\pi/2$ faţă de U .

5.2.12. ***În montajul din figură*** U_o=220 V,ν=50 Hz,C= 0,50 μF, I = 10 mA , U = 180 V. ***Aflaţi puterea consumată de aparatul*** A.

Rezolvare. $U_C = I : (\omega C) = 63{,}7$ V . (1)

Teorema ***cosinusului*** aplicată în triunghiul tensiunilor dă :

$$\cos\alpha = (U_C^2 + U_o^2 - U^2) : (2U_C U_o) \rightarrow \alpha = 44^o , \qquad (2)$$

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

aceasta înseamnă că în adevăr defazajul φ dintre U_0 şi I este *capacitiv* : $\varphi = -(\pi/2 - \alpha) = -46^\circ$. Atunci puterea consumată :

$$P = U_0 I \cos\varphi = 1{,}53 \text{ W} . \qquad (3)$$

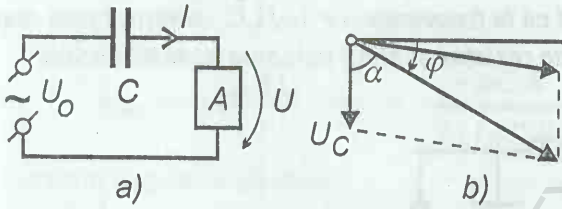


Fig.5.2.12

5.2.13. ***Un generator cu t.e.m.*** E ***şi rezistenţă internă neglijabilă transmite printr-o linie de inductanţă*** L ***şi rezistenţă neglijabilă putere unui consumator, astfel încât tensiunea la consumator este*** U . ***Ce putere*** maximă ***poate fi transmisă ?***

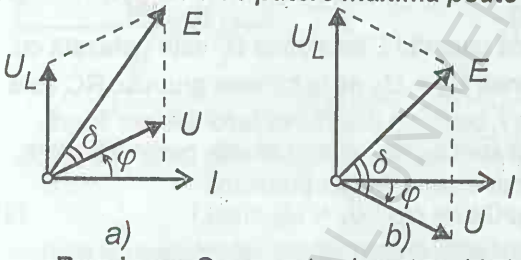


Fig.5.2.13

Rezolvare. Consumatorul poate schimba defazajul φ (factorul de putere $\cos\varphi$) cu ajutorul elementelor *reactive*. Considerăm cele două cazuri din figură : $\varphi > 0$ (defazaj inductiv) , $\varphi < 0$ (defazaj capacitiv) . Tensiunea pe linie (pe inductanţa L) U_L este defazată înainte cu $\pi/2$ faţă de curent : $I = U_L : (\omega L)$,

$$P = U I \cos\varphi = (U U_L \cos\varphi) : (\omega L) , \qquad (1)$$

dar din *teorema sinusurilor* aplicată în triunghiul tensiunilor, avem:

$$U_L : \sin\delta = E : \sin(\pi/2 - \varphi) = E : \cos\varphi , \qquad (2)$$

atunci $P = (UE\sin\delta) : (\omega L)$. (3)

Deoarece U , E , ω , L sunt fixe, puterea este *maximă* când $\sin\delta = 1$, $\delta = 90^\circ$, adică $E \perp U$, deci defazajul φ trebuie să fie de tip *capacitiv*, ca în figura a doua .

$$P_{max} = E U : (\omega L) , \qquad \operatorname{tg}\varphi = -U : E . \qquad (4)$$

5.2.14. ***În montajul din figură se cunosc*** R , L , ω . ***Pentru ce valoare a capacităţii condensatorului, curentul total*** I ***nu se schimbă la închiderea sau deschiderea întrerupătorului ?***

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. Când întrerupătorul este deschis :

$I = U : \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, $\mathrm{tg}\varphi = \omega L : R$, $\sin\varphi = \omega L : \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. (1)

Când întrerupătorul este închis, avem diagrama fazorială din figură. *Teorema* ***cosinusului*** în triunghiul curenţilor dă :

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2 - 2 I_R I_C \cos(\pi/2 - \varphi) , \qquad (2)$$

unde $I = U : Z$, $I_R = U : \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, $I_C = U\omega C$,

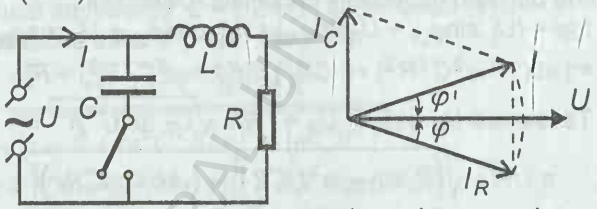
(3) atunci (2) dă *impedanţa* (după calcule simple) :

$$Z = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + (\omega CR)^2} . \qquad (4)$$

Această impedanţă trebuie să fie egală cu cea de la (1) cu întrerupătorul deschis :

$$\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + (\omega CR)^2} = R^2 + \omega^2 L^2 \rightarrow C = 2L : R^2 + \omega^2 L^2 . \qquad (5)$$

Fig.5.2.14



Deoarece fazorul I doar se roteşte prin cuplarea condensatorului ($I_R = I$) , noul defazaj φ' este egal cu cel vechi, dar de tip *capacitiv* ; în adevăr, ţinând seama de (5) :

$$|\sin\varphi'| = I_C : (2I) = [U\omega C : (2U)] \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sin\varphi . \qquad (6)$$

Reciproc, se putea obţine de aici condiţia (5) .

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** : $|R + j\omega L| =$

$$= \left| \frac{(R + j\omega L)/(j\omega C)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \right| = \frac{|R + j\omega L|}{|j\omega CR + 1 - \omega^2 LC|} , \qquad (7)$$

de unde rezultă (5) şi de asemenea,

$\mathrm{tg}\varphi = \omega L : R$, $\omega CR : (1 - \omega^2 LC) = \mathrm{tg}\, 2\varphi$, etc. (8)

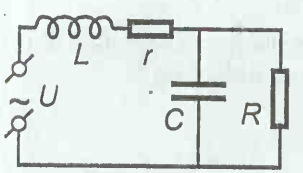
5.2.15. ***În montajul din figură se cunosc mărimile specificate. Aflaţi tensiunea*** U_R ***la bornele rezistorului*** R .

Rezolvare. Diagrama fazorială este reprezentată în figură.

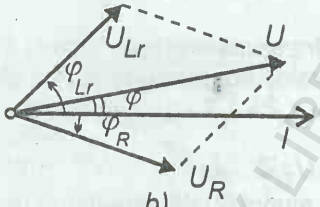
$U_{Lr}^2 = I^2 (r^2 + \omega^2 L^2)$, $\mathrm{tg}\varphi_{Lr} = \omega L / r$, (1)

$$U_R^2 = I^2 : (1/R^2 + \omega^2 C^2) = I^2 R^2 : (1 + \omega^2 C^2 R^2),$$

$$\mathrm{tg}\varphi_R = -\omega CR . \qquad (2)$$



a)



b)

Fig.5.2.15

Teorema ***cosinusului*** în triunghiul tensiunilor dă :

$$U^2 = U_{Lr}^2 + U_R^2 + 2U_{Lr}U_R\cos(\varphi_{Lr} - \varphi_R) , \qquad (3)$$

$$\cos(\varphi_{Lr} - \varphi_R) = \cos\varphi_{Lr}\cos\varphi_R + \sin\varphi_{Lr}\sin\varphi_R =$$

$$= (r - \omega^2 LCR) : \left(\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}\right). \qquad (4)$$

$$U^2 = I^2 [(R + r - \omega^2 LCR)^2 + (\omega L + \omega CRr)^2] : (1 + \omega^2 C^2 R^2) = I^2 Z^2, \qquad (5)$$

de unde obţinem *impedanţa* circuitului. Defazajul :

$$\mathrm{tg}\varphi = (U_{Lr}\sin\varphi_{Lr} + U_R\sin\varphi_R) : (U_{Lr}\cos\varphi_{Lr} + U_R\cos\varphi_R) =$$

$$= [\omega L(1 + \omega^2 C^2 R^2) - \omega CR^2] : [r(1 + \omega^2 C^2 R^2) + R] . \qquad (6)$$

Tensiunea U_R este $U_R = I R : \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} =$

$$= UR : \sqrt{\left(R + r - \omega^2 LCR\right)^2 + \left(\omega L - \omega CRr\right)^2} \qquad (7)$$

având defazajul faţă de tensiunea aplicată U :

$$\mathrm{tg}(\varphi_R - \varphi) = (\mathrm{tg}\varphi_R - \mathrm{tg}\varphi) : (1 - \mathrm{tg}\varphi_R\,\mathrm{tg}\varphi) =$$

$$= (-\omega CRr - \omega L)(1 + \omega^2 C^2 R^2) : [(r + R - \omega^2 LCR)(1 + \omega^2 C^2 R^2)]. \qquad (8)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{U}_R = U : [1 + (r + j\omega L)(1/R + j\omega C)] =$$

$$= UR : [r + R - \omega^2 LCR + j(\omega L - \omega CRr)] , \qquad (9)$$

de unde rezultă U_R (7) şi defazajul (8) (U_R este defazat în urmă faţă de U) .

5.2.16. ***Un generator de tensiune alternativă*** U ***şi rezistenţă internă*** r ***alimentează consumatorul din figură . Aflaţi puterea totală, puterea utilă şi randamentul .***

Rezolvare. $U_r = r I ,$

$$U_R = I : \sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2} = IR : \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} \ , \ \mathrm{tg}\varphi_C = -\omega CR . \qquad (1)$$

$$U^2 = U_r^2 + U_R^2 + 2U_r U_R\cos\varphi_C =$$

BUCUREŞTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$= I^2 [(r + R)^2 + \omega^2 C^2 R^2 r^2] : (1 + \omega^2 C^2 R^2)$, (2)

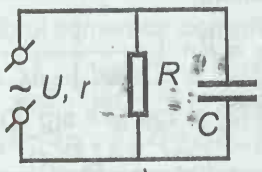
de unde rezultă *impedanţa* întregului circuit.

Defazajul rezultă din :

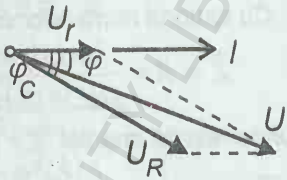
$\operatorname{tg}\varphi = (U_r \sin\varphi_r + U_R \sin\varphi_C) : (U_r \cos\varphi_r + U_R \cos\varphi_C) =$

$= R(\omega CR) : [r(1 + \omega^2 C^2 R^2) + R]$. (3)

Fig.5.2.16



a)



b)

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$\bar{Z} = r + [R / (j\omega C)] : [R + 1 / (j\omega C)] = [r(1 + j\omega CR) + R] : (1 + j\omega CR) =$

$= [r + R + \omega^2 C^2 R^2 r - j\omega CR^2] : (1 + \omega^2 C^2 R^2)$, (4)

de unde rezultă *impedanţa* $Z = |\bar{Z}|$ (2) şi *defazajul* (3) .

Puterea *totală* este $P_t = U I \cos\varphi =$

$$= \frac{U^2}{Z} \frac{r\left(1+\omega^2 C^2 R^2\right)+R}{\sqrt{\left(r+R+\omega^2 C^2 R^2 r\right)^2+\left(\omega CR^2\right)^2}} =$$

$= U^2 (r + R + \omega^2 C^2 R^2 r) : [(r + R)^2 + (\omega CRr)^2]$. (4)

Puterea *utilă* este $P_u = U_R I \cos\varphi_C =$

$$= \frac{I^2 R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} = U^2 \frac{R}{\left(r+R\right)^2+\left(\omega CRr\right)^2} \quad (5)$$

şi *randamentul* :

$\eta = P_u : P_t = R : (r + R + \omega^2 C^2 R^2 r)$. (6)

5.2.17. ***Aflaţi impedanţa circuitului din figură şi defazajul tensiunii de pe condensator faţă de tensiunea aplicată.***

Rezolvare. $U_R = R I$, $I = I_L - I_C$, $U_C = I : |1 / (\omega L) - \omega C|$. (1)

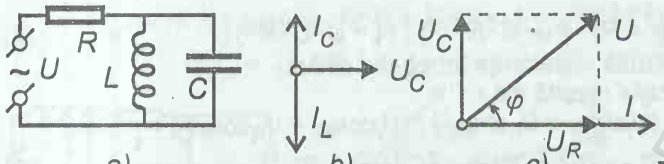
$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2 \{R^2 + 1 : [1 / (\omega L) - \omega C]^2\} = I^2 Z^2$, (2)

$Z = \sqrt{R^2 + 1 : [1/(\omega L) - \omega C]^2} = \sqrt{R^2 [1/(\omega L) - \omega C]^2 + 1} : |1/(\omega L) - \omega C|$, (3)

$\operatorname{tg}\varphi = 1 : \{R[1 / (\omega L) - \omega C]\}$, $\cos\varphi = R / Z$, (4)

$\varphi_C = \pi / 2 - \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi_C = R[1 / (\omega L) - \omega C] = 1 : \operatorname{tg}\varphi$. (5)

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



a) b) c) Fig.5.2.17

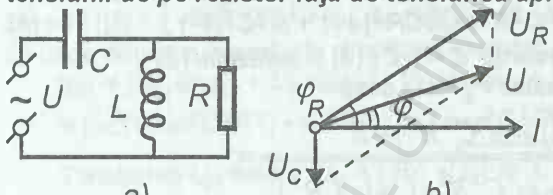
Cu ajutorul *numerelor complexe* :

$$\bar{Z} = R + \frac{j\omega L/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)} = R + j\frac{1}{1/(\omega L) - \omega C}, \qquad (6)$$

de unde rezultă imediat $Z = |\bar{Z}|$ (3) şi $\operatorname{tg}\varphi$ ($\varphi = \arg \bar{Z}$) (4) .

$$\bar{U}_C = U : \left[1 + R\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)\right] \rightarrow \operatorname{tg}\varphi_C = -R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \qquad (7)$$

5.2.18. ***Aflaţi impedanţa circuitului din figură şi defazajul tensiunii de pe rezistor faţă de tensiunea aplicată .***



a) b) Fig.5.2.18

Rezolvare. $U_C = I : (\omega C)$, $U_R = I : \sqrt{1/R^2 + 1/(\omega L)^2} =$

$$= I\omega LR : \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi_R = R : (\omega L) , \qquad (1)$$

$$Z^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{(\omega LR)^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + 2 \cdot \frac{1}{\omega C} \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \frac{-R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} =$$

$$= \frac{\left(R - \omega^2 CLR\right)^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left(R^2 + \omega^2 L^2\right)} , \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}(-1) + \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}{\frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}} =$$

$$= [\omega^2 CLR^2 - R^2 - \omega^2 L^2] : (\omega^3 CL^2 R) . \qquad (3)$$

Defazajul tensiunii U_R faţă de tensiunea aplicată :

$$\operatorname{tg}(\varphi_R-\varphi)=\frac{\dfrac{R}{\omega L}-\dfrac{\omega^2CLR^2-R^2-\omega^2L^2}{\omega^3CL^2R}}{1+\dfrac{R}{\omega L}\cdot\dfrac{\omega^2CLR^2-R^2-\omega^2L^2}{\omega^3CL^2R}}=$$

$$=\frac{\omega L\left(R^2+\omega^2L^2\right)}{\left(\omega^2CLR-R\right)\left(R^2+\omega^2L^2\right)}=\frac{\omega L}{\omega^2CLR-R}\,. \qquad (4)$$

Cu ajutorul *numerelor* **complexe** :

$$\bar{Z}=\frac{1}{j\omega C}+\frac{j\omega LR}{j\omega L+R}=\frac{R-\omega^2CLR+j\omega L}{\omega C(jR-\omega L)}=$$

$$=\frac{\omega^3CL^2R+j\left(\omega^2CLR^2-R^2-\omega^2L^2\right)}{-\omega C\left(R^2+\omega^2L^2\right)}\,, \qquad (5)$$

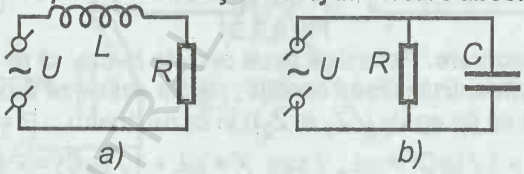
de unde rezultă Z şi $\operatorname{tg}\varphi$.

$$\bar{U}_R=U:\left[1+\frac{1}{j\omega C}\left(\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{R}\right)\right]=U\,\frac{-\omega^2CLR}{R-\omega^2CLR+j\omega L}\,, \qquad (6)$$

de unde rezultă defazajul (4) .

5.2.19. ***Aflaţi condiţia pentru*** R , L , C , ***astfel ca cele două circuite din figură să prezinte acelaşi defazaj în valoare absolută .***

Fig.5.2.19



Rezolvare. $\operatorname{tg}\varphi=\omega L/R=-\operatorname{tg}\varphi'=\omega CR\ \rightarrow\ L=R^2C$.

5.2.20. ***Un circuit paralel de c.a. format dintr-o inductanţă , un condensator variabil şi un rezistor de rezistenţă*** R = 316 Ω, ***este alimentat de un generator care debitează*** curent constant I = 300 mA . ***Pentru capacitatea*** C_o = 150 μF, ***curentul prin bobină este*** I_L = 300 mA . ***Pentru capacitatea*** C_r = 100 μF ***curentul prin rezistor este maxim . Aflaţi : inductanţa*** L ***şi frecvenţa*** ν ***a generatorului .***

Rezolvare. $I=U\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\left(\dfrac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}$, $I_L=U_o:(\omega L)$, (1)

$$I=I_L\omega L\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C_o\right)^2}\,. \qquad (2)$$

BCU IAŞI UNIVERSITY LIBRARY

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{I}{\sqrt{1+R^2\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}}\ ,\quad I_{R\,max} \rightarrow 1/(\omega L) = \omega C_r\ , \qquad (3)$$

dar atunci (2) devine :

$$I = I_L \frac{1}{\sqrt{LC_r}} L \sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{\sqrt{LC_r}}{L}-\frac{C_o}{\sqrt{LC_r}}\right)^2} \rightarrow$$

$$L = R^2\left[\frac{I^2}{I_L^2}C_r - \left(\sqrt{C_r}-\frac{C_o}{\sqrt{C_r}}\right)^2\right] = 7{,}50\ \text{H}\ , \qquad (4)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_r}} = 5{,}8\ \text{Hz}\ . \qquad (5)$$

5.2.21. ***Circuitul din figură poate fi înlocuit în mod echivalent cu unul din celelalte două . Care ?***

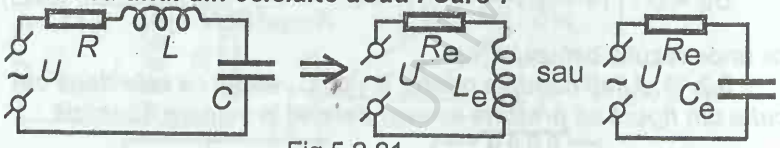


Fig.5.2.21

Rezolvare. *Pentru ca două circuite în* ***c.a.*** *să fie echivalente trebuie îndeplinite* ***două*** *condiţii : părţile active să fie egale şi părţile reactive să fie egale* ($\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$). În cazul nostru : $R = R_e$ şi

$X = \omega L - 1/(\omega C) = \omega L_e$? sau $X = \omega L - 1/(\omega C) = -1/(\omega C_e)$? (1)

Prin urmare, dacă $X > 0$, adică circuitul este de tip *inductiv*, atunci el este echivalent cu $\{R_e\ ,\ L_e = X/\omega\}$, altfel dacă $X < 0$, adică circuitul este de tip *capacitiv*, atunci el este echivalent cu $\{R_e\ ,\ C_e = -1/(\omega X)\}$. Folosind *numerele* ***complexe*** avem o singură condiţie : $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$.

5.2.22. ***Într-un circuit format dintr-o bobină*** **reală** ***în serie cu un condensator, cunoaştem tensiunile*** $U = 75$ V , $U_b = 35$ V, $U_C = 100$ V ***şi curentul*** $I = 100$ mA . ***Ştiind frecvenţa de rezonanţă*** $\nu_o = 330$ Hz, ***aflaţi :*** L , C ***şi*** ν .

Rezolvare. $Z_b = U_b / I = 350\ \Omega$, $X_C = U_C / I = 1{,}00\ \text{k}\Omega$,

$Z = U / I = 750\ \Omega$. (1)

BCU CLUJ-NAPOCA UNIVERSITY LIBRARY

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 = Z_b^2 + X_C^2 - 2X_L X_C \rightarrow$$

$$X_L = (Z_b^2 + X_C^2 - Z^2) : (2X_C) = 280\ \Omega . \qquad (2)$$

$$R = \sqrt{Z_b^2 - X_L^2} = 210\ \Omega , \qquad (3)$$

$$X_L = 2\pi\nu L , \quad X_C = 1 : (2\pi\nu C) \rightarrow \sqrt{X_L / X_C} = 2\pi\nu\sqrt{LC} = \nu / \nu_o$$

$$\rightarrow \quad \nu = \nu_o \sqrt{X_L / X_C} = 175\ \text{Hz} , \qquad (4)$$

$$L = X_L : (2\pi\nu) = 0{,}25\ \text{H} , \quad C = 1 : (2\pi\nu X_C) = 0{,}91\ \mu\text{F}. \qquad (5)$$

5.2.23. *În montajul din figură se cunosc:* $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $X_{L1} = 110\ \Omega$, $X_{L2} = 20\ \Omega$, $X_{L3} = 15\ \Omega$, $X_{C1} = 40\ \Omega$, $X_{C2} = 50\ \Omega$, $X_{C3} = 30\ \Omega$, $U = 100$ V. ***Calculaţi defazajele, curenţii şi tensiunile .***

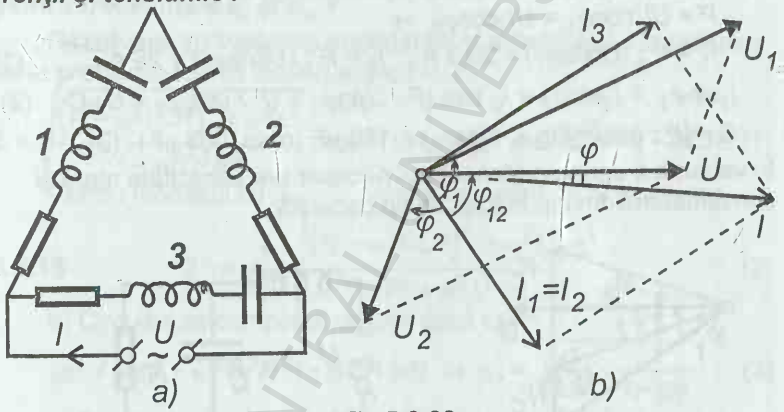


Fig.5.2.23

Rezolvare. Defazajele ramurilor sunt :

$$\text{tg}\varphi_1 = (X_{L1} - X_{C1}) : R_1 = 7{,}0 , \quad \varphi_1 = 81^o\ 52' ;$$

$$\text{tg}\ \varphi_2 = (X_{L2} - X_{C2}) : R_2 = -1{,}50 , \quad \varphi_2 = -56^o\ 18' ,$$

$$\text{tg}\ \varphi_3 = (X_{L3} - X_{C3}) : R_3 = -0{,}75 , \quad \varphi_3 = -36^o\ 52' , \qquad (1)$$

$$\text{tg}\ \varphi_{12} = (X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2}) : (R_1 + R_2) = 1{,}33 , \quad \varphi_{12} = 53^o\ 8'.$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{Z_{12}} = \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2})^2}} = 2{,}0\ \text{A} ,$$

$$I_3 = \frac{U}{Z_3} = \frac{U}{\sqrt{R_3^2 + X_{L3}^2}} = 4{,}0\ \text{A} . \qquad (2)$$

BCU "MIHAI EMINESCU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Defazajul dintre tensiunea U şi curentul total I : $\operatorname{tg}\varphi =$
$= (I_1\sin\varphi_{12} + I_3\sin\varphi_3) : (I_1\cos\varphi_{12} + I_3\cos\varphi_3) = 0{,}40$, $\varphi = 21^o\,48'$, (3)

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + 2I_1I_3\cos(\varphi_{12} - \varphi_3)} = 4{,}47 \text{ A} . \quad (4)$$

$U_1 = Z_1I_1 = 142$ V , $U_2 = Z_2I_1 = 144$ V . (5)

Defazajele acestor tensiuni faţă de U :

$\varphi_1' = \varphi_1 - \varphi_{12} = 28^o\,44'$; $\varphi_2' = \varphi_2 - \varphi_{12} = -109^o\,26'$. (6)

5.2.24. ***Pentru a mări factorul de putere al unui consumator de la*** $\cos\varphi_1 = 0{,}60$ ***la*** $\cos\varphi_2 = 0{,}80$ ***se montează în derivaţie pe consumator un condensator. Ştiind tensiunea de alimentare*** $U = 220$ V , $\nu = 50$ Hz ***şi puterea consumatorului*** $P = 4{,}4$ kW ***, aflaţi valoarea capacităţii şi valorile curenţilor.***

Rezolvare. Consumatorul trebuie să fie de tip inductiv :

$P = UI_1\cos\varphi_1 = UI_2\cos\varphi_2 \rightarrow$

$I_1 = P : (U\cos\varphi_1) = 33{,}3$ A , $I_2 = P : (U\cos\varphi_2) = 25$ A. (1)

$I_1\sin\varphi_1 \mp I_2\sin\varphi_2 = I_C$ sau $(P/U)\operatorname{tg}\varphi_1 \mp (P/U)\operatorname{tg}\varphi_2 = U\omega C$, (2)

$C = [P : (\omega U^2)](\operatorname{tg}\varphi_1 \mp \operatorname{tg}\varphi_2) = 169$ μF (resp. 603 μF) . (3)

În varianta a doua condensatorul necesar are capacitate mare şi consumatorul devine în total de tip capacitiv.

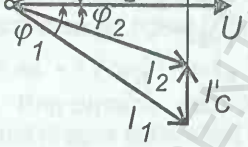


Fig.5.2.24

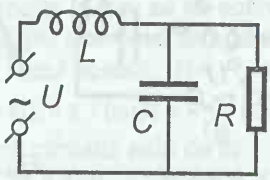


Fig.5.2.26

5.2.25. ***Un circuit serie are elementele :*** $R = 1{,}00$ kΩ , $L =$
$= 0{,}40$ H , $C = 0{,}20$ μF . ***Pentru două frecvenţe*** $f_{1,2}$ ***ale tensiunii aplicate, puterea activă devine egală cu puterea reactivă (în modul). Aflaţi : a) Defazajul dintre curent şi tensiune în cele două cazuri , b) Frecvenţele*** $f_{1,2}$.

Rezolvare. $P = UI\cos\varphi = (U^2/Z)\cdot R/Z$,

$P_r = UI\sin\varphi = (U^2/Z^2)[\omega L - 1/(\omega C)]$.

$$P = |P_r| \rightarrow R = |\omega L - 1/(\omega C)| , \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = [\omega L - 1/(\omega C)] : R , \quad \varphi = \pm\pi/4 . \quad (2)$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\pm R = \omega L - 1/(\omega C) \rightarrow$

$$f_{1,2} = \frac{R}{4\pi L}\left(\pm 1 + \sqrt{1 + 4L/\left(R^2 C\right)}\right) = 796 \text{ Hz , resp. } 398 \text{ Hz} \quad (3)$$

faţă de frecvenţa de rezonanţă $f_o = 1 : \left(2\pi\sqrt{LC}\right) = 563$ Hz . (4)

Lărgimea de bandă şi factorul de calitate :

$$B = f_1 - f_2 = 400 \text{ Hz} , \quad Q = f_o : B = 1{,}41 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (5)$$

5.2.26. În montajul din figură toate elementele sunt cunoscute . Aflaţi impedanţa circuitului . b) Pentru ce frecvenţă ω_r ***circuitul se comportă*** **rezistiv** ***? c) Pentru ce frecvenţă*** ω_o ***impedanţa circuitului este egală în modul cu a circuitului având*** L ***şi*** C ***permutate ? d) Care este puterea activă în circuitul dat pentru frecvenţele*** ω_r ***şi*** ω_o ***?***

Rezolvare. a) Valoarea impedanţei şi a defazajului le preluăm de la problema 5.2.15 făcând acolo $r = 0$:

$$Z = \sqrt{\frac{\left(R - \omega^2 LCR\right)^2 + \omega^2 L^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}} , \quad \text{tg}\varphi = (\omega L / R)(1 + \omega^2 C^2 R^2) - \omega CR. \quad (1)$$

Pentru montajul cu L , C permutate avem de la problema 5.2.18 :

$$Z' = \frac{1}{\omega C}\sqrt{\frac{\left(R - \omega^2 CLR\right)^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} . \quad (2)$$

b) Circuitul se comportă *rezistiv* dacă $\text{tg}\varphi = 0$:

$$(\omega L / R)(1 + \omega^2 C^2 R^2) - \omega CR = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}} . \quad (3)$$

c) Egalând impedanţele (1) , (2), obţinem :

$1 + \omega^2 C^2 R^2 = \omega^2 C^2 (R^2 + \omega^2 L^2) \rightarrow 1 = \omega_o^4 C^2 L^2$,

$$\omega_o = 1 : \sqrt{LC} . \quad (4)$$

d) Pentru $\omega = \omega_r$: $Z \rightarrow L : (RC)$, $(\varphi \rightarrow 0)$,

$$P = U^2 / Z = U^2 RC / L . \quad (5)$$

Pentru $\omega = \omega_o$: $Z \rightarrow \sqrt{\frac{L/C}{1 + R^2 C/L}}$, $\text{tg}\varphi \rightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$,

$$P = (U^2 / Z)\cos\varphi_o = U^2 RC / L . \quad (6)$$

5.2.27. Cele două circuite din figură sunt echivalente . Cunoscând R = 5,00 Ω , C = 159 μF ***, aflaţi*** R' , C' ***. Calculaţi factorii de putere .***

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

Rezolvare. Pentru *echivalenţă* impedanţele şi defazajele celor două circuite trebuie să fie aceleaşi : $R^2 + 1 : (\omega C)^2 =$

$$=1 : (1 / R'^2 + \omega^2 C'^2)\,, \quad -[1/(\omega C)] : R = -\omega C' R'\,, \qquad (1)$$

de unde rezultă : $R' = R\,[1 + 1 : (\omega CR)^2] = 10{,}0\ \Omega$,

$$C' = C : [1 + (\omega CR)^2] = 79{,}6\ \mu F\,, \qquad (2)$$

$$\cos\varphi = \omega CR : \sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2} = 0{,}707,$$

$$\cos\varphi' = 1 : \sqrt{1+\omega^2 C'^2 R'^2} = \cos\varphi\,. \qquad (3)$$

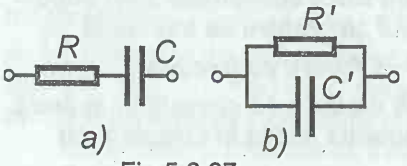


Fig.5.2.27

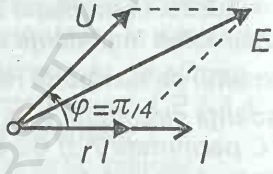


Fig.5.2.28

5.2.28. ***La un consumator puterea activă este egală cu puterea reactivă . Tensiunea la bornele consumatorului*** U = 100 V ***şi curentul*** I = 10,0 A. ***Aflaţi tensiunea sursei cunoscând rezistenţa ei internă .***

Rezolvare. $P = UI\cos\varphi = P_r = UI\sin\varphi \;\rightarrow\; \varphi = 45^o$. (1)

$$E = \sqrt{(rI)^2 + U^2 + 2rIU\cos\varphi} = 140\ V\,. \qquad (2)$$

5.2.29. ***În montajul din figură*** $R_1C_1 = R_2C_2$. ***Calculaţi tensiunea la ieşire şi defazajul ei . Cât devine defazajul dacă*** $R_1C_1 = 1/\omega$ ***?***

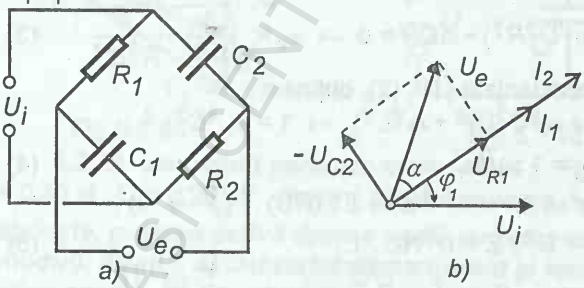


Fig.5.2.29

Rezolvare. $\mathrm{tg}\varphi_1 = -1 : (\omega C_1 R_1)$,

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = -1 : (\omega C_2 R_2) = \mathrm{tg}\varphi_1 \;\rightarrow\; \varphi_1 = \varphi_2\,; \qquad (1)$$

$$U_{R1} = \frac{U_i R_1}{\sqrt{R_1^2 + 1/(\omega C_1)^2}} = \frac{U_i \omega C_1 R_1}{\sqrt{1+(\omega C_1 R_1)^2}}\,,$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$U_{C2} = \frac{U_i}{\omega C_2 \sqrt{R_2^2 + 1/(\omega C_2)^2}} = \frac{U_i}{\sqrt{1+(\omega C_1 R_1)^2}}\ , \qquad (2)$$

$$U_e = \sqrt{U_{R1}^2 + U_{C2}^2} = U_i \sqrt{\frac{1+(\omega C_1 R_1)^2}{1+(\omega C_1 R_1)^2}} = U_i\ . \qquad (3)$$

$\mathrm{tg}\alpha = U_{C2} : U_{R1} = 1 : (\omega C_1 R_1) = -\mathrm{tg}\varphi_1$, $\mathrm{tg}(\alpha - \varphi_1) = -\mathrm{tg}2\varphi_1 =$
$= [2/(\omega C_1 R_1)] : [1 - 1/(\omega C_1 R_1)^2] = 2\omega C_1 R_1 : [(\omega C_1 R_1)^2 - 1]$.(4)

Dacă $R_1 C_1 = 1/\omega$, defazajul tensiunii de ieşire faţă de tensiunea de intrare devine $\pi/2$.

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\underline{U}_e = U_i \left(\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega C_1 R_1}} - \frac{1}{1+R_2 j\omega C_2} \right) = U_i \frac{j\omega C_1 R_1 - 1}{1+j\omega C_1 R_1}\ , \qquad (5)$$

$$U_e = |\ \underline{U}_e| = U_i\ ,\quad \varphi = \arg\ \underline{U}_e = -2\varphi_1\ . \qquad (6)$$

5.2.30. ***În filtrul din figură*** C = 10 μF , ν = 100 Hz ***. Alegeţi valoarea inductanţei astfel încât tensiunea la ieşire să fie de*** n = 10 ori ***: a)mai mare, b) mai mică, decât tensiunea la intrare.***

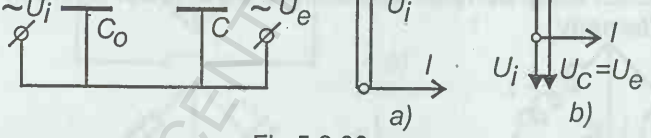


Fig.5.2.30

Rezolvare. Condensatorul C_o de la intrare este irelevant pentru problemă. Vom considera cele două cazuri de defazaj din figură.

a) $U_e = U_i : |\omega L - 1/(\omega C)|\ [1/(\omega C)] = nU_i$, $1 - \omega^2 LC =$
$= 1 : (\mp n)$, $L = (n \pm 1) : (n\omega^2 C) = 0{,}28$ H, resp. 0,23 H . (1)

b) $U_e = U_i : (\omega^2 LC - 1) = U_i / n \rightarrow L = (n+1) : (\omega^2 C) = 2{,}8$ H.(2)

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$\underline{U}_e = U_i : (1 + j\omega L j\omega C) = U_i : (1 - \omega^2 LC)$, etc. (3)

BCU / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5.2.31. ***În montajul din figură*** $R = 7{,}50\ \Omega$, $R_A = 2{,}50\ \Omega$ ***(rezistenţa ampermetrului), inductanţa este ideală. Imediat după închiderea întrerupătorului curentul arătat de ampermetru este*** $i_o = 0{,}20$ A, ***iar după un timp mai lung*** $I = 0{,}40$ A . ***Aflaţi t.e.m.*** E ***şi rezistenţa internă*** r ***ale sursei.***

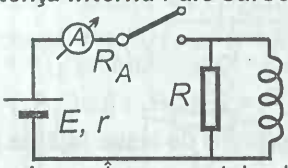


Fig.5.2.31

Rezolvare. În momentul aplicării tensiunii o bobină **ideală** se prezintă ca o *întrerupere* de curent (din cauza t.e.m. de autoinducţie), iar în c.c. se prezintă ca un scurt-circuit (adică invers de cum se prezintă un condensator *ideal*).

În momentul $t = 0$ al închiderii întrerupătorului nu va trece curent prin bobină, ci prin R :

$$i_o = E : (r + R_A + R) . \qquad (1)$$

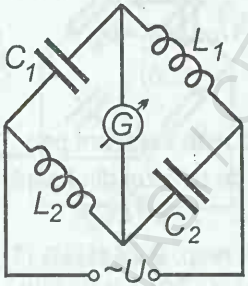
După trecerea unui timp suficient de lung (constanta de timp $\tau = L / R$) inductanţa *ideală* (având rezistenţa proprie zero) reprezintă un scurt-circuit, deci

$$I = E : (r + R_A) . \qquad (2)$$

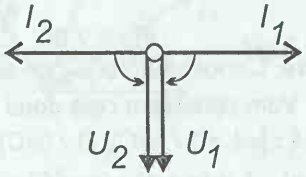
Introducând $r + R_A = E / I$ din (2) în (1) , găsim

$$E = Ri_oI : (I - i_o) = 3{,}0\ \text{V} , \quad r = Ri_o : (I - i_o) - R_A = 5{,}0\ \Omega . \qquad (3)$$

5.2.32. ***Aflaţi condiţia de echilibru a punţii din figură în curent alternativ .***



a)



b)

Fig.5.2.32

Rezolvare. La "echilibrul" punţii **nu** mai trece curent prin galvanometru . Pentru aceasta tensiunea U_1 pe C_1 trebuie să fie identică cu tensiunea U_2 de pe L_2 . Deoarece avem numai elemente *reactive* (ideale), curenţii $I_{1,2}$ din cele două ramuri sunt în fază sau

în *opoziţie* de fază între ei şi sunt în *cuadratură* cu tensiunea aplicată U. Pentru ca tensiunile menţionate $U_{1,2}$ să fie identice trebuie ca $I_{1,2}$ să fie în opoziţie de fază, ca în figură , deci

$$[\omega L_1 - 1 : (\omega C_1)]\,[\omega L_2 - 1 : (\omega C_2)] < 0 . \quad (1)$$

$$U_1 = [1 / (\omega C_1)]\, U : |\, \omega L_1 - 1 : (\omega C_1)|,$$

$$U_2 = \omega L_2\, U : |\, \omega L_2 - 1 : (\omega C_2)| . \quad (2)$$

Condiţia $U_1 = U_2$ dă, ţinând seama de (1) :

$$\omega^2 L_1 C_1 = 1 : (\omega^2 L_2 C_2) \text{ sau } \omega^2 L_1 L_2 = 1 : (\omega^2 C_1 C_2) . \quad (3)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

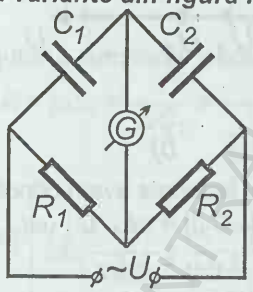
$$\bar{U}_1 = U : (1 + j\omega L_1 \cdot j\omega C_1) = \bar{U}_2 = U : \{1 + [1/j\omega C_2)][1/j\omega L_2)]\} \quad (4)$$

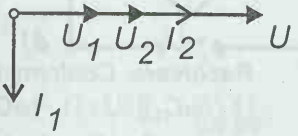
$$\rightarrow \quad \omega^2 L_1 C_1 = 1 : (\omega^2 L_2 C_2) \quad (5)$$

sau direct $\quad j\omega L_1 : [1 / (j\omega C_1)] = [1 / (j\omega C_2)] : (j\omega L_2)$

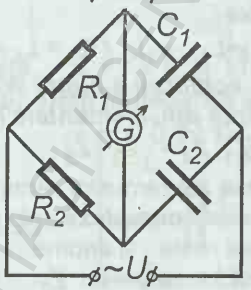
sau $\quad j\omega L_1\, j\omega L_2 = [1 / (j\omega C_1)]\, [1 / (j\omega C_2)] . \quad (6)$

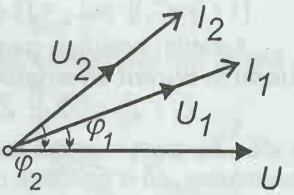
5.2.33. ***Aflaţi condiţia de echilibru a punţii capacitive, în cele două variante din figură .***





a)





b)

Fig.5.2.33

Rezolvare. a) Conform figurii avem condiţia :

$$[1 / (\omega C_1)] \cdot U : [1 / (\omega C_1) + 1 / (\omega C_2)] = R_1 \cdot U : (R_1 + R_2) \rightarrow$$

$$C_1 / C_2 = R_2 / R_1 \quad \text{sau} \quad R_1 / C_2 = R_2 / C_1 . \quad (1)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$R_1 : R_2 = [1 / (j\omega C_1)] : [1 / (j\omega C_2)] \quad (2)$$

sau $$R_2 : (j\omega C_1) = R_1 : (j\omega C_2) \,. \quad (3)$$

b) Conform diagramei fazoriale curenţii $I_{1,2}$ trebuie în primul rând să fie în fază : $tg\varphi_1 = -\omega C_1 R_1 = tg\,\varphi_2 = -\omega C_2 R_2 \rightarrow C_1 R_1 = C_2 R_2$, (4)

apoi tensiunile pe $R_{1,2}$ trebuie să fie egale în modul :

$$R_1 U \sqrt{1/R_1^2 + \omega^2 C_1^2} = R_2 U \sqrt{1/R_2^2 + \omega^2 C_2^2} \rightarrow C_1 R_1 = C_2 R_2. \quad (5)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$R_1 [1 / (j\omega C_2)] = R_2 [1 / (j\omega C_1)]$$

sau $$R_1 : R_2 = [1 / (j\omega C_1)] : [1 / (j\omega C_2)] \,. \quad (6)$$

5.2.34. ***Stabiliţi condiţia de echilibru a punţii din figură în curent alternativ .***

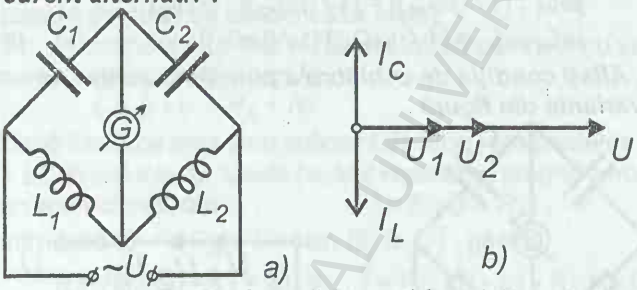


Fig.5.2.34

Rezolvare. Conform diagramei fazoriale avem condiţia :

$$[1 / (\omega C_1)] \cdot U : [1 / (\omega C_1) + 1 / (\omega C_2)] = \omega L_1 \cdot U : (\omega L_1 + \omega L_2)$$

$$\rightarrow \; C_1 / C_2 = L_2 / L_1 \quad \text{sau} \quad L_1 C_1 = L_2 C_2 \,. \quad (1)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$[1 / (j\omega C_1)] \cdot j\omega L_2 = [1 / (j\omega C_2)] \cdot j\omega L_1 \rightarrow L_2 / C_1 = L_1 / C_2 \,. \quad (2)$$

Amintim ***condiţia generală de echilibru a punţii Wheatstone în curent alternativ, construită din elementele*** R , L , C :

$$\bar{Z}_1 : \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 : \bar{Z}_4 \quad \text{sau} \quad \bar{Z}_1 \bar{Z}_4 = \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 \,, \quad (3)$$

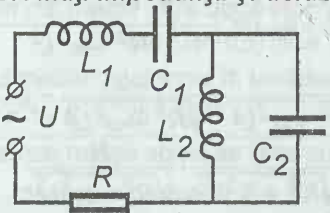
unde $\bar{Z}...$ sunt impedanţele complexe ale ramurilor. Amintim , de asemenea, că o egalitate pentru numere ***complexe*** este echivalentă cu ***două*** egalităţi pentru numere reale , şi anume :

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 \rightarrow \text{Re}\ \bar{Z}_1 = \text{Re}\ \bar{Z}_2 \;\; \& \;\; \text{Im}\ \bar{Z}_1 = \text{Im}\ \bar{Z}_2 \quad (4)$$

sau $$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 \rightarrow |\bar{Z}_1| = |\bar{Z}_2| \quad \& \quad \arg \bar{Z}_1 = \arg \bar{Z}_2 \,. (5)$$

Punţile de la problemele precedente sunt cazuri ***particulare*** ale punţii generale şi a condiţiei generale de echilibru (4) sau (5).

5.2.35. ***Aflaţi impedanţa şi defazajul circuitului din figură .***



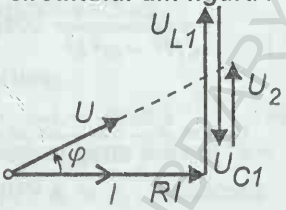


Fig.5.2.35 a) b)

Rezolvare. Conform diagramei fazoriale din figură avem :

$$Z^2 = R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} \right)^2, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} \right). \qquad (2)$$

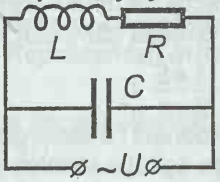
Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{Z} = R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2} =$$

$$= R + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{\omega L_2} - \omega C_2} \right), \qquad (3)$$ de

unde rezultă $Z = |\bar{Z}|$ şi $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{Im}\bar{Z} : \operatorname{Re}\bar{Z}$. (4)

5.2.36. ***Aflaţi impedanţa şi defazajul circuitului din figură .***



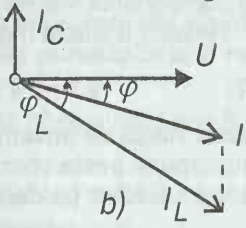


Fig.5.2.36 a) b)

Rezolvare. $Y^2 = 1/Z^2 = \omega^2C^2 + 1 : (R^2 + \omega^2L^2) +$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$+\frac{2\omega C}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\pi/2+\varphi_L)=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)^2+\omega^2C^2R^2}{R^2+\omega^2L^2}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{I_L\sin\varphi_L-I_C}{I_L\cos\varphi_L}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}-\omega C}{\dfrac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}=$$

$$=(1/R)\,[\omega L-\omega C(R^2+\omega^2L^2)]\,. \quad (2)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\bar{Y}=j\omega C+1:(R+j\omega L)=(1-\omega^2LC+j\omega R):(R+j\omega L)=$$

$$=\{R+j\,[-\omega L+\omega C(R^2+\omega^2L^2)]\}:(R^2+\omega^2L^2)\,, \quad (3)$$

de unde rezultă $Y=|\bar{Y}|=1/Z$ şi $\varphi=\arg\bar{Z}=-\arg\bar{Y}$. (4)

5.2.37. ***Un cadru (spiră) dreptunghiular(ă) cu latura*** ℓ = 0,20 m, ***din sârmă de cupru, se roteşte uniform într-un câmp*** B = 1,0 mT, ***ca în figură. Ştiind concentraţia electronilor liberi din cupru*** $n = 1{,}0\cdot10^{29}\ m^{-3}$, ***calculaţi amplitudinea mişcării oscilatorii armonice a electronilor liberi din cadru*** .

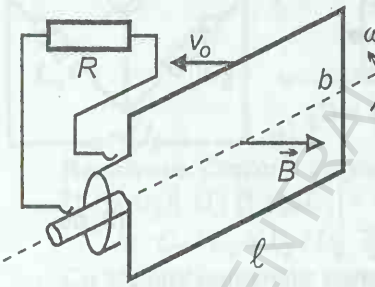


Fig.5.2.37

Rezolvare. Electronii liberi din metal au o mişcare de agitaţie termică cu viteze mari (~ 10^5 m/s). Sub acţiunea unui câmp electric extern $\vec{E}$ electronii liberi capătă acceleraţia $\vec{a}=-e\vec{E}/m$, deci o viteză în direcţia câmpului (şi în sens opus câmpului având sarcină negativă).

Fie t_c timpul mediu între două ciocniri consecutive, timp în care componenta vitezei pe direcţia câmpului creşte de la zero la $\bar{a}t_c$. Rezultă o viteză medie în direcţia câmpului, numită viteza de ***drift*** :

$$\bar{v}=\frac{1}{2}\,\bar{a}\,t_c=-\frac{1}{2}\frac{e\vec{E}}{m}\,t_c\,. \quad (1)$$

Această viteză de ansamblu (ordonată) a electronilor de conducţie se suprapune peste viteza lor de agitaţie termică şi dă naştere curentului electric cu ***densitatea*** :

$$\vec{j}=-en\vec{v}=\frac{1}{2}\frac{e^2nt_c}{m}\,\vec{E}=\gamma\,\vec{E}=\frac{1}{\rho}\,\vec{E}\,, \quad (2)$$

BCU IAŞI - CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

de unde *timpul mediu* între două ciocniri succesive :

$$t_c = 2m : (e^2 n\rho) \approx 41 \text{ fs} \quad (3)$$

şi numărul mediu de *ciocniri* în unitatea de timp :

$$z = 1 / t_c \cong 25 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1} . \quad (4)$$

Deoarece rotaţia spirei se face cu o frecvenţă de ordinul $\nu \sim$ $\sim 100 \text{ s}^{-1}$, deci cu o perioadă $T = 1 / \nu \sim 10^{-2}$ s » t_c , înseamnă că viteza de **drift** a electronilor de conducţie va urmări fidel variaţiile câmpului electric .

Putem calcula şi **mobilitatea** electronilor de conducţie:

$$j = env = en\mu E = \gamma E = E / \rho , \quad (5)$$

de unde $$\mu = 1 : (en\rho) = 3{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s}) . \quad (6)$$

La un câmp electric $E \sim 1$ V/m , rezultă viteza de drift

$$v = \mu E = 3{,}6 \text{ mm/s} . \quad (7)$$

În laturile cadrului care taie liniile de câmp magnetic se induce o t.e.m. în fiecare element de lungime Δs :

$$\Delta E = |\vec{v}_0 \times \vec{B}| \, \Delta s = v_0 B \cos\omega t \cdot \Delta s , \quad (8)$$

de unde intensitatea câmpului electric :

$$E = - \Delta E / \Delta s = - \omega (b/2) B \cos \omega t , \quad (9)$$

de unde amplitudinea de oscilaţie a câmpului electric :

$$E_m = (1/2)\omega b B . \quad (10)$$

Rezultă acum amplitudinea vitezei şi a elongaţiei electronilor :

$$v_m = \mu E_m , \quad A = v_m / \omega = (1/2) \mu b B = bB : (2\ell n\rho) = 0{,}36 \text{ μm} . \quad (11)$$

Dacă luăm frecvenţa de rotaţie standard $\nu = 50$ Hz, putem calcula câmpul maxim şi viteza de drift :

$$E_m = (1/2) \omega b B = \pi \nu b B = 31{,}4 \text{ mV/m} , \quad (12)$$

$$v_m = \mu E_m = 0{,}11 \text{ mm/s} . \quad (13)$$

5.2.38. ***În montajul din figură*** $u = U_m \cos\omega t$, $U_m = 100$ V , $R = 100\ \Omega$, ***iar diodele au caracteristicele idealizate din figură în care*** $U_d = 25$ V . ***Reprezentaţi intensitatea curentului prin rezistorul*** R .

Rezolvare. La fiecare alternanţă poate trece curent prin R numai dacă $|u| \geq 2U_d$:

$$|u| = U_m |\cos\omega t| \geq 2U_d , \quad |\cos\omega t| \geq 2U_d / U_m = 1/2 , \quad (1)$$

$$i = (U_m |\cos\omega t| - 2U_d) : R \text{ dacă } i > 0, \text{ altfel } i = 0, \quad (2)$$

$$t_0 = (1/\omega) \arccos(1/2) = T/6 . \quad (3)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

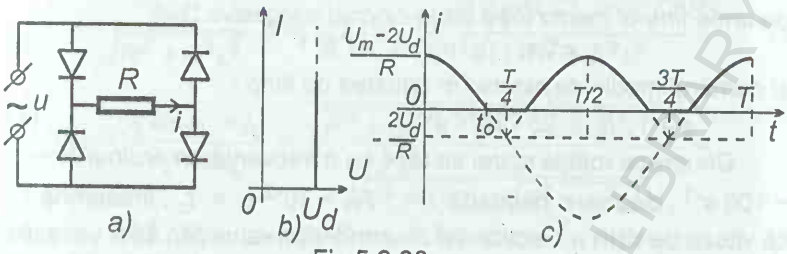


Fig.5.2.38

5.2.39. ***În montajul din figură*** $R_o = 10{,}0\ k\Omega$, $R = 20\ k\Omega$, ***dioda are caracteristica idealizată din figură în care*** $U_o = 100\ V$, $u = U_m \sin\omega t$, $U_m = 300\ V$. ***Reprezentaţi caracteristica globală a montajului şi graficul curentului.***

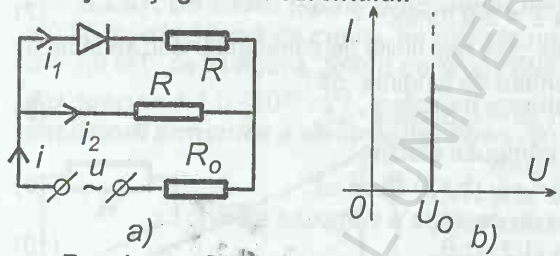


Fig.5.2.39 a, b

Rezolvare. Când dioda nu conduce : $i = u : (R_o + R)$ (1)
şi caracteristica trece prin origine cu panta $1 / (R_o + R)$.

Când tensiunea de pe rezistorul şunt atinge valoarea critică
$R \cdot U_c : (R_o + R) = U_o$, $U_c = U_o \cdot (R_o + R) : R = 150\ V$ (2)
dioda începe să conducă şi atunci avem :
$i = i_1 + i_2$, $Ri_2 = U_o + Ri_1$, $u = R_o i + Ri_2$ (3)
$\rightarrow$ $i = (2u - U_o) : (R + 2R_o)$ cu panta $1 : (R_o + R/2)$. (4)
Trecerea de la un regim la altul are loc la tensiunea U_c de mai sus
când curentul $I_c = U_c : (R_o + R) = U_o : R = 5{,}0\ mA$, (5)
în acest punct cele două caracteristici se intersectează . Deoarece $U_m > U_c$, amplitudinea curentului total :
$I_m = (2U_m - U_o) : (R + 2R_o) = 12{,}5\ mA$. (6)
Din condiţia pentru punctul de trecere (critic) :
$U_m \sin\omega t = U_c \rightarrow \sin\omega t = U_c / U_m = 1/2$,
$(2\pi / T)\, t_c = \pi / 6 \rightarrow t_c = T / 12$. (7)

BCU VIRTUAL UNIVERSITY LIBRARY

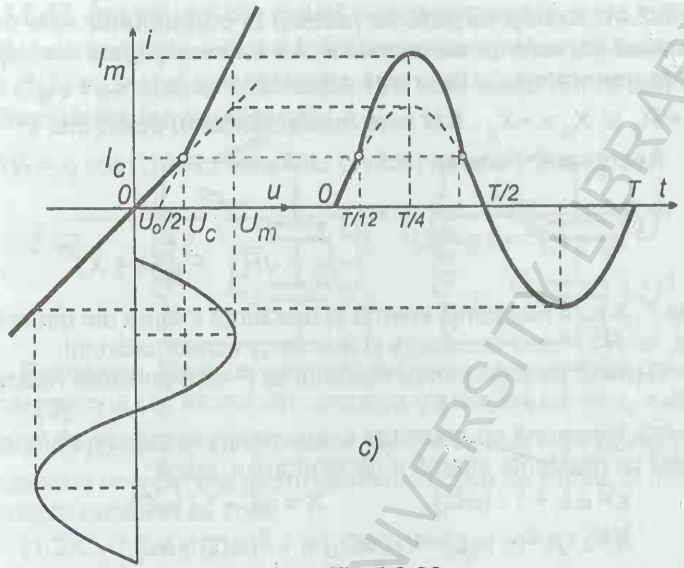


Fig.5.2.39c

5.2.40. ***În montajul din figură :*** E = 200 V , R = 10,0 kΩ , ***iar elementul*** neliniar ***are caracteristica volt-amper din figură . Aflaţi curentul prin elementul neliniar .***

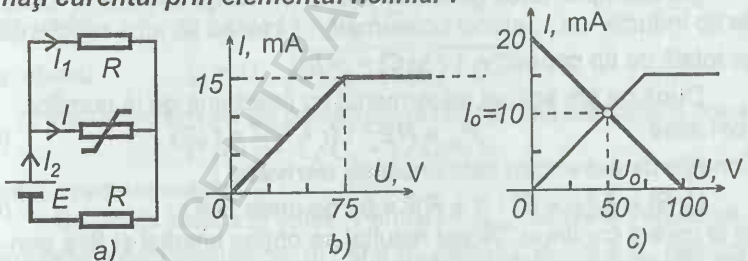


Fig.5.2.40

Rezolvare. $I_2 = I + I_1$, $U = RI_1 = E - RI_2 \rightarrow$

$$I = (E - 2U) : R . \qquad (1)$$

Pe de altă parte acest curent *I* este dat de caracteristica din figură . Intersectând dreapta (1) cu caracteristica V-A din figură , obţinem curentul prin elementul neliniar :

$I = (E - 2U) : R = (200 - 2U) : 10 = (15 / 75)\ U \rightarrow$

$$U_o = 50 \text{ V} , \quad I_o = 10 \text{ mA} . \qquad (2)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(*) 5.2.41. ***Arătaţi că puterea (activă) la consumator este*** maximă ***dacă impedanţa consumatorului este conjugată cu impedanţa generatorului*** (teorema adaptării în c.a.) : $\bar{Z}_c = \bar{Z}_g{}^*$, ***adică*** $R_c = R_g$ *şi* $X_c = -X_g$. ***Cât este randamentul în acest caz ?***

Rezolvare. Puterea (activă) *utilă* este : $P = UI\cos\varphi = RI^2 =$

$$= R\frac{E^2}{(r+R)^2+(x+X)^2} = \frac{E^2}{\left(\frac{r}{\sqrt{R}}+\sqrt{R}\right)^2+\frac{1}{R}(x+X)^2}, \qquad (1)$$

unde r , x sunt rezistenţa internă şi reactanţa internă ale generatorului, iar R , X sunt rezistenţa şi reactanţa consumatorului.

O primă condiţie pentru maximul lui P este anularea reactanţei totale : $x + X = 0$, (2)

aceasta înseamnă că reactanţa consumatorului trebuie să fie ***conjugată*** cu reactanţa internă a generatorului, adică:

$$x = \omega L_i - 1/(\omega C_i), \qquad X = \omega L - 1/(\omega C),$$

$$X = -x = -[\omega L_i - 1/(\omega C_i)] = 1/(\omega C_i) - \omega L_i \qquad (3)$$

sau sub formă complexă : $\bar{X} = \bar{x}^*$, (4)

unde steluţa înseamnă *complex conjugat* .

Aceasta este de fapt condiţia de ***rezonanţă*** în circuit.

De exemplu, dacă generatorul are reactanţa sa internă totală de tip inductiv ωL_i , atunci consumatorul trebuie să aibă reactanţa sa totală de tip capacitiv $1/(\omega C) = \omega L_i$.

După ce am scăpat de termenul cu reactanţă de la numitor, vom avea: $P_m = RE^2 : (r + R)^2 = f(R)$. (5)

Condiţia de extremum este anularea ***derivatei*** :

$f'(R) = E^2(r - R) : (r + R)^2 = 0$, de unde $R = r$, (6)

ca la curent continuu . Acest rezultat se obţine imediat şi fără derivate , dacă scriem puterea (5) sub forma următoare :

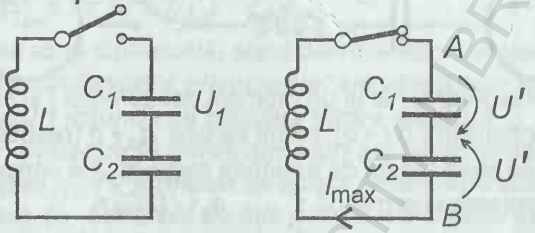
$$P_m = E^2 : \left(\frac{r}{\sqrt{R}}+\sqrt{R}\right)^2 . \qquad (7)$$

La numitor avem suma a doi termeni al căror produs este *constant*, atunci suma este *minimă* când termenii sunt ***egali*** : $r/\sqrt{R} = \sqrt{R}$, $R = r$. Numitorul fiind minim, fracţia, deci puterea, va fi maximă, şi anume : $P_{max} = E^2 : (4r)$ şi randamentul $\eta_{ad} = 50\ \%$. (8)

Aceasta constituie *teorema* ***adaptării*** în *curent* ***alternativ*** .

* **5.2.42.** ***În circuitul din figură condensatorul*** C_1 ***este inițial încărcat până la tensiunea*** U_1 ***, iar condensatorul*** C_2 ***neîncărcat. Care va fi intensitatea maximă a curentului din circuit după închiderea întrerupătorului ?***

Fig.5.2.42



Rezolvare. Fie la un moment dat curentul i și sarcina q pe condensatorul C_1. Atunci din conservarea sarcinii totale $q_o = C_1U_1$ rezultă că pe celălalt condensator sarcina va fi $q_o - q$. Bilanțul conservării energiei (nu avem elemente active de circuit, ci numai elemente reactive) se scrie :

$$(1/2)C_1U_1^2 = (1/2)Li^2 + q^2/(2C_1) + (q_o - q)^2/(2C^2) ,$$

$$(1/2)Li^2 = (1/2)C_1U_1^2 - q^2/(2C_1) - (q_o - q)^2/(2C^2) = f(q) . \quad (1)$$

Condiția de extremum pentru i (sau i^2) este *anularea* ***derivatei*** :

$$f'(q) = -q/C_1 - (1/C_2)(q_o - q)(-1) = 0 , \quad (2)$$

de unde $$q = q_o : (1 + C_2/C_1) \quad (3)$$

și atunci $$I_m = U_1\sqrt{C_1C_2 : \left[L(C_1+C_2)\right]} . \quad (4)$$

Natura extremului se poate obține din semnul derivatei a doua :

$$f''(q) = -1/C_1 - 1/C_2 < 0 , \quad (5)$$

deci avem un *maxim* .

Se poate judeca și altfel . Pentru $i = I_{max}$ derivata trebuie să se anuleze, adică trebuie ca $di/dt = 0$, deci și $L\,di/dt = 0$, deci tensiunea pe inductanță este zero și punctele A , B apar scurt-circuitate (v. fig) , deci *conservarea* ***sarcinii*** dă :

$$C_1U_1 = C_1U' + C_2U' \text{ , de unde } U' = U_1 \cdot C_1 : (C_1 + C_2) . \quad (6)$$

Apoi *conservarea* ***energiei*** dă :

$$(1/2)\,C_1U_1^2 = (1/2)LI_m^2 + (1/2)C_1U'^2 + (1/2)C_2U'^2 , \quad (7)$$

de unde $$(1/2)LI_m^2 = (1/2)U_1^2 \cdot C_1C_2 : (C_1 + C_2) ,$$

$$I_m = U_1\sqrt{C_1C_2 : \left[L(C_1+C_2)\right]} . \quad (8)$$

*** 5.2.43.** ***În sistemul din figură se dau*** L , C, ***raza*** R ***a sferelor. Iniţial condensatorul*** C ***este încărcat până la o tensiune*** U_o . ***Aflaţi valoarea maximă a curentului după închiderea întrerupătorului .***

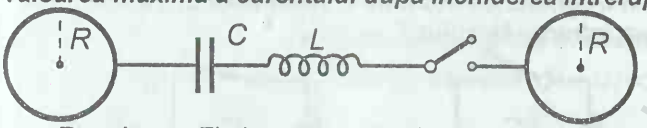


Fig.5.2.43

Rezolvare. Fie la un moment dat curentul *i* şi sarcina rămasă pe condensator q ($-q$), restul sarcinii $q_o - q$ (respectiv $-q_o + q$) se duce pe sfera legată de armătura respectivă a condensatorului. Conservarea energiei dă : $q_o^2/(2C) =$

$$= q^2/(2C) + 2\cdot(q_o - q)^2/(2C_{sf}) + (1/2)\,Li^2\,,\quad C_{sf} = 4\pi\varepsilon R\,, \qquad (1)$$

de unde $(1/2)\,Li^2 = q_o^2/(2C) - q^2/(2C) + (q_o - q)^2/C_{sf} = f(q)$. (2)

Condiţia de *extremum* pentru *i* (şi i^2) este *anularea* ***derivatei*** :

$$f'(q) = -q/C - (2/C_{sf})(q_o - q)(-1) = 0\,, \qquad (3)$$

de unde $$q = q_o \cdot C : (C + C/2)\,, \qquad (4)$$

natura extremului fiind dată de *semnul* derivatei a *doua* :

$$f''(q) = -1/C - 2/C_{sf} < 0\,, \qquad (5)$$

deci avem un *maxim* : $(1/2)L I_m^2 = (q_o^2 C_{sf}/2) : [2C(C + C_{sf}/2)]$, (6)

$$I_m = q_o\sqrt{\frac{C_{sf}/2}{LC(C+C_{sf}/2)}} = U_o\sqrt{\frac{CC_{sf}/2}{L(C+C_{sf}/2)}} = U\sqrt{\frac{C\cdot 2\pi\varepsilon R}{L(C+2\pi\varepsilon R)}}\,. \qquad (7)$$

**** 5.2.44.** ***Printr-un conductor trece un curent alternativ de intensitate*** $i = I_m \sin\omega t$. ***Calculaţi sarcina electrică care trece printr-o secţiune a conductorului în timpul unei alternanţe, precum şi căldura degajată în acest timp dacă rezistenţa conductorului este*** R .

Rezolvare. a) $dq = i\,dt\,,\quad q = \int_0^{T/2} i\,dt = \int_0^{T/2} I_m \sin\omega t\cdot dt =$

$$= I_m \frac{-\cos\omega t}{\omega}\Bigg|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\omega} = \frac{2I_m}{\pi}\frac{T}{2}\,, \qquad (\omega T = 2\pi)\,. \qquad (1)$$

Dealtfel merită a fi reţinut faptul că *media pe o alternanţă* a sinusului este $(2/\pi)\,I_m$, de aceea , de exemplu la redresarea ***bi***alternanţă tensiunea continuă (medie) este $(2/\pi)\,U_m$, iar la ***mono***alternanţă este $(1/\pi)\,U_m$.

b) $dQ = Ri^2\,dt$, $\quad Q = \int_0^{T/2} RI_m^2 \sin^2\omega t \cdot dt =$

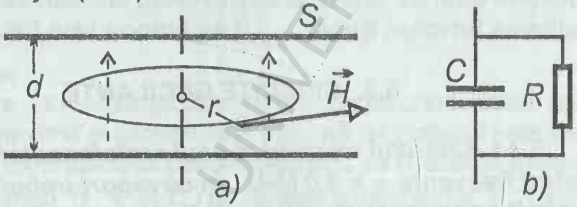
$$= (1/2)\,RI_m^2 \int_0^{T/2}(1-\cos 2\omega t)\,dt = \frac{1}{2}RI_m^2\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{T/2} =$$

$$= (1/2)\,RI_m^2 \cdot T/2 = RI_{ef}^2 \cdot T/2\,, \qquad (2)$$

ceea ce se putea scrie dintr-odată, ştiind definiţia valorii *efective*.

** **5.2.45.** ***Un condensator plan-paralel are armăturile sub forma unor discuri rotunde cu distanţa dintre armături*** $d \ll R$ - ***raza discurilor. Dielectricul dintre armături are permitivitatea*** ε ***şi conductivitatea*** γ ***. Pe armături se aplică o tensiune alternativă*** $u = U_m \cos\omega t$ ***(*** ω ***suficient de mic pentru a îndeplini condiţiile de cvasistaţionaritate). Calculaţi câmpul magnetic din dielectric la distanţa*** r ($\ll R$) ***de axa de simetrie a condensatorului.***

Fig.5.2.45



Rezolvare. Vom aplica *teorema lui* **Ampère** (v. (27) *Breviar*) :

Circulaţia câmpului magnetic $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ *de-a lungul unui contur închis este egală cu intensitatea curentului electric care traversează o suprafaţă sprijinită pe acel contur (*adică *cu intensitatea curentului îmbrăţişat de contur) :*

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{r} = I_{int} = \int_S \vec{j}\,d\vec{S}\,, \quad j = \frac{dI}{dS_\perp} \qquad (1)$$

(cerculeţul la integrală înseamnă sumarea pe un contur *închis*).

În cazul nostru, ţinând seama de simetria cilindrică, alegem un contur *circular* de rază r paralel cu armături şi cu centrul pe axa de simetrie a condensatorului. Atunci circulaţia câmpului magnetic pe acest contur se calculează imediat, deoarece $|\vec{H}|$ este constant pe conturul ales (care este linie de câmp) :

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{r} = \oint_C H\,ds = H\oint_C ds = H \cdot 2\pi r = i, \quad H = \frac{i}{2\pi r}\,. \qquad (2)$$

Curentul i îmbrăţişat de contur este cel care străbate prin cilindrul îmbrăţişat de contur. Un astfel de sistem este echivalent cu un condensator şi un rezistor în paralel :

$$C = \varepsilon S / d = \varepsilon \pi r^2 / d\,, \quad R = d/(\gamma S) = d/(\gamma \pi r^2)\,. \tag{3}$$

Admitanţa sistemului este atunci:

$$Y = 1/Z = \sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2} = (S/d)\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 \omega^2} \tag{4}$$

şi *defazajul* tensiunii faţă de curent : $\operatorname{tg}\varphi = -\omega CR = -\varepsilon\omega/\gamma$. (5)

Intensitatea *curentului* este atunci $i = U_m Y \cos(\omega t - \varphi) =$

$$= U_m \frac{S}{d}\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2\omega^2}\,\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}\right) \tag{6}$$

şi intensitatea câmpului *magnetic* :

$$H = \frac{i}{2\pi r} = U_m \frac{r}{2d}\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2\omega^2}\,\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}\right). \tag{7}$$

5.3. CIRCUITE OSCILANTE

5.3.1. ***Circuitul oscilant al unui radioreceptor este acordat pentru frecvenţa*** $\nu = 9{,}0$ MHz ***. În ce raport trebuie mărită capacitatea condensatorului variabil pentru a recepţiona lungimea de undă*** $\lambda = 50$ m ***?***

Rezolvare. Frecvenţele circuitului oscilant :

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}\,, \quad \nu' = c/\lambda = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}\,, \tag{1}$$

de unde raportul cerut : $C_2 / C_1 = (\nu\lambda / c)^2 = 2{,}25$. (2)

5.3.2. ***Impedanţa caracteristică a unui circuit oscilant ideal este*** $Z_o = \sqrt{2}\cdot 100\ \Omega$ ***. Iniţial condensatorul este încărcat până la tensiunea*** $U = 2{,}0$ V ***. Care va fi intensitatea curentului în momentul când energia condensatorului devine egală cu energia bobinei ?***

Rezolvare. Circuitul oscilant fiind **ideal**, energia sa iniţială $CU^2/2$ se conservă :

$$CU^2/2 = W_C + W_L\,, \quad \text{dar } W_C = W_L = LI^2/2\,, \tag{1}$$

$$(1/2)CU^2 = 2\cdot(1/2)LI^2 \rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U}{Z_o\sqrt{2}} = 10\text{ mA}\,, \tag{2}$$

unde $Z_o = \sqrt{L/C}$ este ***impedanţa caracteristică*** .

5.3.3. ***Într-un circuit oscilant*** LC ***se produc oscilaţii armonice cu amplitudinea tensiunii*** U_m ***. În momentul când condensatorul este încărcat la*** maximum ***armăturile lui sunt apropiate rapid între ele la o distanţă de*** n ***ori mai mică. Cum se schimbă amplitudinea tensiunii şi frecvenţa oscilaţiilor ?***

Rezolvare. În momentul când condensatorul este încărcat la maximum sarcina este $q_m = CU_m$ şi prin apropierea instantanee a armăturilor capacitatea creşte de *n* ori şi legea de conservare a sarcinii dă : $q_m = CU_m = nCU_m' \rightarrow U_m' = U_m / n$. (1)

Altfel, frecvenţa oscilaţiilor va fi: $\nu' = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot nC}} = \dfrac{\nu}{\sqrt{n}}$. (2)

5.3.4. ***În circuitul*** LC ***din figură circulă un curent de amplitudine*** I_{m1} ***. În momentul când tensiunea pe condensatorul*** C ***este*** maximă ***se închide întrerupătorul. După un timp amplitudinea curentului prin bobină va fi*** I_{m2} ***. Aflaţi raportul amplitudinilor*** I_{m2} / I_{m1} .

Rezolvare. În momentul când tensiunea pe condensator (şi bobină) este maximă şi sarcina este maximă (şi curentul este zero): închizând întrerupătorul condensatorul C se descarcă (parţial) practic instantaneu ($\tau \ll \sqrt{LC}$) pe celălalt condensator nC (rezistenţele conductoarelor sunt neglijabile) şi conservarea sarcinii electrice dă : $Q_o = CU' + nCU' \rightarrow U' = Q_o : [(n+1)C]$. (1)

În acest moment energia sistemului este

$W_2 = (1/2)CU'^2 + (1/2)nCU'^2 = Q_o^2 : [2(n+1)C] = (1/2)LI_{m2}^2$ (2)

faţă de energia iniţială $W_1 = Q_o^2 : (2C) = (1/2LI_{m1}^2$. (3)

Făcând raportul, găsim: $I_{m2} / I_{m1} = 1 / \sqrt{n+1}$. (4)

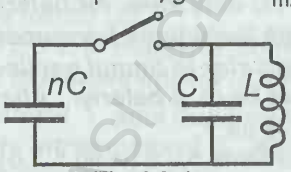


Fig.5.3.4

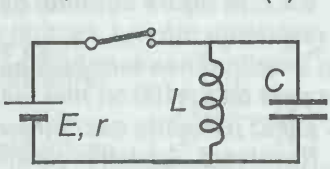


Fig.5.3.6 - 7

Observăm că prin închiderea întrerupătorului şi descărcarea (parţială) rapidă a condensatorului C pe condensatorul nC ***nu se conservă*** *energia electrică*, o parte se pierde în **căldura** Joule în conductoare şi anume fracţiunea :

$Q_J : W_1 = (W_1 - W_2) : W_1 = 1 - 1 : (n+1) =$

$= n : (n+1) = C_2 : (C_1 + C_2)$. (5)

5.3.5. ***Un circuit oscilant cu perioada oscilaţiilor*** $T = 1{,}00\ \mu s$ ***are inductanţa*** $L = 0{,}200\ H$ ***şi rezistenţa*** $R = 2{,}00\ \Omega$ ***. Cu cât la su-tă se micşorează energia acestui circuit în timpul unei perioade ?***

Rezolvare . *Factorul de calitate* al circuitului oscilant este :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2\pi L}{RT} = 6{,}28 \cdot 10^5 \gg 1 , \qquad (1)$$

prin urmare oscilaţiile sunt foarte puţin amortizate, deci sunt aproape sinusoidale armonice . Energia disipată într-o perioadă este RI_{ef}^2T, iar energia totală este $LI_m^2/2$ (sau $CU_m^2/2$), prin urmare :

$$f = RI_{ef}^2T : (LI_m^2/2) = RT : L = 2\pi : Q = 10^{-5} = 0{,}0010\ \%. \qquad (2)$$

5.3.6. ***Un generator cu t.e.m.*** $E = 10\ V$ ***şi rezistenţa internă*** $r = 10\ \Omega$ ***este conectat la o bobină de inductanţă*** $L = 0{,}10\ H$ ***şi rezistenţă proprie neglijabilă, având în paralel un condensator de capacitate*** $C = 0{,}10\ \mu F$ ***. La un moment dat întrerupătorul este deschis . Aflaţi tensiunea*** maximă ***la bornele bobinei .***

Rezolvare. Cu întrerupătorul închis, în curent continuu, fără oscilaţii, bobina ideală reprezintă un scurt circuit, iar un condensator ideal reprezintă o întrerupere de circuit, în aceste condiţii curentul va trece doar prin bobină şi energia circuitului oscilant este energia magnetică a bobinei :

$$I = E/r \qquad \text{şi} \quad W = W_m = LI^2/2 . \qquad (1)$$

După deschiderea întrerupătorului, circuitul oscilant rămâne deconectat de la baterie, având energia iniţială (1), în circuit apar oscilaţii. Când tensiunea este maximă, curentul este zero şi conservarea energiei dă :

$$(1/2)CU_m^2 = (1/2)LI^2 \rightarrow U_m = I\sqrt{L/C} = 1{,}00\ kV . \qquad (2)$$

5.3.7. ***În figură circuitul oscilant*** LC ***este ideal, iar bateria are rezistenţa internă*** $r = 1{,}00\ \Omega$ ***. După închiderea întrerupătorului amplitudinea tensiunii pe condensator în timpul oscilaţiilor este de*** n =100 ori ***mai mare decât t.e.m. a bateriei . Aflaţi*** L ***şi*** C ***ştiind perioada oscilaţiilor*** $T = 6{,}28\ \mu s$.

Rezolvare. Analog problemei precedente 5.3.6 (v. fig.5.3.6) , când întrerupătorul este închis, în absenţa oscilaţiilor, curentul trece prin bobină şi enegia magnetică a bobinei este

$$I_o = E/r , \qquad W_m = LI_o^2/2 . \qquad (1)$$

Prin deschiderea întrerupătorului apar oscilaţii în circuitul oscilant, cu energia totală (1). În momentul când tensiunea pe condensator este *maximă*, curentul este zero şi conservarea energiei dă :

$(1/2)L I_o^2 = (1/2)C U_m^2$, dar $U_m = nE$, (2)

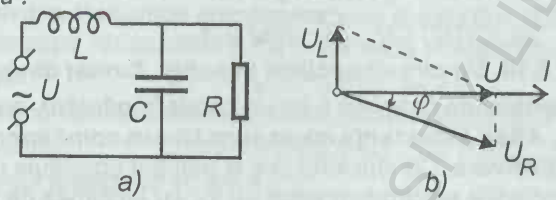
$(1/2)L I_o^2 = (1/2)C n^2E^2$, dar $T = 2\pi\sqrt{LC}$, (3)

de aici rezultă $L = nrT : (2\pi) = 0{,}10$ mH ,

$C = T : (2\pi nr) = 10{,}0$ nF . (4)

5.3.8. ***În montajul din figură se cunosc*** L , C ***şi*** ω . ***Calculaţi valoarea rezistenţei*** R ***pentru care tensiunea şi curentul sunt în fază .***

Fig.5.3.8



Rezolvare. Conform diagramei fazoriale :

$$|\sin\varphi| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}} = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I\omega L}{I\sqrt{1/R^2+\omega^2C^2}} =$$

$$= \frac{\omega L}{R}\sqrt{1+\omega^2C^2R^2} \ , \qquad (1)$$

de unde (după ridicare la pătrat) rezultă :

$$R = \sqrt{L:\left[C\left(1-\omega^2LC\right)\right]} \ . \qquad (2)$$

Cu ajutorul *numerelor* ***complexe*** :

$$\overline{Z} = j\omega L + \frac{R/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR} = j\omega L + \frac{R(1-j\omega CR)}{1+\omega^2C^2R^2} . \qquad (3)$$

Condiţia cerută înseamnă : $\mathrm{Im}\ \overline{Z} = 0$,

$\omega L - \omega CR^2 : (1+\omega^2C^2R^2) = 0$, (4) de unde rezultă (2) .

5.3.9. ***În montajul din figură se dau*** L , C ***şi tensiunea iniţială*** U_o. ***Se închide întrerupătorul*** 1, ***apoi după un timp*** τ , ***se închide întrerupătorul*** 2 . ***Aflaţi amplitudinea de oscilaţie a sarcinii .***

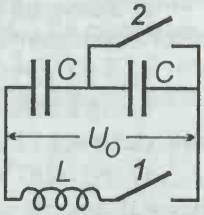


Fig.5.3.9

Rezolvare. După închiderea întrerupătorului *1* apar oscilaţii cu frecvenţa ω_o şi energia totală W_o :

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC/2}} \ , \ u_C = (1/2)U_o\cos\omega_o t \ , \ W_o = (1/2)(C/2)U_o^2 \ . \ (1)$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin închiderea întrerupătorului 2 se elimină din sistem energia din acel moment a condensatorului scurt-circuitat :

$$W_C = (1/2)Cu_{Co}^2 = (1/2)C\,[(1/2)U_o\cos\omega_o\tau\,]^2\,, \qquad (2)$$

astfel încât cu energia rămasă continuă oscilaţiile în circuitul LC rămas :

$$W_o - W_C = W' = q_m^2/(2C)\,. \qquad (3)$$

Ţinând seama de W_o (1) şi W_C (2) găsim de aici :

$$q_m = (1/2)\,CU_o\sqrt{2-\cos^2\omega_o\tau}\,. \qquad (4)$$

5.3.10. ***Un circuit oscilant deschis, format dintr-un conductor vertical de lungime ℓ cu un capăt la pământ, are capacitatea*** C ***. Aflaţi inductanţa corespunzătoare conductorului .***

Rezolvare. Conductorul pus la pământ constituie o antenă în care oscilaţiile electromagnetice au loc cu lungimea de undă proprie a conductorului $\lambda = 4\ell$ (sau $\ell = \lambda/4$ - modul fundamental sfert de undă) :

$$\ell = \lambda/4 = cT/4\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}\,, \qquad (1)$$

$$L = 4\ell^2 : (\pi^2c^2C)\,, \qquad (2)$$

unde *c* este viteza luminii .

5.3.11. ***Într-un circuit oscilant*** LC ***ideal au loc oscilaţii cu frecvenţa*** ω ***şi amplitudinea curentului*** I_m ***. În momentul când curentul este zero se introduce rapid între armăturile condensatorului o placă dielectrică de constantă*** ε_r ***. Aflaţi noua frecvenţă*** ω' ***şi noua amplitudine a curentului.***

Rezolvare. Prin introducerea plăcii dielectrice se schimbă capacitatea condensatorului :

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \frac{1}{\sqrt{L\varepsilon_r C}} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_r}}\,. \qquad (1)$$

În momentul introducerii plăcii dielectrice sarcina pe condensator este maximă (curentul este zero) :

$$q_m = CU_m = C'U_m' = \varepsilon_r CU_m' \;\rightarrow\; U_m' = U_m/\varepsilon_r\,. \qquad (2)$$

Energia condensatorului (deci energia totală a circuitului oscilant, deoarece $(1/2)Li^2 = 0$) devine :

$$W' = (1/2)C'U_m'^2 = (1/2)\varepsilon_r CU_m^2/\varepsilon_r^2 = W/(2\varepsilon_r)\,. \qquad (3)$$

Această energie se conservă şi în momentul când curentul este maxim avem : $W' = W/(2\varepsilon_r) =$

$$= LI_m^2/(2\varepsilon_r) = (1/2)LI_m'^2 \;\rightarrow\; I_m' = I_m/\sqrt{\varepsilon_r}\,. \qquad (4)$$

5.3.12. ***Într-un circuit oscilant*** RLC ***oscilaţiile sunt slab amortizate. Pentru a întreţine oscilaţii neamortizate, de două ori într-o perioadă în momentele când sarcina condensatorului este maximă, armăturile sale sunt rapid depărtate între ele cu*** Δd ***, iar când sarcina este nulă sunt apropiate la loc. Aflaţi raportul*** $\Delta d / d$ ***necesar, cunoscând factorul de calitate*** $Q = 100$.

Rezolvare. Deoarece amortizarea este slabă ($Q = 100$) oscilaţiile sunt aproape sinusoidale şi într-o perioadă energia disipată în căldură este

$$Q_J = R I_{ef}^2 T = (1/2) R I_m^2 T . \qquad (1)$$

Deoarece sarcina oscilează practic sinusoidal de tipul

$$q \cong q_m \sin\omega t \;\rightarrow\; i = I_m \cos\omega t = \omega q_m \cos\omega t , \quad I_m = \omega q_m , \qquad (2)$$

atunci ***bilanţul energetic*** se scrie :

$$Q_J = (1/2) R I_m^2 T \cong (1/2) R \omega^2 q_m^2 \cdot 2\pi / \omega =$$

$$= 2[q_m^2 / (2C') - q_m^2 / (2C)] = q_m^2 [d' / (\varepsilon S) - d / (\varepsilon S)] = q_m^2 \, \Delta d / (Cd),$$

$$\Delta d / d = \pi \omega C R = \pi R \sqrt{C/L} = \pi / Q \cong 3\ \% . \qquad (3)$$

*

5.4. REGIM TRANZITORIU

(*) 5.4.1. ***Între polii unui magnet câmpul magnetic are inducţia*** B ***. Introducem între poli transversal o spiră*** **supraconductoare** ***scurt-circuitată, de arie*** S ***şi inductanţă*** L ***. Ce curent va circula prin spiră? Aplicaţie:*** $S = 30\ cm^2$, $B = 1{,}0\ mT$, $L = 1{,}0\ \mu H$.

Rezolvare. Plecăm de la *legea lui* ***Ohm***, scrisă pentru spiră :

$$E = - \, d\Phi / dt = R i . \qquad (1)$$

Pentru **supraconductor** $R \equiv 0$, deci

$$R \equiv 0 , \quad d\Phi / dt \equiv 0, \text{ adică } \quad \Phi = \text{const.} \qquad (2)$$

(***conservarea fluxului magnetic***) .Rezultatul se poate obţine imediat fără a folosi derivate, ci judecând cu valori *medii* :

$$\langle E \rangle = - \Delta\Phi / \Delta t = R \langle i \rangle , \; R = 0 , \; \Delta\Phi = 0 , \quad \Phi = \text{const.} \qquad (3)$$

Înainte de a introduce spira între polii magnetului fluxul îmbrăţişat de spiră era *zero*, deci va rămâne *zero* şi prin introducerea spirei între polii magnetului. Dar atunci în spiră trebuie să se inducă un curent astfel încât să creeze un flux magnetic egal în modul şi de sens *opus* cu cel îmbrăţişat (acum din partea magnetului):

$$L\,I = \Phi\,, \text{ de unde } I = \Phi / L = BS / L = 3{,}0 \text{ A}\,. \qquad (4)$$

(*) **5.4.2.** ***Într-un solenoid*** **supraconductor** ***de inductanţă*** L = = 5,0 H, ***conectat pe o rezistenţă foarte mică*** R **,** ***curge curent electric astfel încât inducţia*** B ***din solenoid scade cu*** f = 2,0 % ***în timpul*** D =24 h **.** ***Evaluaţi rezistenţa*** R **.**

Rezolvare. Scriem *legea lui* ***Ohm*** pentru solenoid :

$$\mathrm{E} = -\,\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t = R\,i\,, \qquad (1)$$

dar $\Phi = L\,i = NBS$, deci $i = \Phi / L = NBS / L$, (2)

care introduse în prima ecuaţie dau :

$$-\,\mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}(NBS) / \mathrm{d}t = R\,i = R \cdot NBS / L\,, \qquad (3)$$

de unde $$R = -L\frac{\mathrm{d}B}{B\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}B}{B}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}t} \cong$$

$$\cong -L\frac{\Delta B}{B}\cdot\frac{1}{\Delta t} = L\frac{fB}{B}\cdot\frac{1}{D} = 1{,}16\ \mu\Omega\,. \qquad (4)$$

Se poate judeca şi fără derivate, cu ajutorul valorilor *medii* :

$$\langle \mathrm{E} \rangle = -\,\Delta\Phi / \Delta t = R \langle i \rangle\,, \qquad \Delta\Phi = NS\Delta B\,,$$

$$\langle i \rangle = \langle \Phi \rangle : L = NS \langle B \rangle : L\,, \qquad (5)$$

$$-\,\Delta\Phi / \Delta t = -\,NS\,\Delta B / \Delta t = R \langle i \rangle = (RNS / L) \langle B \rangle\,, (6) \text{ de}$$

unde $$R = -\,L\,\frac{\Delta B}{\langle B \rangle}\frac{1}{\Delta t} = Lf\frac{1}{D} = 1{,}16\ \mu\Omega\,. \qquad (7)$$

(*) **5.4.3.** ***În montajul din figură prin rezistorul*** R = 10 mΩ ***trece un curent*** I = a t, a = 10 mA/s , L = 10 mH, C = 0,10 μF. ***Aflaţi sarcina de pe condensator la momentul*** τ = 1,0 s .

Rezolvare. *Legea lui Ohm* pentru valori ***instantanee*** :

$$u - L\mathrm{d}i / \mathrm{d}t = R\,i\,, \qquad (1)$$

dar $\mathrm{d}i / \mathrm{d}t = a$, deci $u - La = Rat$, $u = aL + aRt$, (2)

astfel încât $q = Cu = Ca(L + Rt) = 20$ pC . (3)

Putem judeca şi fără a folosi *derivate*, cu ajutorul valorilor medii: $y = ax + b \rightarrow \Delta y = a \cdot \Delta x$, deci $i = at \rightarrow \Delta i = a \cdot \Delta t$, (4)

$\Delta i / \Delta t = a = \text{const}$! Deci $\Delta i / \Delta t = \mathrm{d}i / \mathrm{d}t$,

$u - L\,\Delta i / \Delta t = u - L \cdot a = R\,i$, etc.

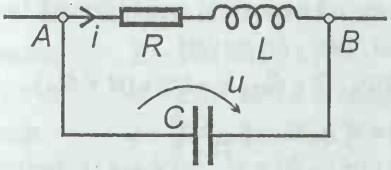


Fig.5.4.3

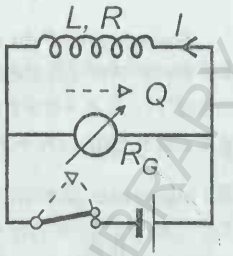


Fig.5.4.5

* 5.4.4. ***Se dă un circuit oscilant*** RLC . ***Într-un anumit interval de timp, amplitudinea curentului scade de la*** I_{m1} ***la*** I_{m2} . ***Ce cantitate de căldură s-a degajat pe rezistor în acest interval de timp ?***

Rezolvare. Căldura degajată este diferenţa : $Q = W_1 - W_2$, unde W este energia totală a circuitului oscilant . Să exprimăm *energia totală* prin amplitudinea curentului I_m .

Legea lui **Ohm** pentru valori *instantanee* este ($u = 0$):

$$- L\, di/dt = q/C + R\, i \,. \qquad (1)$$

Când curentul este *maxim* $i = I_m$, derivata sa se anulează : $di/dt = 0$, iar tensiunea pe condensator **nu** este zero ca la circuitul LC *ideal*, fiindcă $R \neq 0$. Din (1) rezultă pentru momentul considerat :

$$0 = q_o/C + RI_m \,, \quad q_o/C = - RI_m \qquad (2)$$

şi *tensiunea* pe condensator în acest moment :

$$U_{Co} = q_o/C = - RI_m \neq 0 \,. \qquad (3)$$

Atunci energia totală a circuitului oscilant în acest moment :

$$W = (1/2)L I_m^2 + (1/2)C U_{Co}^2 = (1/2)(L + R^2C)I_m^2 \,, \qquad (4)$$

de unde căldura cerută rezultă ca fiind scăderea acestei energii :

$$Q_J = W_1 - W_2 = (1/2)(L + R^2C)(I_{m1}^2 - I_{m2}^2) \,. \qquad (5)$$

(* *) 5.4.5. ***În montajul din figură se cunoaşte rezistenţa bobinei*** R , ***curentul care trece prin ea*** I ***şi rezistenţa galvanometrului*** balistic R_G. ***Galvanometrul*** balistic ***este un galvanometru special care măsoară prin deviaţia sa*** maximă sarcina ***care trece prin el. Deschizând întrerupătorul, galvanometrul balistic indică trecerea unei sarcini (extracurentul de autoinducţie) în sensul arătat în figură . Dacă apoi se descarcă pe galvanometrul balistic un condensator de capacitate*** C ***încărcat până la tensiunea*** U, ***acul galvanometrului deviază la fel ca înainte . Aflaţi inductanţa bobinei .***

Rezolvare. Prin deschiderea întrerupătorului curentul prin bobină se anulează, deci se induce o t.e.m. şi un curent (numit "*extracurent*") : $E = -\,d\Phi/dt = -L\,di/dt$, $i = dq/dt$,

$$dq = i\,dt = E dt : (R + R_G) = -\,d\Phi : (R + R_G) = -Ldi : (R + R_G) . \quad (1)$$

Prin integrare găsim : $Q = \int dq = -\int \frac{d\Phi}{R+R_G} =$

$$= -\frac{\Delta\Phi}{R+R_G} = -\int \frac{Ldi}{R+R_G} = -\frac{L\Delta I}{R+R_G} \quad (2)$$

Acest rezultat se scrie imediat, dacă ne amintim de formula sarcinii care trece printr-un circuit datorită inducţiei (v.(37) Breviar):

$$Q = -\,\Delta\Phi : (R + R_G) , \quad \Delta\Phi = L\Delta I . \quad (3)$$

În cazul nostru : $\Delta I = -\,I$, $\Delta\Phi = -\,\Phi = -\,L\,I$. (4)

Pe de altă parte $Q = CU$, deci

$$\Phi : (R + R_G) = LI : (R + R_G) = CU , \quad L = CU(R + R_G) : I . \quad (5)$$

(* *) 5.4.6. ***În circuitul din figură*** E = 12 V ***(rezistenţa internă neglijabilă)*** , L = 1,00 H, ***rezistenţa iniţială a rezistorului variabil*** $R_0 = 10\ \Omega$. ***Se creşte*** R ***astfel ca*** $dI/dt = p = -\,0{,}20$ A/s . ***Care va fi*** R ***după*** t = 2,0 s ***?***

Fig.5.4.6

Rezolvare. Dacă $dI/dt = p = \text{const}$, avem

$$i = \int di = \int p\,dt = pt + C,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $i = I_0 = E : R_0$, $E : R_0 = C$, deci

$$i = I_0 + pt = E/R_0 + pt . \quad (1)$$

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{I_0}^{i} di = \int_0^t p\,dt \qquad \text{sau} \quad i - I_0 = pt , \quad i = I_0 + pt .$$

Rezultatul se poate scrie imediat fără a folosi integrale . În adevăr, variaţia unei funcţii ***liniare*** este

$$y = ax + b \;\rightarrow\; \Delta y = a \cdot \Delta x . \quad (2)$$

Prin urmare, în cazul nostru :

$$di/dt = p = \text{const}\ (!) = \Delta i/\Delta t , \quad \Delta i = p \cdot \Delta t , \quad (3)$$

deci $i = I_0 + pt$,

unde I_0 este valoarea curentului i pentru $t = 0$.

Pe de altă parte, *legea lui* **Ohm** se scrie :

$$E - L\,di/dt = R\,i \quad \text{sau} \quad E - Lp = Ri = \text{const}\,, \tag{4}$$

respectiv, $E - L\,\Delta i/\Delta t = \langle Ri \rangle$

sau $$E - Lp = \langle Ri \rangle = \text{const}\,(!) = Ri\,, \tag{5}$$

de unde $$i = (E - Lp)/R\,, \quad R = (E - Lp)/I \tag{6}$$

şi folosind (1) sau (3) : $R = (E - Lp) : (E/R_o + pt) = 15{,}25\ \Omega$. (7)

(* *) **5.4.7.** ***În circuitul din figură, bobinele sunt ideale. Se închide întrerupătorul*** **1** ***şi după un anumit timp când curentul are intensitatea*** I_o ***se închide şi întrerupătorul*** **2** ***. Aflaţi curenţii prin bobine în regim staţionar.***

Rezolvare. Scriem *legea lui* **Kirchhoff** (pentru valori instantanee) pentru ochiul de reţea $L_{1,2}$ (nu avem condensatoare şi rezistoare) : $u_{L1} + u_{L2} = 0$ sau $-E_1 - E_2 = 0$

sau $$L_1\,di_1/dt - L_2\,di_2/dt = 0 \tag{1}$$

(sensul curenţilor ca în figură), de unde $$L_1\,di_1 - L_2\,di_2 = 0 \tag{2}$$

şi prin integrare : $\int L_1 di_1 - \int L_2 di_2 = C$ sau $L_1 i_1 - L_2 i_2 = C$, (3)

unde constanta de integrare se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la închiderea întrerupătorului 2 : $i_1 = I_o$, $i_2 = 0$, adică $L_1 I_o = C$, deci

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = L_1 I_o \tag{4}$$

(legea de *conservare a* ***fluxului magnetic***) .

Rezultatul de mai sus se poate obţine imediat şi fără integrale, judecând cu valori *medii* :

$L_1\,\Delta i_1/\Delta t - L_2\,\Delta i_2/\Delta t = 0$, de unde $\Delta(L_1 i_1 - L_2 i_2) = 0$,

ceea ce înseamnă $L_1 i_1 - L_2 i_2 = \text{const}$,

unde constanta se determină ca mai sus .

În regim *staţionar* bateria este în scurt-circuit (bateria are rezistenţă internă *r*) : $I_1 + I_2 = E/r$. (5)

Rezultă din (4) şi (5) ($i_{1,2}$ sunt acum $I_{1,2}$) :

$$I_{1,2} = (L_{2,1}\,E/r \pm L_1 I_o) : (L_1 + L_2)\,. \tag{6}$$

(* *) **5.4.8.** ***Două bobine ideale cu inductanţele*** $L_{1,2}$ ***sunt conectate ca în figură. Bobina*** L_1 ***cu*** N_1 ***spire de arie*** S ***fiecare, este străbătută de un câmp magnetic de inducţie*** B_o ***. Care va fi intensitatea curentului în circuit după anularea câmpului*** B_o ***?***

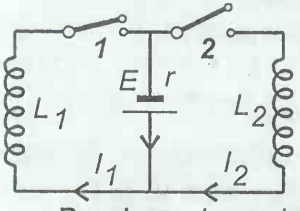


Fig.5.4.7

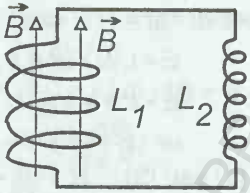


Fig.5.4.8

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* :

$$E_{1\,ext} + E_1 + E_2 = 0$$

sau $$- N_1 S\, dB/dt - L_1\, di/dt - L_2\, di/dt = 0\,, \qquad (1)$$

de unde $$di = -[N_1 S/(L_1 + L_2)]\, dB \qquad (2)$$

şi prin integrare :

$$\int di = i = -\int \frac{N_1 S}{L_1 + L_2}\, dB = -\frac{N_1 S}{L_1 + L_2}\,(B + C),$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia* ***iniţială*** : în momentul iniţial avem $B = B_0$ şi $i = 0$, rezultă imediat $0 = B_0 + C$,

deci $$i = N_1 S(B_0 - B) : (L_1 + L_2)\,. \qquad (3)$$

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^i di = -\frac{N_1 S}{L_1 + L_2}\int_{B_0}^{B} dB\,, \quad i = -\frac{N_1 S}{L_1 + L_2}\,(B - B_0)\,.$$

Rezultatul de mai sus se poate obţine imediat fără a folosi integrale, judecând cu valori *medii* :

$$- N_1 S\, \Delta B/\Delta t - (L_1 + L_2)\, \Delta i/\Delta t = 0\,,$$

de unde $$\Delta i = - N_1 S\, \Delta B : (L_1 + L_2)\,. \qquad (4)$$

Dacă ne amintim de expresia *variaţiei* unei funcţii *liniare* :

$$y = ax + b \rightarrow \Delta y = a \cdot \Delta x\,, \qquad (5)$$

atunci în cazul nostru rezultă imediat :

$$i = - N_1 SB : (L_1 + L_2) + \text{const.}\,, \qquad (6)$$

unde constanta se determină la fel ca mai înainte.

În momentul când inducţia B se anulează :

$$I = N_1 SB_0 : (L_1 + L_2)\,. \qquad (7)$$

(* *) 5.4.9. ***O bobină ideală are inductanţa*** L ***şi are*** N ***spire de arie*** S ***fiecare. Perpendicular pe spire se aplică un câmp magnetic omogen care creşte*** liniar ***de le zero la*** B_0 ***şi apoi scade*** liniar ***la zero într-un interval total de timp*** Δt. ***Ce sarcină electrică va curge prin bobină, dacă ea a fost scurt-circuitată ?***

CLASA / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* :

$$E_{ext} + E = 0 \quad \text{sau} \quad -NS\,dB/dt - L\,di/dt = 0\,, \tag{1}$$

de unde $$NS\,dB + L\,di = 0\,, \tag{2}$$

care prin integrare dă :

$$\int NS\,dB + \int L\,di = C, \qquad NSB + Li = C\,, \tag{3}$$

unde constanta de integrare se obţine din condiţia *iniţială* : când $B = 0$ avem şi $i = 0$. Rezultă imediat

$$NSB + Li = 0 \ (\textit{conservarea } \textbf{\textit{fluxului}} \textit{ total})\,. \tag{4}$$

Deoarece $i = dq/dt$; $dq = i\,dt$, de unde prin integrare :

$$q(t) = \int_0^t i\,dt = \int_0^t -\frac{NSB}{L}\,dt = -\frac{NS}{L}\int_0^t B(t)\,dt\,. \tag{5}$$

Integrala se poate face dacă cunoaştem expresia analitică $B = B(t)$. Această integrală reprezintă **aria** mărginită de graficul funcţiei $B(t)$. În cazul nostru pentru întregul proces, graficul lui B este un *triunghi* cu baza Δt şi înălţimea B_0 , deci aria $(1/2)\,B_0\Delta t$, deci

$$q = -(NS/L)(1/2)\,B_0\Delta t\,. \tag{6}$$

Problema se poate rezolva şi fără integrale, judecând cu valori *medii* : $-NS\,\Delta B/\Delta t - L\,\Delta i/\Delta t = 0$

sau $NS\,\Delta B + L\,\Delta i = 0$ sau $\Delta(NS\,B + L\,i) = 0$,

ceea ce înseamnă că $$NS\,B + L\,I = \text{const}\,, \tag{7}$$

unde constanta se determină ca mai sus. Mai departe,

$$\langle i \rangle = \Delta q/\Delta t\,, \qquad \Delta q = \langle i \rangle\,\Delta t\,, \tag{8}$$

dar din (4) sau (7) avem $i = -NSB/L$, $\langle i \rangle = -(NS/L)\,\langle B \rangle$, (9)

dar B variază *liniar* în timp şi $\langle B \rangle\,\Delta t$ este **aria** mărginită de graficul lui B sau , altfel, media lui B pe intervalul întreg Δt este $B_0/2$.

Regăsim astfel, imediat, rezultatul (6) .

(* *) 5.4.10. ***La un moment dat*** $t = 0$ ***, întrerupătorul*** **1** ***se închide şi apoi, la momentul*** t_0 ***se închide întrerupătorul*** **2** ***, în montajul din figură. Neglijând toate rezistenţele active, reprezentaţi grafic curentul din bobină în funcţie de timp .***

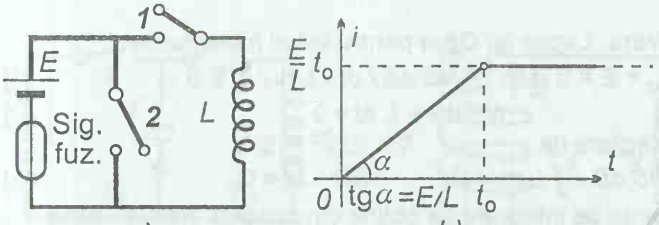
Rezolvare. Pentru intervalul de timp $(0, t_0)$ *legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* se scrie astfel :

$$E - L\,di/dt = 0 \quad \text{sau} \quad L\,di = E\,dt\,, \tag{1}$$

care prin integrare dă :

$$\int_0^i L\,di = \int_0^t E\,dt\,, \qquad Li = Et\,, \quad i = (E/L)\,t\,, \tag{2}$$

curentul creşte *liniar* .



a) b) Fig.5.4.10

Se poate integra şi *nedefinit* :

$$\int L\,di = \int E\,dt \;\rightarrow\; L\,i = E\,t + C\,,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia **iniţială*** : la $t = 0$ avem $i = 0$; rezultă imediat $C = 0$.

Rezultatul se obţine şi fără integrale, judecând cu valori medii:

$$E - L\,\Delta i / \Delta t = 0\,,\quad E\Delta t - L\Delta i = 0\,,\quad \Delta(Et - Li) = 0, \qquad (3)$$

de unde $Et - Li = \text{const}$,

unde constanta se determină exact ca mai sus : $C = 0$.

Pentru intervalul de timp $t > t_0$, pentru ochiul de reţea cu L (prin închiderea întrerupătorului 2 bateria este scurt-circuitată şi pentru a o proteja, - rezistenţele fiind neglijabile ! - s-a pus o siguranţă fuzibilă pentru a deconecta bateria din circuit) :

$$-L\,di/dt = 0\,,\quad di = 0\,,\quad i = \text{const}\,, \qquad (4)$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia de **racordare*** : pentru $t = t_0$ avem din (2) : $i = I_0 = (E/L)\,t_0$, deci după timpul t_0 curentul rămâne *constant* .

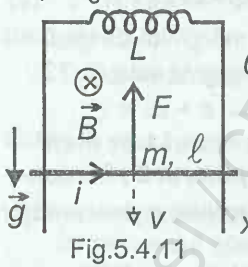


Fig.5.4.11

(**) 5.4.11. ***Pe două şine verticale paralele conductoare lunecă fără frecare o tijă conductoare orizontală de masă*** m ***şi lungime*** ℓ ***egală cu distanţa dintre şine. În partea superioară şinele sunt legate printr-o inductanţă ideală*** L, ***iar perpendicular pe planul şinelor acţionează un câmp magnetic de inducţie*** B . ***Iniţial tija este ţinută în repaus şi apoi i se dă drumul fără viteză iniţială . Toate rezistenţele sunt neglijabile . Aflaţi viteza maximă a tijei .***

Rezolvare. În tijă se induce o t.e.m. $E = (\vec{v} \times \vec{B})\vec{\ell}$ şi va apare forţa electromagnetică $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$, ca în figură .

Lex secunda a mecanicii : $mg - i\ell B = ma$ (1)

şi *legea lui* **Ohm** pentru valori *instantanee* :

$$vB\ell - L\,di/dt - Ri = 0\,, \quad (R = 0)\,. \tag{2}$$

Dar $v = dx/dt$, deci $B\ell\,dx/dt = L\,di/dt$, $B\ell\,dx = L\,di$, (3)

care integrată dă : $\int B\ell\,dx = \int L\,di$, $B\ell x = Li + C$, (4)

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia* ***iniţială*** (sau *la* ***margine***) : la $x = 0$ corespunde $i = 0$, deci $C = 0$,

$$B\ell x = Li\,, \quad i = (B\ell/L)\,x\,. \tag{5}$$

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x B\ell\,dx = \int_0^i L\,di\,, \qquad B\ell x = Li\,. \tag{6}$$

Acest rezultat se poate obţine uşor şi fără integrale, judecând cu valori *medii* : $\langle v \rangle\, \ell B - L\,\Delta i/\Delta t = 0$

sau $$\ell B\,\Delta x/\Delta t - L\,\Delta i/\Delta t = 0\,, \tag{7}$$

$$\Delta(B\ell x - Li) = 0 \;\rightarrow\; B\ell x - Li = \text{const}\,, \tag{8}$$

unde constanta se determină la fel ca mai sus .

Lex secunda (1) devine acum : $ma = mg - B^2\ell^2 x/L =$

$$= -\,(B^2\ell^2/L)[x - mgL/(B^2\ell^2)] = -\,k(x - x_o)\,. \tag{9}$$

Forţa este de tip ***elastic*** cu *constanta cvasielastică* :

$$k = B^2\ell^2/L \tag{10}$$

şi poziţia de echilibru $$x_o = mgL/(B^2\ell^2)\,. \tag{11}$$

Prin urmare, tija va avea o mişcare *oscilatorie armonică* cu amplitudinea şi frecvenţa unghiulară :

$$A = x_o = mgL/(B^2\ell^2)\,, \qquad \omega = \sqrt{k/m} = B\ell/\sqrt{mL}\,. \tag{12}$$

Viteza maximă : $$v_m = \omega A = \frac{g}{B\ell}\sqrt{mL}\,. \tag{13}$$

Se pot aplica şi consideraţii *energetice* : Poziţia de *echilibru* corespunde *anulării forţei* în (1) sau (9) :

$$mg = I_o\ell B = (B^2\ell^2/L)\,x_o\,,$$

de unde $$x_o = mgL/(B^2\ell^2)\,, \quad I_o = mg/(\ell B)\,. \tag{14}$$

Faţă de această poziţie de echilibru tija are iniţial energia potenţială $E_p = mgx_o$ şi $E_c = 0$ (şi energia bobinei zero). Scriem *conservarea energiei* pentru momentul când viteza este *maximă*, când tija trece prin poziţia de *echilibru* :

$$E_{tot} = mgx_o = (1/2)mv_m^2 + (1/2)L\,I_o^2\,. \tag{15}$$

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Introducând aici x_o şi I_o din (14) , găsim $(1/2)L I_o^2 = (1/2)E_{tot}$,

$$(1/2)mv_m^2 = (1/2)E_{tot} , \qquad v_m = \frac{g}{B\ell}\sqrt{mL} . \tag{16}$$

Se vede că *energia magnetică este de tip* ***cinetic*** (energia *electrostatică* este de tip *potenţial*): *la oscilatorul armonic energia totală este egală cu energia cinetică* ***maximă*** *sau cu energia potenţială* ***maximă*** .

(* *) 5.4.12. ***Un acumulator cu t.e.m.*** E = 12 V ***este încărcat cu ajutorul montajului din figură în care*** U = 5,0 V , L = 100 mH ***şi întrerupătorul este periodic închis pentru*** τ_1 = 100 ms ***şi deschis pentru*** τ_2 = 100 ms . ***Dioda este ideală şi rezistenţele sunt neglijabile . Aflaţi curentul mediu de încărcare a acumulatorului. După cât timp se va încărca acumulatorul dacă capacitatea sa este*** Q = 17,8 Ah ***?***

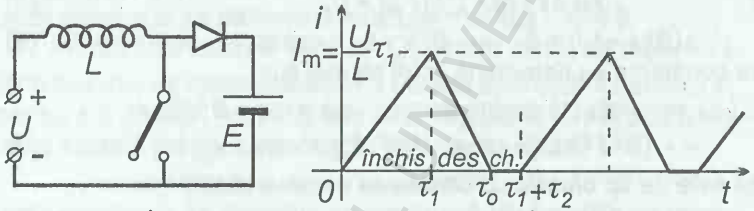


Fig.5.4.12

Rezolvare. După închiderea întrerupătorului sursa debitează doar pe *L* , celălalt ochi de reţea fiind exclus. *Legea lui* ***Ohm*** dă atunci în intervalul $t \in (0 , \tau_1)$:

$$U - L\, di/dt = 0 \quad \text{sau} \quad L\, di = U\, dt . \tag{1}$$

Integrăm : $\int L\, di = \int U\, dt , \qquad Li = Ut + C ,$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $i = 0$, rezultă $C = 0$, deci

$$i = (U/L)\, t , \qquad I_m = (U/L)\, \tau_1 . \tag{2}$$

Se poate integra şi *definit* :

$\int_0^i L\, di = \int_0^t U\, dt$, ceea ce dă $Li = Ut .$

Se poate judeca şi fără integrale :

$$U - L\,\Delta i/\Delta t = 0 , \quad U\Delta t - L\Delta i = 0 , \quad \Delta(Ut - Li) = 0 , \tag{3}$$

deci $Ut - Li = \text{const} ,$

unde constanta se determină ca mai sus .

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După deschiderea întrerupătorului în intervalul de timp (τ_1 , $\tau_1 + \tau_2$) cât timp conduce dioda avem *legea lui* ***Ohm*** :

$$U - E - L\, di/dt = 0 \quad \text{sau} \quad L di = (U - E) dt , \tag{4}$$

care prin integrare dă :

$$\int L\, di = \int (U - E)\, dt , \qquad L i = (U - E) t + C , \tag{5}$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = \tau_1$ avem $I = I_m = (U / L)\, \tau_1$ (2) :

$L I_m = U\tau_1 = (U - E)\tau_1 + C$, de unde $C = E\tau_1$,

astfel încât (5) devine

$$i = -[(E - U) / L]\, t + (E / L)\, \tau_1 . \tag{6}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{I_m}^{i} L\, di = \int_{\tau_1}^{t} (U - E)\, dt , \quad L(i - I_m) = (U - E)(t - \tau_1).$$

Rezultatul (6) se poate obţine şi fără integrale, judecând cu valori *medii* , ca mai înainte : $U - E - L\, \Delta i / \Delta t = 0$,

$$(U - E)\Delta t - L\Delta i = 0, \quad \Delta[(U - E)\, t - L\, i] = 0 , \tag{7}$$

deci $(U - E)\, t - L\, i = \text{const}$,

unde constanta se determină exact ca mai sus.

Legea *liniară* de descreştere (6) este valabilă doar pentru $i \geq 0$ când dioda conduce . Curentul se anulează la momentul

$$t = \tau_o = E\tau_1 : (E - U) = 0{,}17 \text{ s} < \tau_1 + \tau_2 = 0{,}20 \text{ s} , \tag{8}$$

după care rămâne nul până la $t = \tau_1 + \tau_2$. Apoi ciclul se repetă. Prin acumulator va trece curent numai în intervalul (τ_1 , τ_o) (procesul repetându-se apoi periodic) :

$$dq = i\, dt , \quad q = \int dq = \int_{\tau_1}^{\tau_o} i\, dt , \text{ unde } i \text{ este (6) .} \tag{9}$$

Integrala de aici reprezintă **aria** de sub graficul curentului, deci

$$q = (1/2)\, (\tau_o - \tau_1)\, I_m = U^2 \tau_1^2 : [2(E - U)L] , \tag{10}$$

de unde curentul mediu prin acumulator (raportăm evident la $\tau_1 + \tau_2$):

$$\langle i \rangle = q : (\tau_1 + \tau_2) =$$

$$= U^2 \tau_1^2 : [2(E - U)L(\tau_1 + \tau_2)] = 0{,}89 \text{ A} . \tag{11}$$

Se poate judeca şi fără integrale, direct cu valorile *medii* :

$$q = \langle i \rangle_o\, \Delta t = \langle i \rangle_o (\tau_o - \tau_1) , \tag{12}$$

dar pe intervalul ($\tau_o - \tau_1$) pe care mediem aici curentul descreşte

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

liniar şi valoarea sa medie este $I_m/2$, care introdusă în (12) dă (10). Mai departe curentul mediu prin acumulator în procesul total de încărcare se obţine ca în (11).

Desigur curentul mediu (11) se poate obţine direct din *definiţie* :

$$\langle i\rangle = \frac{1}{\tau_1+\tau_2}\int_{\tau_1}^{\tau_0} i\,dt\,, \text{ unde } i \text{ este (6)}. \qquad (13)$$

Timpul în care se încarcă acumulatorul :

$$t = Q : \langle i\rangle = 20\text{ h}. \qquad (14)$$

* * **5.4.13.** ***Un condensator de capacitate*** C ***, încărcat cu sarcinile*** ± q ***, este la un moment dat descărcat printr-un rezistor de rezistenţă*** R ***. Aflaţi : a) Legea de variaţie a sarcinii de pe condensator şi a curentului prin rezistor , b) Căldura degajată până la momentul*** t ***.***

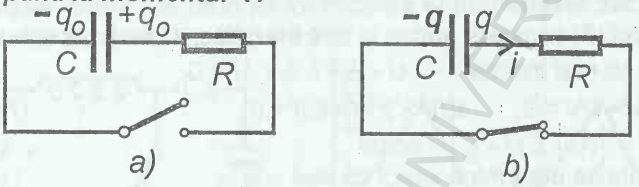


Fig.5.4.13

Rezolvare. Avem $q = Cu = CRi = -CR\,dq/dt$ (1)

($dq < 0$, sarcina scade , condensatorul se descarcă).

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}\,, \quad \int\frac{dq}{q} = \ln q = \int -\frac{dt}{RC} = -\frac{t}{RC} + K\,,$$

unde constanta de integrare K se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $q = q_o$; rezultă $\ln q_o = K$, deci

$$\ln(q/q_o) = -t/(RC)\,, \quad q = q_o e^{-t/(RC)} = q_o e^{-t/\tau}\,, \qquad (2)$$

$$\tau = RC\,, \qquad (3)$$

unde $\tau = RC$ este ***constanta de timp*** a circuitului (arată în cât timp sarcina se reduce de e ori) .

Putem integra şi *definit*, atunci limitele de integrare se corespund : la sarcina iniţială q_o corespunde $t = 0$, deci

$$\int_{q_o}^{q}\frac{dq}{q} = -\int_0^t\frac{dt}{RC}\,, \quad \ln\frac{q}{q_o} = -\frac{t}{RC}\,.$$

Intensitatea curentului :

$$i = -dq/dt = [q_o/(RC)]\,e^{-t/(RC)} = (q_o/\tau)\,e^{-t/\tau}\,. \qquad (4)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Căldura degajată : $Q = \int_0^t Ri^2\,dt = \frac{q_0^2}{RC^2}\int_0^t e^{-2t/(RC)}dt =$

$= [q_0^2/(2C)]\,[1 - e^{-2t/(RC)}] = W_0[1 - e^{-2t/(RC)}] = W_0[1 - e^{-2t/\tau}]$,(5) unde W_0 este energia iniţială a condensatorului.

* * 5.4.14. ***Deduceţi legea de variaţie a curentului în circuitul din figură , după închiderea întrerupătorului .***

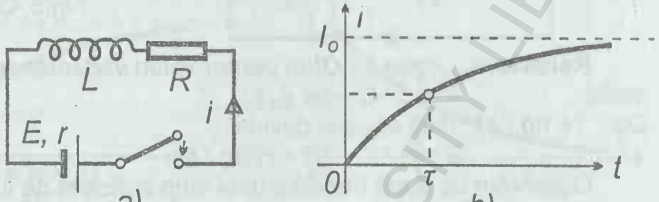


Fig.5.4.14

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* se scrie astfel : $E - L\,di/dt = (R + r)i$. (1)

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\frac{L\,di}{E-(R+r)i} = dt\,, \qquad \int\frac{L\,di}{E-(R+r)i} = \int dt \tag{2}$$

sau $$\frac{-L}{R+r}\int\frac{-(R+r)di}{E-(R+r)i} = \int dt\,,$$

$$-[L/(R+r)]\ln[E-(R+r)i] = t + C\,,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $i = 0$; $-[L/(R+r)]\ln E = C$, deci

$$-[L/(R+r)]\ln\{[E-(R+r)i]/E\} = t\,.$$

$$i = [E/(R+r)]\,(1 - e^{-(R+r)t/L}) = I_0(1 - e^{-t/\tau})\,, \tag{3}$$

$\tau = L : (R + r)$ - ***constanta de timp*** a circuitului . (4)

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^i\frac{L\,di}{E-(R+r)i} = \int_0^t dt\,,$$

de unde $-[L/(R+r)]\ln\{[E-(R+r)i]/E\} = t$, etc.

După timpul $t = \tau = L/(R + r)$ (*constanta de timp* a circuitului) curentul devine : $i = I_0(1 - 1/e) = 0{,}63\,I_0$. (5)

Teoretic, abia pentru $t \to \infty$, obţinem $i \to I_0$ (staţionar). Valoarea *staţionară* a curentului $i = I_0 = \text{const}$ se poate obţine direct din ecuaţia diferenţială observând că atunci trebuie să avem $di/dt = 0$.

BUCUREŞTI FACULTATEA DE FIZICĂ UNIVERSITY LIBRARY

Observăm că la momentul $t = 0$ inductanţa se comportă ca o rezistenţă *infinită* (întrerupere de circuit) ($i = 0$), iar la $t \gg \tau$ (în c.c.) se comportă ca un *scurt-circuit* .

**** 5.4.15. *Deduceţi legea de variaţie a curentului în circuitul din figură , după închiderea întrerupătorului .***

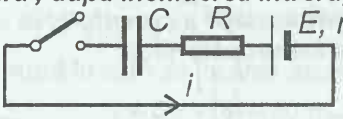


Fig.5.4.15

Rezolvare. *Legea lui* **Ohm** pentru valori *instantanee* se scrie astfel : $E = q / C + (R + r)\, i$. (1)

Dar $i = \mathrm{d}q / \mathrm{d}t$, deci ecuaţia devine

$$E = q / C + (R + r)\, \mathrm{d}q / \mathrm{d}t . \quad (2)$$

Observăm că după trecerea unui timp suficient de lung, în regim *staţionar* : q = const , deci $\mathrm{d}q / \mathrm{d}t = 0$ şi ecuaţia diferenţială (2) dă imediat sarcina cu care se va încărca definitiv condensatorul :

$$q_o = C\, E . \quad (3)$$

Separăm variabilele în (2) şi integrăm :

$$\frac{(R+r)\, \mathrm{d}q}{E - q/C} = \mathrm{d}t , \qquad \int \frac{(R+r)\, \mathrm{d}q}{E - q/C} = \int \mathrm{d}t$$

sau

$$-\frac{R+r}{1/C} \int \frac{-\, \mathrm{d}q/C}{E - q/C} = \int \mathrm{d}t ,$$

$$-\,(R + r)C \ln(E - q / C) = t + K ,$$

unde constanta de integrare K se determină din *condiţia* ***iniţială*** : la $t = 0$ avem $q = 0$: $-\,(R + r)C \ln E = K$, deci

$$-\,(R + r)C \ln[\, (E - q / C) / E\,] = t , \quad (4)$$

de unde $$q = CE(1 - \mathrm{e}^{-\,t/[(R+r)C]}) = q_o(1 - \mathrm{e}^{-\,t/\tau}) , \quad (5)$$

$\tau = (R + r)C$ - ***constanta de timp*** a circuitului . (6)

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^q \frac{(R+r)\, \mathrm{d}q}{E - q/C} = \int_0^t \mathrm{d}t , \qquad -(R+r)C \ln \frac{E - q/C}{E} = t , \text{ etc.}$$

După aceeaşi lege variază şi tensiunea pe condensator $u_C = q / C$:

$$u_C = E(1 - \mathrm{e}^{-\,t/\tau}) . \quad (7)$$

După timpul $t = \tau = (R + r)C$ (*constanta de timp* a circuitului) sarcina (ca şi tensiunea pe condensator) devine

$$q = q_o(1 - 1 / \mathrm{e}) = 0{,}63\, q_o , \quad u_C = 0{,}63\, E . \quad (8)$$

Constanta de timp ne dă o evaluare a timpului de descărcare a unui condensator. Teoretic, abia la $t \to \infty$ avem $q \to q_0 = CE$ (staţionar) .

Observăm că la momentul $t = 0$ condensatorul se comportă ca fiind *scurt-circuitat* , iar pentru $t \gg \tau$ (în c.c.) reprezintă o *întrerupere* de circuit (ca o rezistenţă infinită) .

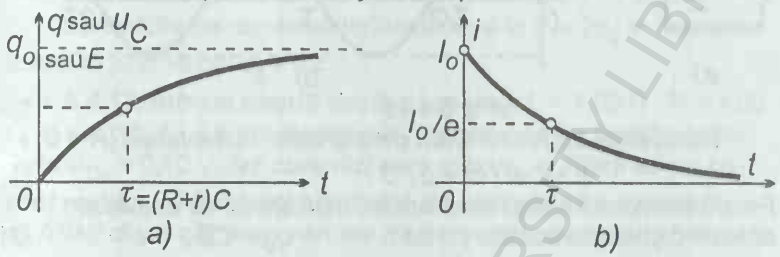


Fig.5.4.15 a, b

Legea de variaţie a **curentului** se poate obţine din (5) :

$$i = dq / dt = CE(1 - e^{-t/[(R+r)C]}) \{ - 1 / [(R + r)C]\} =$$

$$= [E / (R + r)]\, e^{-t/[(R+r)C]} = I_0\, e^{-t/\tau} . \qquad (9)$$

După timpul $t = \tau$ curentul scade de e ori .

Legea (9) pentru curent se poate obţine şi din *legea Ohm* (1) pe care o derivăm în raport cu timpul ($dq / dt = i$) :

$$0 = i / C + (R + r)\, di / dt . \qquad (10)$$

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{(R+r)C} = -\frac{dt}{\tau} , \quad \int \frac{di}{i} = -\int \frac{dt}{\tau} , \quad \ln i = -\frac{t}{\tau} + K' ,$$

unde constanta de integrare K' se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $i = I_0$; $\ln I_0 = K'$, deci

$$\ln (i / I_0) = - t / \tau , \qquad i = I_0\, e^{-t/\tau},$$

unde I_0 trebuie să fie $I_0 = E / (R + r)$, deoarece la $t = 0$ sarcina şi tensiunea pe condensator sunt zero, armăturile sunt la acelaşi potenţial, ca şi cum ar fi *scurt*-circuitate .

**** 5.4.16.** ***În montajul din figură se cunosc*** L , C , E . ***Iniţial condensatorul nu este încărcat . Ce valoare maximă va atinge curentul din circuit după închiderea întrerupătorului ? Stabiliţi legea de variaţie a curentului şi sarcinii de pe condensator .***
Aplicaţie : E = 10 V, *impedanţa caracteristică* Z_0 = 1,0 kΩ .

BUCHAREST TECHNICAL UNIVERSITY LIBRARY

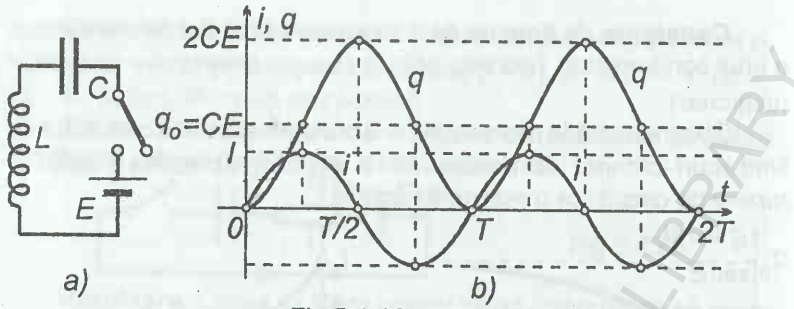


Fig.5.4.16

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* ($R = 0$) :

$$E - L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = q/C\,. \qquad (1)$$

Pentru momentul când i este *maxim*, *derivata* sa se *anulează* : $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$ şi atunci ecuaţia (1) dă : $q_o = CE\,,$ (2)

această sarcină trece prin sursă (până în momentul considerat) şi deci sursa (bateria) efectuează lucrul mecanic :

$$W_{bat} = Eq_o = CE^2\,. \qquad (3)$$

Acest lucru mecanic îl regăsim în energia condensatorului şi în energia magnetică a bobinei: $W_{bat} = Eq_o = (1/2)q_oE + (1/2)LI_m^2$

sau $(1/2)\,LI_m^2 = (1/2)q_oE = (1/2)CE^2$ (4)

(energia maximă a bobinei este egală cu energia maximă a condensatorului) . $I_m = E\sqrt{\dfrac{C}{L}} = \dfrac{E}{Z_o} = 10\ \mathrm{mA}\,.$ (5)

Dacă derivăm ecuaţia (1) în raport cu timpul, obţinem ($\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = i$):

$$-L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \text{sau} \quad \ddot{i} + \frac{1}{LC}\,i = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{i} + \omega^2 i = 0\,,$$

aceasta este *ecuaţia diferenţială a* ***oscilatorului armonic*** , deci

$i = I_m \sin\omega t$, (pentru $t = 0$ avem $i = 0$), $\omega = 1 : \sqrt{LC}$. (7)

Pe de altă parte, introducând în (1) $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, obţinem :

$$E - L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q}{C} \quad \text{sau} \quad (q - CE)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{LC}(q - CE) = 0\,. \qquad (8)$$

care este iarăşi *ecuaţia diferenţială a* ***oscilatorului armonic*** :

$$q - CE = -CE\cos\omega t\,, \quad (\text{la } t = 0\,,\ q = 0)$$

sau $q = CE(1 - \cos\omega t) = q_o(1 - \cos\omega t)\,.$ (9)

Atât în (7), cât şi în (9), am ales constantele de integrare astfel încât soluţia să verifice *condiţiile* ***iniţiale*** specificate .

De altfel rezultatul se obţine imediat şi din (7) : $dq = i\,dt$,

$$q = \int i\,dt = \int I_m \sin\omega t \cdot dt = -\frac{1}{\omega} I_m \cos\omega t + K ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiţia iniţială* : la $t = 0$ avem $q = 0$: $0 = -I_m/\omega + K$, deci

$$q = (I_m/\omega)(1 - \cos\omega t) = CE\,(1 - \cos\omega t) . \qquad (10)$$

Sarcina de pe condensator variază de la 0 la $2q_o$ în mod sinusoidal în jurul valorii $q_o = CE$.

**** 5.4.17. *Într-un circuit oscilant se dau:*** L = 1,00 H , R = 1,00 Ω, C = 1,00 μF . ***La un moment dat tensiunea pe condensator este*** U_{Co} = 0,10 V, ***iar curentul este maxim. a) Aflaţi acest curent maxim. b) Evaluaţi pierderile de energie pe o perioadă. c) Aflaţi după cât timp sarcina de pe condensator se anulează.***

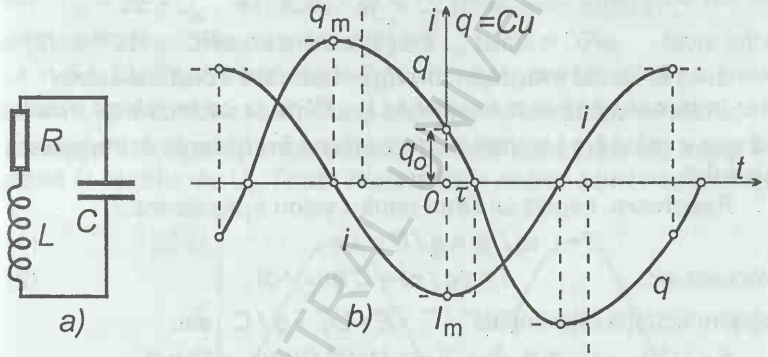


Fig.5.4.17

Rezolvare. a) *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori instantanee :

$$-L\,di/dt = q/C + R\,i . \qquad (1)$$

În momentul când curentul este *maxim* $i = I_m$ *derivata* sa se *anulează* $di/dt = 0$ şi din ecuaţia (1) rezultă atunci :

$$U_{Co} = q_o/C = -R\,I_m , \text{ de unde } \quad I_m = -U_{Co}/R = -0{,}10\ \text{A} \quad (2)$$

(semnul minus arată că în acest moment tensiunea pe rezistor este egală în modul dar de sens opus tensiunii de pe condensator). Observăm că la un circuit oscilant *ideal* ($R = 0$), când curentul este *maxim* , sarcina şi tensiunea pe condensator se *anulează* ($R = 0$) .

b) Fiindcă $R = 1\ \Omega \ll \sqrt{L/C} = 10^3\ \Omega$, amortizarea oscilaţilor este *slabă* şi ele sunt *aproape* ***sinusoidale***. Atunci **căldura Joule** pe o perioadă : $Q_J = R\,I_{ef}^2 T =$

$= (1/2)\, R\, I_m^2 T = (1/2)\, R\, I_m^2\, 2\pi\sqrt{L/C} = 30\ \mu J$, (3)

în timp ce energia *totală* iniţială :

$W = (1/2)\, L\, I_m^2 + (1/2)\, C U_{Co}^2 = 5{,}0\ mJ \gg Q_J$. (4)

c) Din cauza termenului ***disipativ*** $R\,i$, curentul şi tensiunea (sau sarcina) de pe condensator **nu** sunt nici *riguros* sinusoidale şi nici defazate cu $\pi/2$.

Avem $i = dq/dt$, $dq = i\,dt$, $q = \int dq = \int i\,dt$. (5)

Aproximăm curentul printr-o funcţie sinusoidală :

$i = I_m \cos\omega t$, (6)

atunci, conform figurii , integrând pe intervalul de timp cerut τ :

$$\int_{q_o}^{0} dq = 0 - q_o = \int_0^{\tau} I_m \cos\omega t \cdot dt = \frac{I_m}{\omega} \sin\omega t\ . \quad (7)$$

Dar din (2) avem $q_o = -\,R\,C\,I_m$, (8)

astfel încât $\omega RC = \sin\omega t$, $t = (1/\omega)\ \text{arc}\sin\omega RC \cong 10^{-6}$ s. (9)

**** 5.4.18.** ***Se dă montajul din figură în care condensatorul este încărcat până la o tensiune*** U_o ***. Până la ce tensiune maximă se va reîncărca condensatorul după închiderea întrerupătorului ?***

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* :

$E - L\,di/dt = q/C = u_C$. (1)

Înlocuind aici $i = dq/dt = C\,du_C/dt$, (2)

obţinem ecuaţia diferenţială : $E - L\ddot{q} - q/C$ sau

$E - LC\ddot{u}_C - u_C = 0$ sau $\ddot{u}_C + [1/(LC)]\,(u_C - E) = 0$

sau $(u_C - E)^{\cdot\cdot} + \omega^2 (u_C - E) = 0$, $\omega^2 = 1 : (LC)$, (3)

adică cunoscuta ecuaţie diferenţială a *oscilatorului armonic*, deci soluţia este : $u_C - E = (U_o - E)\cos\omega t$, (4)

unde am ţinut seama de *condiţia* ***iniţială*** ca la $t = 0$ să avem $u_C = U_o$. Pentru $\cos\omega t = -1$ (la reîncărcare !) avem

$u_{C\,max} = 2E - U_o$, (5)

unde U_o poate fi şi negativ .

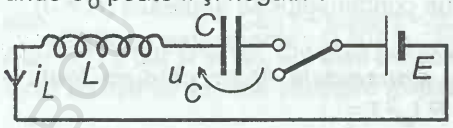


Fig.5.4.18 - 19

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultatul de mai sus se poate obţine şi cu ajutorul *bilanţului* ***energetic*** astfel :

Energia iniţială a condensatorului $(1/2)CU_0^2$ plus lucrul mecanic efectuat de sursă până la momentul dat $(q - q_0)E = (Cu_C - CU_0)E$ sunt egale cu energia condensatorului $(1/2)Cu_C^2$ plus energia bobinei $(1/2)L\,i^2$:

$$(1/2)CU_0^2 + C(u_C - U_0)E = (1/2)Cu_C^2 + (1/2)L\,i^2 \qquad (6)$$

Tensiunea u_C sau sarcina $q = Cu_C$ sunt *maxime* când derivata $dq/dt = i$ se anulează : $dq/dt = i = 0$ şi atunci *bilanţul* ***energetic*** (6) devine : $u_C^2 - 2Eu_C + 2EU_0 - U_0^2 = 0$ (7)

cu soluţiile : $u_C = E \pm \sqrt{E^2 - 2EU_0 + U_0^2} = E \pm (E - U_0)$,

$u_C = 2E - U_0$, respectiv $u_C = U_0$ (tensiunea iniţială) , (8)

prima soluţie corespunde reîncărcării .

** **5.4.19.** ***Reprezentaţi grafic curentul*** i_L ***prin bobină şi tensiunea*** u_C ***pe condensator după închiderea întrerupătorului în montajul din figură, unde condensatorul este încărcat iniţial până la tensiunea*** U_0. ***Toate rezistenţele active sunt neglijabile.***

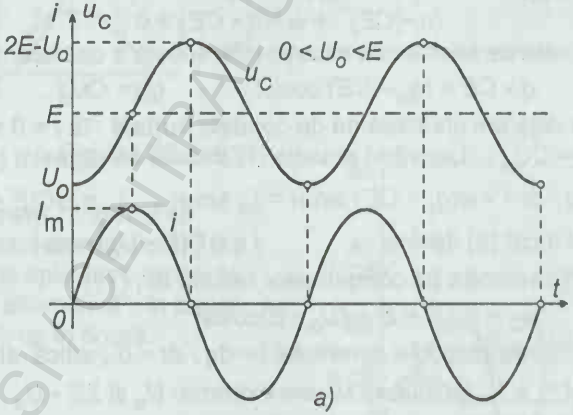


Fig.5.4.19 a

Rezolvare. *Legea lui* ***Ohm*** pentru valori *instantanee* ($R = 0$) :

$$E - L\,di/dt = q/C\,. \qquad (1)$$

Ştiind că $dq/dt = i$, derivăm (1) în raport cu timpul t :

$$-L\,d^2i/dt^2 = i/C \quad \text{sau} \quad \ddot{i} + [1/(LC)]\,i = 0$$

sau $\ddot{i} + \omega^2 i = 0$, $\omega^2 = 1/(LC)$. (3)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

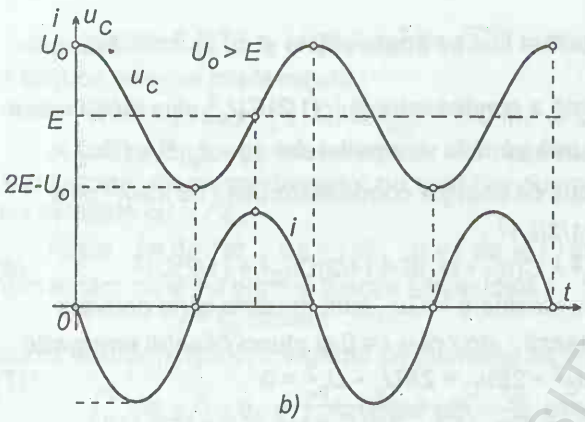


Fig.5.4.19 b

Aceasta este cunoscuta ecuaţie diferenţială a *oscilatorului armonic* a cărei soluţie este $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$, (4)

unde constanta de integrare α se determină din *condiţia **iniţială*** : la $t = 0$ avem $i = 0$, rezultă $\alpha = 0$, deci $i = I_m \sin\omega t$. (5)

Pe de altă parte, înlocuind pe i cu dq/dt în ecuaţia (1), obţinem $E - L\, d^2q/dt^2 = q/C$ sau $E - L\ddot{q} = q/C$

sau $(q - CE)^{\cdot\cdot} + \omega^2(q - CE) = 0$, (6)

care este de asemenea ecuaţia diferenţială a *oscilatorului armonic* :

$$q - CE = (q_o - CE)\cos\omega t, \qquad q_o = CU_o, \tag{7}$$

unde deja am ţinut seama de *condiţia **iniţială*** : la $t = 0$ sarcina $q = q_o = CU_o$. Derivând ecuaţia (7) trebuie să regăsim (5) :

$$i = dq/dt = -\omega(q_o - CE)\sin\omega t = I_m \sin\omega t, \quad I_m = \omega C(E - U_o), \tag{8}$$

astfel încât (5) devine $i = \omega C(E - U_o)\sin\omega t$. (9)

Tensiunea pe condensator rezultă din (7) :

$$u_C = q/C = E + (U_o - E)\cos\omega t. \tag{10}$$

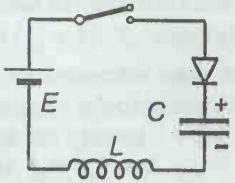
Pentru zerourile curentului $i = dq/dt = 0$, adică $\sin\omega t = 0$ şi $\cos\omega t = \pm 1$, tensiunea u_C are extreme: U_o şi $2E - U_o$.

** **5.4.20.** ***Reprezentaţi grafic curentul prin bobină şi tensiunea la bornele condensatorului, după închiderea întrerupătorului în montajul din figură . Rezistenţele active sunt neglijabile, iar diodele semiconductoare sunt ideale . Condensatorul este iniţial neîncărcat .***

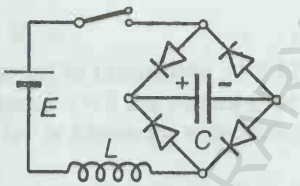
Rezolvare. Rezolvarea acestei probleme se bazează pe

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig.5.4.20



a)



b)

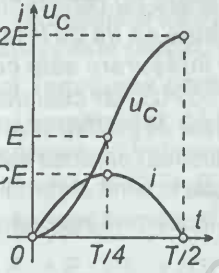
rezultatele problemei precedente 5.4.19 , care trebuie revăzută acum. Am obţinut acolo : $i = \omega C(E - U_o)\sin\omega t$

şi $u_C = E + (U_o - E)\cos\omega t\,, \qquad \omega = 1/\sqrt{LC}\,. \qquad (1)$

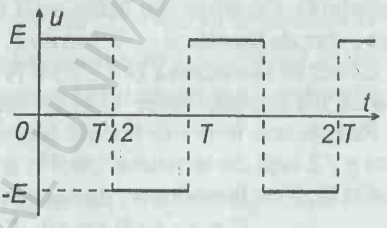
Pentru prima semiperioadă , $t \in (0\,,\, T/2)$, avem $U_o = 0$ şi

$i = \omega CE\sin\omega t\,, \quad u_C = E(1 - \cos\omega t)\,, \qquad t \le T/2\,, \qquad (2)$

după acest moment însă, nu mai poate trece curent în nici un sens şi condensatorul rămâne încărcat până la tensiunea $2E$ (v. figura).



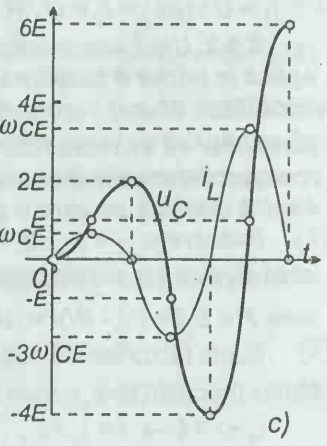
a)



b)

Fig.5.4.20 a, b, c

Propunem cititorului să studieze cazul montajului (b) (cu punte), dacă aplicăm o tensiune "constantă alternativă", în trepte, cu perioada T , ca în figură.



c)

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. MAŞINI ELECTRICE

6.1. ELECTROMOTOARE

6.1.1. ***Un electromotor de c.a. monofazat are două înfăşurări identice de inductanţă*** L = 1,0 H ***fiecare (şi rezistenţă activă neglijabilă). Curenţii din înfăşurări trebuie să fie de intensităţi egale, dar defazaţi cu*** $\pi / 2$ ***între ei. O înfăşurare este conectată direct la tensiunea*** U = 220 V (ν = 50 Hz), ***iar cealaltă în serie cu un condensator*** C ***şi un rezistor*** R. ***Aflaţi*** C ***şi*** R.

Rezolvare. În prima bobină (pur inductivă) curentul este defazat cu $\pi / 2$ faţă de tensiune, deci în a doua bobină curentul trebuie să fie în fază cu tensiunea, dar aceasta înseamnă ***rezonanţă*** :

$$C = 1 : (\omega^2 L) = 10\ \mu F\ . \qquad (1)$$

Pe de altă parte s-a cerut ca curenţii să fie egali în modul, deci

$$I_1 = U : (\omega L) = I_2 = U / R \text{ (la rezonanţă)} \rightarrow R = \omega L = 314\ \Omega. \qquad (2)$$

6.1.2. ***Unui electromotor de c.c. cu excitaţie în serie i se aplică la borne o tensiune*** U = 120 V. ***Dacă rotorul său este imobilizat, atunci curentul este*** I_o = 20 A, ***iar dacă rotorul este lăsat liber să se rotească, curentul este*** I = 5,0 A. ***Aflaţi puterea mecanică dezvoltată în aceste condiţii, precum şi puterea mecanică*** **maximă** ***pe care o poate dezvolta acest motor.***

Rezolvare. $U = RI_o\ , \qquad U = RI + E_c\ , \qquad (1)$

unde E_c este tensiunea *contraelectromotoare* indusă. *Puterea utilă* este: $P = E_c I = (U - RI)I = (U - UI / I_o)I = (U / I_o)\cdot(I_o - I)I = 450$ W. (2)

Suma factorilor ultimului produs este *constantă* (egală cu I_o), atunci produsul este *maxim* când factorii sunt *egali* :

$$I_o - I = I \rightarrow I = I_o / 2\ , \quad P_{max} = (1/4)UI_o = 600\ \text{W}\ . \qquad (3)$$

Randamentul în cele două cazuri :

$$\eta = 1 - I / I_0 = 75\ \%\ ,\ \text{respectiv}\ \ 50\ \%\ . \qquad (4)$$

6.1.3. ***Un electromotor este alimentat la tensiunea*** $U = 12$ V. ***Ce lucru mecanic efectuează în timpul*** $\tau = 2{,}0$ s , ***dacă prin înfăşurare trece un curent*** $I = 2{,}0$ A , ***iar la blocarea motorului trece un curent*** $I_0 = 3{,}0$ A ?

Rezolvare. La blocarea motorului : $U = RI_0 \rightarrow R = U / I_0$. (1)

În timpul funcţionării : $U = R\,I + E_c \rightarrow U\,I = R\,I^2 + E_c\,I$, (2)

$$W = E_c I \tau = (U\,I - R\,I^2)\tau = UI(1 - I / I_0)\tau = 16\ \text{J}\ , \qquad (3)$$

randamentul : $\eta = 1 - I / I_0 = 33\ \%$. (4)

6.1.4. ***În circuitul unei baterii cu t.e.m.*** $E = 48$ V ***se montează în serie un motor de c.c. şi un rezistor cu rezistenţa*** $R = 5{,}00\ \Omega$. ***Rezistenţa internă a bateriei şi rezistenţa conductoarelor de conexiune sunt neglijabile. În timpul funcţionării motorului în rezistor se degajă o căldură*** $Q = 300$ J ***în timpul*** $\tau = 1{,}00$ min, ***iar dacă rotorul este blocat, se degajă*** $Q_0 = 4{,}8$ kJ ***în acelaşi timp. Aflaţi : a) Tensiunea*** contraelectromotoare E_c ***indusă în motor în timpul funcţionării, b) Randamentul electric al motorului .***

Rezolvare. a) În timpul funcţionării motorului :

$$E = (R_m + R)I + E_c\ , \qquad R I^2 \tau = Q\ , \qquad (1)$$

în timpul blocării : $E = (R_m + R) I_0\ , R {I_0}^2 \tau = Q_0\ ,$ (2) de unde

$$E_c = E - (R_m + R)I =$$

$$= E - E\,I / I_0 = E(1 - \sqrt{Q/Q_0}\ ) = 36\ \text{V}\ . \qquad (3)$$

b) $I = \sqrt{Q/(R\tau)} = 1{,}00$ A , $\eta = \dfrac{E_c I}{(E - RI)I} = \dfrac{E_c}{E - RI} = 84\ \%$. (4)

6.1.5. ***Un electromotor este alimentat la t.e.m.*** $E = 500$ V. ***La pornire (fără reostat de pornire) curentul este*** $I_0 = 2{,}0$ kA, ***iar în regim staţionar*** $I = 1{,}0$ kA . ***Aflaţi puterea dezvoltată de motor şi randamentul motorului.***

Rezolvare. $E = r I_0\ ,$ $E = r I + E_c\ ,$ (1)

unde r este rezistenţa înfăşurării motorului şi E_c - t.c.e.m. indusă în timpul funcţionării . *Puterea utilă* este :

$$P = E_c I = (E - r I)I = (E - E \cdot I / I_0)I = 250\ \text{kW}\ , \qquad (2)$$

$$\eta = P_u : P_{tot} = E_c I : (E I) = E_c : E = 1 - I / I_0 = 50\ \%\ , \qquad (3)$$

dealtfel condiţiile din problemă corespund puterii utile *maxime* pe care o poate da electromotorul.

6.1.6. ***Un electromotor este alimentat la tensiunea*** $U = 24$ V. ***Care este puterea mecanică a motorului dacă curentul prin înfăşurare este*** $I_1 = 8{,}0$ A, ***ştiind că cu motorul blocat curentul este*** $I_2 = 16$ A ***?***

Rezolvare. $U = RI_2$, $U = RI_1 + E_c$, (1)

$$P = E_c I_1 = (U - RI_1)I_1 = UI_1(1 - I_1 / I_2) = 96 \text{ W}. \quad (2)$$

6.1.7. ***Un electromotor cu rezistenţa înfăşurărilor*** $R = 2{,}0\ \Omega$ ***este conectat la un generator de c.c. cu t.e.m.*** $E = 240$ V ***şi rezistenţa internă*** $r = 4{,}0\ \Omega$. ***În timpul funcţionării prin înfăşurări trece un curent*** $I = 10$ A. ***Aflaţi randamentul motorului.***

Rezolvare. Puterea totală dezvoltată de generator este EI din care $(r+R)I^2$ se disipă pe rezistenţa internă şi pe rezistenţa înfăşurărilor. Tensiunea care se aplică la bornele motorului este tensiunea de la bornele generatorului.

$$U = E - rI = RI + E_c \rightarrow E_c = E - (r + R)I. \quad (1)$$

$$P_u = E_c I = EI - (r + R)I^2, \quad P_{tot} = UI = (E - rI)I, \quad (2)$$

$$\eta = P_u : P_{tot} = [EI - (r + R)I^2] : [EI - rI^2] =$$

$$= [E - (r + R)I] : [E - rI] = E_c : U = 90\ \%. \quad (3)$$

6.1.8. ***Un electromotor, conectat la tensiunea continuă*** $U = 120$ V ***şi având rezistenţa circuitului*** $R = 20\ \Omega$, ***dezvoltă o putere*** $P = 160$ W ***la o anumită sarcină. Ce t.e.m. va produce acest motor, dacă îl folosim ca dinam, rotind rotorul cu aceeaşi turaţie pe care o avea ca motor ?***

Rezolvare. Ca electromotor avem :

$$U = RI + E_c, \quad P = E_c I = E_c(U - E_c) : R. \quad (1)$$

În calitate de dinam, la aceeaşi turaţie, t.e.m. indusă va fi E_c şi din (1) se vede că pentru o putere dată P avem două valori posibile pentru E_c: $E_c^2 - UE_c + PR = 0$,

$$E_c = U/2 \pm \sqrt{U^2/4 - RP} = 80 \text{ V}, \text{ respectiv } 40 \text{ V}. \quad (2)$$

Puterea utilă (1) se reprezintă printr-o parabolă. Suma celor doi factori fiind *constantă* ($E_c + U - E_c = U$), produsul lor va fi *maxim* când ei sunt egali :

$$E_c = U - E_c \rightarrow E_c = U/2, \quad P_{max} = U^2 : (4R). \quad (3)$$

Sau altfel: coeficientul lui E_c^2 în (1) fiind *negativ* ($-1/R$), parabola

are un *maxim* pentru $[- b / (2a)] = - (U / R) : [2 \cdot (- 1 / R)] = U / 2$ etc. Parabola este reprezentată în figură.

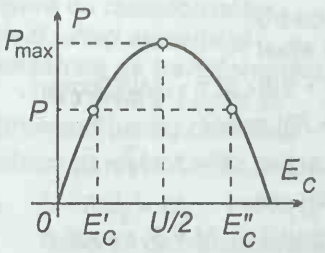


Fig.6.1.8

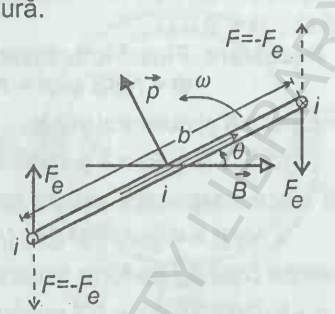


Fig.6.1.10

(*) **6.1.9.** ***Ce putere maximă poate dezvolta un electromotor de c.c. la tensiunea*** U = 120 V, ***dacă rezistenţa circuitului său este*** R = 20 Ω ***? Ce curent va trece în acest caz prin circuit ?***

Rezolvare. Avem $U = R I + E_c$, (1)

unde E_c este tensiunea *contraelectromotoare* (t.c.e.m.) indusă.

Atunci puterea : $P = E_c I = (1 / R) \cdot E_c (U - E_c)$. (2)

În membrul drept avem produsul a două mărimi a căror sumă este *constantă*, atunci produsul este *maxim*, când factorii sunt *egali* :

$E_c = U - E_c$, de unde $E_c = U / 2$, (3)

deci puterea maximă şi curentul corespunzător sunt

$P_{max} = U^2 / (4E) = 180$ W, $I_m = (U - E_c) / R = U / (2R) = 3{,}0$ A. (4)

Randamentul motorului în aceste condiţii este

$\eta_m = E_c I : (U I) = E_c : U = 50$ % . (3)

Condiţia (3) se poate obţine evident şi cu ajutorul *derivatelor* :

$P = (1 / R) \cdot E_c (U - E_c) = (1 / R)(E_c U - E_c^2) = f(E_c)$. (6)

Condiţia de extremum este ***anularea derivatei :***

$f'(E_c) = (1 / R)(U - 2E_c) = 0$, de unde $E_c = U / 2$. (7)

Natura extremului se obţine din *semnul* derivatei a *doua* :

$f''(E_c) = - 2 / R < 0$, deci avem un *maxim* . (8)

(* *) 6.1.10. ***Cel mai simplu dinam constă dintr-un cadru dreptunghiular de arie*** S ***cu*** N ***spire şi cu rezistenţa*** r , ***cadru care se roteşte cu viteza unghiulară*** ω ***într-un câmp magnetic omogen*** $\vec{B}$. ***Dinamul debitează pe rezistenţa externă*** R . ***Aflaţi momentul mediu al cuplului de forţe cu care trebuie rotit cadrul şi puterea medie consumată pentru rotirea sa .***

Aplicaţie : ν = 50 Hz , N = 100 spire, B =10 mT, S = 40 cm^2 , r = = 1,0 Ω , R = 9,0 Ω .

Rezolvare. Fluxul îmbrăţişat de cadru :

$$\Phi = NBS\sin\theta = NBS\sin\omega t\,. \qquad (1)$$

T.e.m. indusă şi *curentul* indus : $E = -\,d\Phi / dt = -\,\omega NBS\cos\omega t$,

$$i = E : (r + R) = -\,[\omega NBS : (r + R)]\cos\omega t\,. \qquad (2)$$

Forţa electromagnetică asupra laturii active : $F = Ni\,|\vec{\ell}\times\vec{B}| =$

$$= Ni\ell B = -\,[\omega N^2B^2S\ell : (r + R)]\cos\omega t\,. \qquad (3)$$

Momentul cuplului de forţe asupra cadrului : $M = F\cdot b\cos\theta =$

$$= -\,[\omega(NBS)^2 : (r + R)]\cos^2\omega t\,, \qquad (S = \ell\, b)\,. \qquad (4)$$

Altfel, se putea calcula *momentul* ***magnetic*** al cadrului:

$$\vec{p} = Ni\vec{S} = -\frac{\omega N^2BS}{r+R}\cdot\vec{S}\cos\omega t$$

şi atunci momentul cuplului : $|\vec{M}| = |\vec{p}\times\vec{B}| =$

$$= p\cdot B\sin(\pi/2 + \theta) = [\omega(NBS)^2 : (r + R)]\cos^2\omega t\,. \qquad (6)$$

Cuplul cu care trebuie rotit cadrul este egal în modul şi de sens opus cu cel exercitat de câmpul magnetic.

Amintindu-ne de valoarea *medie* a lui *sinus* ***pătrat*** şi *cosinus* ***pătrat*** (v. (31) *Breviar*) : $\langle\sin^2(\omega t + \alpha)\rangle = 1/2 = \langle\cos^2(\omega t + \alpha)\rangle$, (7)

avem imediat : $\langle M\rangle = [\omega(NBS)^2 : (r + R)]\,\langle\cos^2\omega t\rangle =$

$$= (1/2)\,\omega(NBS)^2 : (r + R) = 2{,}5\ \mathrm{N\cdot m} \qquad (8)$$

şi puterea medie : $P = \vec{M}\cdot\vec{\omega}$, $\langle P\rangle = \langle M\rangle\cdot\omega = 785$ W . (9)

6.2. TRANSFORMATOARE

6.2.1. ***Transformatorul din figură, cu miez toroidal, ridică tensiunea de la*** U_1 = 100 V ***la*** U_2 = 3300 V ***. Voltmetrul (ideal) arată*** U = 0,50 V ***. Câte spire are fiecare înfăşurare ?***

Rezolvare. La un transformator *raportul tensiunilor este egal cu raportul numerelor de spire* :

$$U_2 / U_1 = N_2 / N_1\,,\ \text{la fel}\ \ N_1 / 1 = U_1 / U\ \text{şi}\ N_2 / 1 = U_2 / U\,. \qquad (1)$$

Rezultă : $N_1 = U_1 / U = 200$, $N_2 = U_2 / U = 6600$. (2)

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6.2.2. ***În montajul din figură cu transformator ideal aflaţi curenţii şi tensiunile pe transformator.***

Rezolvare. *Legea lui* ***Kirchhoff*** pentru cele două ochiuri de reţea: $U - R_1 I_1 = U_1$,

$$U - R_2 I_2 = U_2 . \qquad (1)$$

Raportul de transformare:

$$K = N_1 / N_2 =$$

$$= U_1 / U_2 = - I_2 / I_1 . \qquad (2)$$

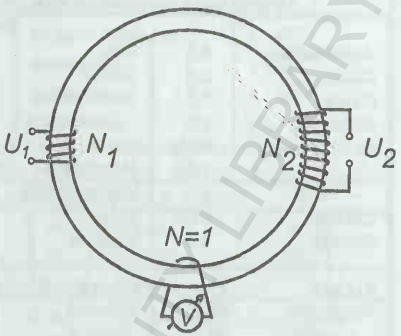


Fig.6.2.1

Scoatem din (2) $U_2 = U_1 N_2 / N_1$, $I_2 = - I_1 N_1 / N_2$ şi le introducem în (1): $U - R_1 I_1 = U_1$, $U + R_2 I_1 N_1 / N_2 = U_1 N_2 / N_1 \rightarrow$

$U_1 = U \cdot N_1 (N_1 R_2 + N_2 R_1) : (N_1^2 R_2 + N_2^2 R_1)$, $U_2 = U_1 N_2 / N_1$, (3)

$I_1 = U N_2 (N_2 - N_1) : (N_1^2 R_2 + N_2^2 R_1)$, $I_2 = - I_1 N_1 / N_2$. (4)

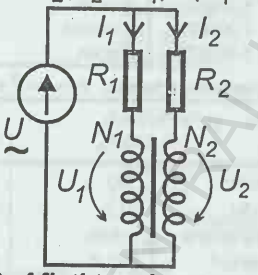


Fig.6.2.2

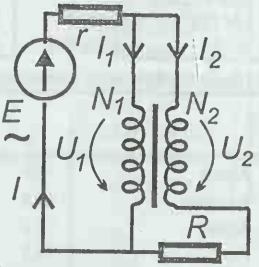


Fig.6.2.3

6.2.3. ***Aflaţi tensiunea pe rezistorul de sarcină*** R ***în montajul din figură cu transformator ideal .***

Rezolvare. Avem pentru cele două ochiuri :

$$E = r I + U_1 , \quad - U_1 + U_2 + R I_2 = 0 , \quad I = I_1 + I_2 . \qquad (1)$$

Raportul de transformare: $K = N_1 / N_2 = U_1 / U_2 = - I_2 / I_1$. (2)

Scoatem din (2) $U_2 = U_1 N_2 / N_1$, $I_1 = - I_2 N_2 / N_1$ şi le introducem în (1) : $E = r(- I_2 N_2 / N_1 + I_2) + U_1$, $- U_1 + U_1 N_2 / N_1 + R I_2 = 0$, de unde rezultă :

$$U = R I_2 = E \cdot N_1 (N_1 - N_2) R : [(N_1 - N_2)^2 r + R N_1^2] . \qquad (3)$$

* * *

1. Permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) a unor substanţe

Solide					
Acetilceluloza	3,5	Gips	6,3	Polietilenă	2,3
Cauciuc	2,5	Granit	7 ... 9	Polivinil acetat	4
Ceară	7,8	Hârtie uscată	2,6	Porţelan	5 ... 6
Chihlimbar	2,8	~ parafinată	3,7	Sare de bucătărie	6,0
Cuarţ ‖ axă	4,49	Lemn	2 ... 8	Sticlă	5 ... 10
~ ⊥ ~	4.55	Marmoră	8	Stirol	2,55
~ topit	3,7	Metilmetacrilat	2,6	Vaselină	2,2
Diamant	5,68	Mica	6 ... 7		
Ebonita	3,0	Parafina	2,2		
Lichide					
Acetonă	21,3	Eter etilic	4,34	Terebentină	2,3
Alcool etilic	25,7	Glicerină	43	Tetraclorură de carbon	2,24
~ metlic	33	Parafină	2,1	Toluen	2,39
Anilină	7,21	Petrol lampant	4,7	Ulei	2,2
Apă	81	Stirol	2,4	~ măsline	3,1
Benzen	2,2836	Sulfură de carbon	2,62	Vaselină	1,9
Benzină	2,3				
Cloroform	5,0				
Gaze în condiţii *normale*					
Aer uscat	1,000576	Dioxid de carbon	1,00068	Metan	1,00094
Amoniac	1,000171	~ ~ sulf	1,00950	Neon	1,00127
Apă vapori la 100°C	1,0060	Heliu	1,00007	Oxid de carbon	1,00069
Azot	1,000588	Hidrogen	1,000272	Oxigen	1,000531

2. Rezistivităţile unor substanţe ρ în $n\Omega \cdot m$ şi coeficienţii termici A în $10^{-3}\ K^{-1}$ la 20°C

Metale , ρ în $n\Omega \cdot m$					
	ρ	A		ρ	A
Alama	~ 80	~ 1,5	Invar	780	2,0
Aluminiu	28,2	3,6	Iridiu	61,5	3,7
Argint	16,2	3,6	Manganina	~ 440	~ 0,010
Aur	24,2	3,6	Mercur	957,7	0,89
Bismut	1200	4,0	Molibden	56	4,7
Bronz cu fosfor	~ 80	~ 3,5	Neusilber	~ 280	~ 0,30
Cărbune	40 000	- 0,80	Nichel	72,4	5,4
Cobalt	57	5,5	Nichelina	400	0,017
Constantan 60%Cu+40%Ni)	490	0,010	Nicrom	~ 1000	0,40
			Oţel	~ 120 ... 450	~3,2 ... 1,5
Cositor (staniu)	114	4,4	Paladiu	107	3,6
Cupru	17,2	4,0	Platina	105	3,7
Fier	98	5,0	Plumb	206,3	4,0
Grafit	390	-	Wolfram	55	5,2
			Zinc	59,2	3,5
Izolatoare , ρ în $\Omega \cdot m$ la 18°C					
Bachelita pură	$2 \cdot 10^{14}$		Gutaperca	$2 \cdot 10^{7}$	
Ceară de albine	$2 \cdot 10^{13}$		Hârtie uscată	10^{10}	
Celuloid	$2 \cdot 10^{8}$		Mica pură	$5 \cdot 10^{14}$	

BUJIAST / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Chihlimbar	$5 \cdot 10^{14}$	Parafină	10^{14}
Cuarţ ‖ axă	$1 \cdot 10^{12}$	Polistirol	10^{15}
~ ⊥ ~	$3 \cdot 10^{14}$	Porţelan neglazurat	$3 \cdot 10^{12}$
~ topit	10^{16}	Sticlă geam	$2 \cdot 10^{11}$
Diamant	$10^{10} \ldots 10^{11}$	Sulf rombic	$2 \cdot 10^{21}$
Ebonita	$2 \cdot 10^{14}$	Ulei mineral	$2{,}5 \cdot 10^{10}$

Observaţie : Rezistivitatea majorităţii izolatoarelor *scade* rapid cu *creşterea* temperaturii şi la 30°C poate coborî la jumătatea valorilor date .

3. Sensibilităţile medii ale unor termocuple *S* în μV/K

Pt - Pt + 10 % Rh	6,42	Fe - Constantan	54,00
Pt - Pt + 13 % Rh	6,44	Cu - Constantan	42,77

4. Echivalenţi electrochimici *K* în mg/C

Aluminiu Al^{3+}	0,093	Crom Cr^{3+}	0,180	Nichel Ni^{2+}	0,304
Argint Ag^{+}	1,1180	Cupru Cu^{+}	0,660	~ Ni^{3+}	0,203
Aur Au^{+}	2,043	~ Cu^{2+}	0,3294	Oxigen O^{2-}	0,0829
~ Au^{2+}	0,681	Fier Fe^{2+}	0,289	Plumb Pb^{2+}	1,0731
Bismut Bi^{3+}	0,719	~ Fe^{3+}	0,193	Sodiu Na^{+}	0,238
Clor Cl^{-}	0,367	Hidrogen H^{+}	0,0105	Zinc Zn^{2+}	0,338

5. Permeabilitatea magnetică relativă a unor substanţe

Paramagnetice :		*Diamagnetice :*	
Aer	1,000 000 38	Apa	0,999 991 0
Aluminiu	1,000 023	Benzen	0,999 992 5
Azot	1,000 000 013	Bismut	0,999 824
Ebonita	1,000 014	Cuarţ	0,999 984 9
Oxigen	1,000 001 9	Cupru	0,999 989 7
~ lichid	1,003 400	Hidrogen	0,999 999 937
Platina	1,000 360	Sare de bucătărie	0,999 987 4
Wolfram	1,000 176	Sticlă	0,999 987 4
Feromagnetice :			
Cobalt	170	Nichel	300
Fier de transformator	5500	Oţel moale	1400
Fontă	600	Permalloy	8500

6. Scala undelor electromagnetice , λ în m

Undele radio :		galben	$5{,}3 \cdot 10^{-7} \ldots 5{,}9 \cdot 10^{-7}$
lungi	$10^{3} \ldots 10^{4}$	verde	$4{,}9 \cdot 10^{-7} \ldots 5{,}3 \cdot 10^{-7}$
medii	$10^{2} \ldots 10^{3}$	albastru	$4{,}2 \cdot 10^{-7} \ldots 4{,}9 \cdot 10^{-7}$
scurte	$1 \ldots 10^{2}$	violet	$4{,}0 \cdot 10^{-7} \ldots 4{,}2 \cdot 10^{-7}$
Razele termice :		***Ultraviolete***	$1{,}8 \cdot 10^{-7} \ldots 4{,}0 \cdot 10^{-7}$
infraroşu depărtat	$10^{-5} \ldots 10^{-4}$	***Razele X*** :	
~ apropiat	$7{,}5 \cdot 10^{-7} \ldots 10^{-5}$	moi	$10^{-10} \ldots 2{,}0 \cdot 10^{-9}$
Lumina vizibilă :		dure	$10^{-11} \ldots 10^{-10}$
roşu	$6{,}5 \cdot 10^{-7} \ldots 7{,}5 \cdot 10^{-7}$	***Razele gama***	$5 \cdot 10^{-12} \ldots 5 \cdot 10^{-11}$
portocaliu	$5{,}3 \cdot 10^{-7} \ldots 5{,}9 \cdot 10^{-7}$	***Razele cosmice***	$\ldots 5 \cdot 10^{-14}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY
B.C.U. „I. EMINESCU" IAŞI FIZICĂ

CUPRINS

Pag.

Breviar 3

1. ELECTROSTATICA
   1.1. Câmpul electrostatic 8
   1.2. Capacitatea electrică 66
   1.3. Electrostatica şi mecanica 118

2. ELECTROCINETICA
   2.1. Legile circuitelor electrice 138
   2.2. Energie şi putere 181
   2.3. Electrocinetica şi electrostatica 201
   2.4. Elemente neliniare 231

3. ELECTROMAGNETISM
   3.1. Câmpul magnetic 248
   3.2. Forţa electromagnetică 264
   3.3. Forţa Lorentz 271
   3.4. Mişcarea sarcinilor în câmp magnetic 274

4. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ
   4.1. T.e.m. indusă 285
   4.2. Câmp electric indus 300
   4.3. Inductanţa 302
   4.4. Energia magnetică 305
   4.5. Inducţia electromagnetică şi mişcarea mecanică 309

5. CURENTUL ALTERNATIV
   5.1. Valori efective 328
   5.2. Circuite RLC 332
   5.3. Circuite oscilante 366
   5.4. Regim tranzitoriu 371

6. MAŞINI ELECTRICE
   6.1. Motoare electrice 392
   6.2. Transformatoare 396

ANEXE

1. Permitivitatea electrică relativă (constanta dielectrică) a unor substanţe 398
2. Rezistivităţile şi coeficienţii termici ai unor substanţe 399
3. Sensibilităţile medii ale unor termocupluri 399
4. Echivalenţii electrochimici 399
5. Permeabilitatea magnetică relativă a unor substanţe 399
6. Scala undelor electromagnetice 399

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ

Lucrarea se adresează elevilor de clasa a X-a și a XI-a, precum și celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat și admitere în învățământul superior.

Conține 530 probleme de electricitate.

Toate problemele sunt rezolvate *complet* și *amănunțit*.

ISBN 978-973-86990-6-9

EDITURA APH PLUS

Strada Caporal Preda nr. 12, sector 5
București, 051967
telefon 021 4259477
http://www.edituraph.ro

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY